文章编号:1001 - 9081(2007)04 - 0997 - 03

寻找平面代数剖分样本点的改进算法

单美静,曾振柄,毕忠勤
(华东师范大学 软件学院,上海 200062)
(mjshan@sei.ecnu.edu.cn)

摘 要:基于非线性多项式方程的零点配对算法以及临界点算法,给出了一种求平面代数剖分样本点的改进算法。该算法剔除了大量冗余样本点,并在计算过程中以区间表示代数数,有效避免了浮点数等近似计算。通过与已有的经典算法进行比较,实验结果表明该算法具有显著的效果。

关键词:代数剖分;样本点;计算机代数;代数数

中图分类号: TP301.6 **文献标识码**:A

Improved algorithm for finding the sample points of algebraic decomposition on plane

SHAN Mei-jing, ZENG Zhen-bing, BI Zhong-qin
(*Software Engineering Institute, East China Normal University, Shanghai* 200062, *China*)

Abstract: Based on the critical point algorithm and zero-match algorithm, an improved algorithm for finding sample points of algebraic decomposition was proposed. The proposed algorithm aims at reducing the redundant sample points. In the whole computing process, it utilizes an interval with rational endpoints to represent the exact algebraic number and avoid floating-point computation. Furthermore, compared with the existing algorithm by some examples, the effectiveness of the proposed method is verified.

Key words: algebraic decomposition; sample points; computer algebra; algebraic number

0 引言

实代数几何以及相关理论在众多领域都有着广泛的应用,如计算机辅助设计、计算几何、几何定理的自动证明和全局最优化等。在实代数几何中,代数剖分以及求其样本点的算法是一个基本问题,它对于求解和证明许多与多项式方程、不等式等相关的问题都起到了重要的作用,同时还能够给出实代数函数具体解的形式。

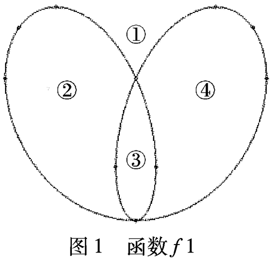

图 1 函数 $f1$

柱形代数剖分(CAD)算法[1]能将 r 维欧氏空间剖分为有限个互不相通的连通区域,称这些区域为胞腔,并将它们按照某种“柱形”方式排列,所研究的多项式在每个胞腔中保持符号不变。但是由于 CAD 算法求出的样本点的个数远多于胞腔的个数,导致大量的冗余计算。实际上在每个小胞腔内取一个样本点就足以验证多项式的性质。例如,$f1 = x^4 + 2x^2y^2 + y^4 - 4x^2y - 2y^3 + y^2$,共有 4 个连通分支(见图 1 中标记的①②③④)。如果在每个连通分支内取一个测试点应该共有 4 个样本点,但是按照 CAD 算法将整个平面细分为 18 个胞腔(不包括 0 维和 1 维胞腔),共有 18 个样本点,远多于连通分支的个数,存在许多冗余点造成了后继计算的浪费。

尽管后来有许多工作[2,3]来改进 CAD 算法,但是效果仍然不甚理想。即使是平面情形的代数剖分,也会在同一区域内求出过多的样本点造成多余计算,加大了计算的复杂度,而且整个计算过程为了处理精确的代数数也耗费了大量的时间。文献[4]提出了求平面代数剖分样本点的临界点算法,在很多情形下有效地克服了上述困难。

本文在目前所做工作的基础上,结合临界点算法提出了一种改进算法,在求解多项式方程的过程中,以区间表示精确的代数数,并利用一个恰当的连分数逼近区间,从而给出了样本点。在整个计算过程中,避免了浮点数等近似计算,保证计算的精确性,提高了计算的效率。

1 预备知识

定义 1 区间算法。一个区间 $[a,b]$ 是满足 $a \leqslant x \leqslant b$ 的实数 x 的全体,特别地,区间 $[a,a]$ 表示实数 a。区间 $[a,b]$ 的长度定义为 $d([a,b]) = b - a$,中心定义为 $c([a,b]) = (a+b)/2$。对给定的两个区间 $[a,b]$ 和 $[c,d]$,定义它们的运算如下:

$$[a,b] \circ [c,d] := \{x \circ y \mid x \in [a,b], y \in [c,d]\}$$

其中 $\circ \in \{+, -, \times, /\}$,容易验证:

