文章编号:1001 - 9081(2007)05 - 1187 - 04

一种带修复函数的 QGA 及其在背包问题中的应用

朱筱蓉,张兴华
(南京工业大学 自动化学院,江苏 南京 210009)
(zhuxr1234@163.com)

摘　要:提出了一种带修复函数的量子遗传算法来求解背包问题。该算法采用量子比特概率编码方式构造染色体,由量子旋转门操作实现种群进化。在求解背包问题时,采用修复函数来修正不可行编码。文中给出了该算法的具体实现方法和流程,并用几个典型背包问题实例对其进行测试,结果表明带修复函数的量子遗传算法在求解背包问题时,综合性能优于传统遗传算法。

关键词:量子遗传算法;背包问题;修复函数

中图分类号: TP301　　**文献标识码**:A

A quantum genetic algorithm with repair function and its application in knapsack question

ZHU Xiao-rong, ZHANG Xing-hua
(*College of Automation, Nanjing University of Technology, Nanjing Jiangsu* 210009, *China*)

Abstract: A Quantum Genetic Algorithm (QGA) with repair function was proposed in this paper. This algorithm codes the chromosomes in the way of quantum bit probability, and makes the population evolve by the operation of quantum gate. When solving the knapsack question, repair function was used to repair unfeasible code. The implementation and procedure of this algorithm were introduced in detail in the paper. The test results of several typical knapsack questions show that this algorithm has better comprehensive performance than conventional genetic algorithm.

Key words: Quantum Genetic Algorithm(QGA); knapsack question; repair function

0 引言

背包问题是一个在运筹学领域里常见的优化难题[1]。工厂里的下料问题,管理中的资源分配,资金预算,投资决策,装载问题等均可建模为背包问题。研究该问题的求解方法,无论在理论上,还是在实践中都有较重要的意义。由于采用通常的数学方法很难在有限的时间内找出全局最优解,因此,背包问题的求解方法主要是一些启发式算法[2],如禁忌搜索算法、模拟退火算法等,也有一些文献用遗传算法求解该问题[3],但当问题的规模较大时,传统遗传算法求解的效果不太理想。

近年来,A. Narayannan 和 Kuk-Hyun Han 等人将量子力学中量子比特、量子态叠加等概念引入到遗传算法中,提出了量子遗传算法(QGA)[4]。它以量子计算的一些概念和理论为基础,如量子比特、量子态叠加等,用量子比特编码来表示染色体,用量子门更新来完成进化搜索。量子遗传算法在种群多样性和计算并行性方面优于传统遗传算法,可有效提高算法的收敛速度,减少早熟收敛[5]。本文提出了一种带修复函数的 QGA 来求解背包问题,在量子门更新时采用一种通用的旋转角调整策略,使编程更为简单。对于运行中产生的非法解,由修复函数进行修正。几个典型背包问题的测试结果表明,这种具有自修复功能的量子遗传算法在求解背包问题时,性能优于传统遗传算法。

1 背包问题的描述

从计算复杂性理论来看,背包问题是个 NP 难题。它的描述有多种形式,本文仅考虑简单 0/1 背包问题。

0/1 背包问题可描述为:现有 m 个物品 $x_1, x_2, \cdots, x_m$,每个物品的重量为 w_i,价值为 p_i。要从其中挑选若干物品放入背包,背包的总容量为 c。问应该如何选择物品,才能使背包中物品的总价值最大。

背包问题的数学表达为:

$$\max f = \sum p_i x_i,\ \sum_{i=1}^{m} w_i x_i \leqslant c$$

其中,x_i 只取 0 或者 1,此时为 0/1 背包问题。

2 量子遗传算法(QGA)简介

量子遗传算法是量子计算与遗传算法的结合。QGA 基于量子计算中的量子比特和量子态叠加等概念,将量子比特的概率幅表示用于染色体的编码,这样,一个量子比特染色体可以表示多个态的叠加,使得该算法较传统的遗传算法具有更好的种群多样性和更高的计算并行性。模拟量子坍塌的随机观察使种群更加丰富。在个体更新时采用量子旋转门操作,而不是传统遗传算法中实现较复杂的交叉和变异操作,有效地提高了算法的收敛速度,并且可以方便地在算法的探索和开发之间取得平衡,提高算法的寻优效率。

2.1 量子比特编码

在 QGA 中,染色体中的基因不是用确定性的值(如二进

收稿日期:2006 - 11 - 08;**修订日期**:2007 - 03 - 05　**基金项目**:江苏省教育厅自然科学基金资助项目(06 - KJB - 510040)

作者简介:朱筱蓉(1981 -),女,江苏苏州人,硕士研究生,主要研究方向:进化计算、智能信息处理;　张兴华(1963 -),男,副教授,博士,主要研究方向:电力传动控制、复杂系统控制.

制数、浮点数或符号等)表示,而是用量子比特(qubit)表示,或者说是用随机概率方式表示。一个量子比特不仅仅可以表示$|0>$态或$|1>$态,而且可以表示这两种状态的任意叠加态,即$|0>$态和$|1>$态的任意中间态。所以,该基因所表达的不再是某一确定的信息,而是包含所有可能的信息,对该基因的任