收稿日期:2006 - 10 - 24;**修订日期**:2006 - 12 - 13
基金项目:国家 973 计划资助项目(NKBRPC-2004CB318003);国家自然科学基金资助项目(NNSFC-10471044)

作者简介:单美静(1979 -),女,辽宁大连人,博士研究生,主要研究方向:代数与半代数系统高效能算法、符号计算; 曾振柄(1963 -),男,甘肃皋兰人,教授,博士生导师,主要研究方向:计算机自动推理; 毕忠勤(1977 -),男,安徽安庆人,讲师,博士研究生,主要研究方向:计算机自动推理、并行计算.

$[a,b]+[c,d]=[a+c,b+d]$

$[a,b]-[c,d]=[a-c,b-d]$

$[a,b]\times[c,d]=[\min(ac,ad,bc,bd),\max(ac,ad,bc,bd)]$

$[a,b]/[c,d]=[a,b]\times[1/d,1/c],\ 0\notin[c,d]$

算法 1　临界点算法

寻求平面代数剖分样本点的临界点算法[4]比惯用的柱形代数剖分算法的效率要高。文献[6]在此基础上作了较深入的研究。临界点算法的基本步骤:

$SPAD(f,[x,y])$

输入:代数曲线 C 定义的多项式 $f(x,y)$。

输出:平面 C 代数剖分的一组代数样本点。

步骤 1:求 $f(x,y)$ 的临界点,即求解方程组:

$$CS:\left\{\frac{\partial f}{\partial \chi}=0,\frac{\partial f}{\partial y}=0\right\} \tag{1}$$

如果 CS 有流形解 $g(x,y)=0$(假定 $g(x,y)$ 没有重因式),并且它不是圆心在原点的圆(若是,则在该圆上任取一点,比如 $(0,r)$),则根据 Seidenberg 代数曲线决定法[5]求解方程组:

$$\left\{y\frac{\partial g}{\partial x}-x\frac{\partial g}{\partial y}=0,g(x,y)=0\right\} \tag{2}$$

所有这些点之集记作 PS。

步骤 2:利用 WR 相对分解算法[7,8]把 PS 中那些不在代数曲线 C 上的点找出来,并记入集合 SP。

步骤 3:求一个充分大的数 r,使得圆:

$$C_r:x^2+y^2-r^2=0 \tag{3}$$

内包含平面 C 代数剖分的所有有界分支,且 C_r 穿过每一个无界分支。求 C_r 与这些无界分支的交点,C_r 被这些点分割为若干互不连通的圆弧,在这些圆弧上各取一点,记入 SP。

步骤 4:最后输出 SP。

2 主要算法

本文在临界点算法的基础上,提出了一个寻求代数剖分样本点的改进算法。我们的算法有别于文献[4],在求解方程组时采用零点配对的方法给出区间解,通过连分数逼近区间最终给出样本点。一般算法所求的样本点坐标都是代数数,我们的算法利用已有的信息,计算包含代数数的区间,不涉及计算浮点数等近似解,有效地节约了时间,避免了误差。该算法主要包括以下两个子算法。

2.1 零点配对算法

求一个非线性的多项式方程组的代数解,一般的方法就是将这样的方程组化为若干个不可约升列,但这个结果并容易实现。对于高次方程或者方程非稀疏的情况,将它三角化是非常困难的。通常情况下,认为将方程组三角化就是实现了对它的求解。

为了解决这个问题,基于区间计算和 2D Sturm 定理等思想建立了求解非线性多项式方程组的零点配对算法:

算法 2　$Zero-Match(f,g,[x,y])$

输入:多项式组 $\{f,g\}$。

输出:多项式组的区间解。

步骤 1:经过预处理,得到首一且约化的本原多项式 f_0,g_0。

步骤 2:求 f_0,g_0 分别关于 x,y 的 Sylvester 结式:

$$h_1(x)=res(f_0,g_0,y),\quad h_2(y)=res(f_0,g_0,x) \tag{4}$$

步骤 3:利用 Maple 中的 realroot 函数,分别求解以下两个单变元多项式方程:

$$realroot(h_1(x)),\qquad realroot(h_2(y)) \tag{5}$$

得到若干区间解序列:

$[[a_1,b_1],[a_2,b_2],\cdots,[a_m,b_m]],[[c_1,d_1],[c_2,d_2],\cdots,[c_n,d_n]]$

其中:

$x_i\in[a_i,b_i],1\leqslant i\leqslant m,\ y_i\in[c_i,d_i],1\leqslant j\leqslant n$

对上述区间进行配对,得到一个区间序列:

$IL=[[a_i,b_i]\times[c_j,d_j]],\ 1\leqslant i\leqslant m,1\leqslant j\leqslant n$

步骤 4:根据区间计算的性质,通过区间变换,对可能存在解的区间进行过滤筛选并记入 IS。

步骤 5:根据 2D Sturm 定理,准确判断 IS 中所有包含且仅包含一个交点的区间,记入 S。

步骤 6:输出 S。

2.2 求本点的改进算法

基于零点配对算法和临界点算法求代数剖分的样本点。

算法 3　$ISP(f,[x,y])$

输入:代数曲线 C 定义的多项式 $f(x,y)$。

输出:平面 C 代数剖分的一组样本点。

步骤 1:根据临界点原理,得方程组:

$$CS:\left\{h_1=\frac{\partial f}{\partial x}=0,h_2=\frac{\partial f}{\partial y}=0\right\} \tag{6}$$

步骤 2:经过预处理,得到首一且约化的本原多项式 $h_1(x,y),h_2(x,y)$。

步骤 3:利用 2.1 节介绍的零点配对算法,求 $f(x,y)$ 的区间临界点,即求解方程组 CS。由 $Zero\text{-}Match(h_1,h_2,[x,y])$ 得到一系列区间解(其中对于曲线边界可能穿过的区间进行了相应的处理),作为有界分支内的区间样本点,记为 P_1。

步骤 4:根据方程的系数,求出一个足够大的数 r,使得圆:

$$C_r:x^2+y^2-r^2=0 \tag{7}$$

能够包含曲线的所有有界分支,并且穿过所有的无界分支。

步骤 5:判断曲线是否存在无界分支:

(1) 如果曲线 f 与圆 C_r 不相交,则说明曲线 f 只有有界分支,此时解方程 $f(0,y)=0$ 若有正解,则记其最大区间正解 $y_{\max}=[y_1,y_2]$,记 $P_2=[[0,0],[y_2+1,y_2+2]]$;若仅有负解,则记其最小区间负解为 $y_{\min}=[y_1,y_2]$,记 $P_2=[[0,0],y_2-2,y_2-1]]$;否则,$P_2=[0,0],[0,0]]$。

(2) 如果曲线 f 与圆 C_r 相交,则说明曲线 f 存在无界分支。那么,圆 C_r 被曲线 f 划分为若干圆弧,则在每段圆弧与无界分支所围成区域中取区间样本点,记为 P_2。

步骤 6:$P=P_1\cup P_2$,由于所得到区间样本点可能具有较复杂的有理数端点,因此利用一个恰当的连分数逼近区间,从而得到一系列简化的样本点,记做 PL。

步骤 7:输出 PL。

3 算例

实验均在 1.60G Napa 双核,1G 内存的 PC 上进行。同时,对于每个例子都利用经典的 PCAD[3]算法进行计算,从而通过对比显示了本文所提出算法的效率。

例 1　设曲线方程 $f1=x^4+2x^2y^2+y^4-4x^2y-2y^3+y^2$,求其平面代数剖分的样本点。

解:$ISP(f_1,[x,y])=[[0,1/2],[1,1][-1,1],[0,2]]$

共有 4 个区间样本点。

$PCAD(f1,[\,],[x,y]) = [[-2,0],[-1,0],[-1,3/4],[-1,2],[1,0],[1,3/4],[1,2],[2,0]]$

共有 8 个样本点。由图 1 可见，代数曲线 $f1$ 为有 4 个连通分支。

例 2　设曲线方程 $f2 = x^4 - x^2y^2 - 2y^4 - 3x^2 + 3y^2 + 2$，求其平面代数剖分的样本点。

解：$ISP(f2,\ [x,y]) = [[0,\ 0],\ [0,\ 19/22],\ [0,\ -19/22],\ [11/9,\ 0],\ [165/128,\ 73/128],\ [165/128,\ 37/64],\ [165/128,\ -37/64],\ [165/128,\ -73/128],\ [-11/9,\ 0],\ [-165/128,37/64],\ [-165/128,73/128],\ [-83/64,-73/128],\ [-165/128,\ -73/128],\ [3,0],\ [0,3],\ [-3,0],\ [0,-3]]$

共有 17 个区间样本点。

$PCAD(f2,[\,],[x,y]) = [[-2,-2],[-2,0],[-2,2],[-21/16,-1],[-21/16,-9/16],[-21/16,0],[-21/16,9/16],[-21/16,1],[-5/4,-1],[-5/4,-5/8],[-5/4,0],[-5/4,5/8],[-5/4,1],[0,-2],[0,0],[0,2],[5/4,1],[5/4,-5/8],[5/4,0],[5/4,5/8],[5/4,1],[21/16,-1],[21/16,-9/16],[21/16,0],[21/16,9/16],[21/16,1],[2,-2],[2,0],[2,2]]$

共有 29 个样本点。

由图 2 可见，代数曲线 $f2$ 有 7 个连通分支。

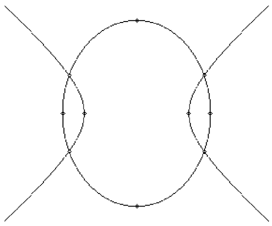

图 2　代数曲线 $f2$

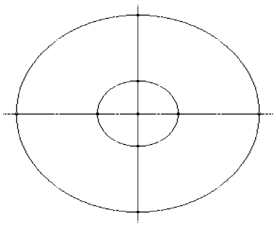

图 3　代数曲线 $f3$

例 3　设曲线方程 $f3 = xy(x^2 + y^2 - 1)(x^2 + y^2 - 9)$，求其平面代数剖分的样本点。

解：$ISP(f3,[x,y] = [[1/2,\ 1/2],\ [1/2,\ -1/2],\ [37/21,\ 37/21],\ [37/21,\ -37/21],\ [-1/2,\ 1/2],\ [-1/2,\ -1/2],\ [-37/21,37/21],\ [-37/21,-37/21],\ [-2,887/256],\ [2,-887/256],\ [-2,-887/256],\ [2,887/256]]$

共有 12 个区间样本点。

$PCAD(f3,[\,],[x,y]) = [[-4,-1],[-4,1],[-2,-3],[-2,-1],[-2,1],[-2,3],[-1/2,-3],[-1/2,-1],[-1/2,-1/2],[-1/2,1/2],[-1/2,1],[-1/2,3],[1/2,-3],[1/2,-1],[1/2,-1/2],[1/2,1/2],[1/2,1],[1/2,3],[2,-3],[2,-1],[2,1],[2,3],[4,-1],[4,1]]$

共有 24 个样本点。

由图 3 可见，代数曲线 $f3$ 有 12 个连通分支。

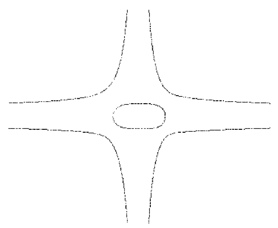

图 4　代数曲线 $f4$

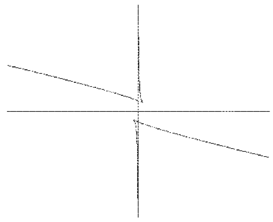

图 5　代数曲线 $f5$

例 4　设曲线方程 $f4 = x^6y^6 - x^4y^3 + x^3y^4 - x^4 - 3y^2 + 1$，求其平面代数剖分的样本点。

解：$ISP(f4,\ [x,y]) = [[0,\ 0],\ [35/36,\ -16/21],\ [1,\ 35/36],\ [-10/9,\ -6/7],\ [-8/7,\ 13/12],\ [747/256,\ 179/256],\ [441/256,\ -629/256],\ [441/256,\ 629/256],\ [-1/16,\ 767/256],\ [-57/32,617/256],\ [-7/128,\ -767/256],\ [-373/128,183/256],\ [-455/256,-619/256]]$

共有 13 个区间样本点。

$PCAD(f4,[\,],[x,y]) = [[-2,-1],[-2,0],[-2,1],[-1/2,-5],[-1/2,-1],[-1/2,0],[-1/2,1],[-1/2,5],[1/2,-4],[1/2,-1],[1/2,0],[1/2,1],[1/2,4],[2,-1],[2,0],[2,1]]$

共有 16 个样本点。

由图 4 可见，代数曲线 $f4$ 有 6 个连通分支。

例 5　设曲线方程 $f5 = rR(64rR^3 + 48r^2R^2 - 4R^2 + 12r^3R - 20rR + r^4 + 2r^2 + 1)$，求其平面代数剖分的样本点。

解：$ISP(f5,[r,R]) = [[4/21,\ 5/13],\ [-4/21,\ -5/13],\ [5/512,\ -767/256],\ [-1441/512,\ 265/256],\ [-673/512,\ 691/256],[-5/512,\ -767/256],[773/512,\ 663/256],\ [1441/512,\ -265/256],\ [-773/512,\ -663/256],\ [673/512,\ -691/256]]$

共有 10 个区间样本点。

$PCAD(f5,[\,],[x,y]) = [[-1,-1],[-1,1/2],[-1,1],[-1/8,-1],[-1/8,-7/16],[-1/8,-1/4],[-1/8,1/2],[-1/8,1],[1/8,-1],[1/8,-1/2],[1/8,1/4],[1/8,7/16],[1/8,1],[1,-1],[1,-1/2],[1,1]]$

共有 16 个样本点。

由图 5 可见，代数曲线 f5 有 8 个连通分支。

4　结语

利用柱形代数剖分（CAD）算法来求平面代数剖分的样本点，一般情况下都会出现冗余的样本点，即样本点的个数多于代数曲线所划分的互不连通的连通分支个数。利用本文中介绍的算法，在通常情况下，只会出现较少的冗余样本点。同时，求该样本点算法中不涉及代数数运算以及浮点数等近似计算，不但保证了整个计算的精确性，而且提高了计算的效率。下一步的工作是将算法推广到求高维代数剖分的样本点，更进一步推动代数几何领域相关算法的发展。

参考文献：

[1] COLLINS GE. Quantifier elimination for the elementary theory of real closed fields by cylindrical algebraic decomposition[J]. Lecture Notes in Computer Science, 1975, 33: 134 – 183.

[2] COLLINS GE, JOHNSON JR, KRANDICK W. Interval arithmetic in cylindrical algebraic decomposition[J]. Journal of Symbolic Computation, 2002, 34: 145 – 157.

[3] COLLINS GE, HONG H. Partial Cylindrical Algebraic Decomposition for Quantifier Elimination[J]. Journal of Symbolic Computation, 1994, 11: 1 – 30.

[4] 侯晓荣，曾振柄．平面代数剖分样本点的一个有效算法[J]．计算机应用，1997，17(6)：27 – 29.

[5] JACOBSON N. Basic Algebra II[M]. San Francisco: Freeman and Company, 1980.

[6] 侯晓荣，严爱国，黄黎．平面代数剖分样本点临界点算法[J]．四川大学学报．2001，38(3)：346 – 349.

[7] 杨路，张景中，侯晓荣．非线性代数方程组与定理机器证明[M]．上海，上海科技教育出版社，1996.

[8] 张景中，杨路，侯晓荣．几何定理机器证明的结式矩阵法[J]．系统科学与数学，1995，15(1)：10 – 15.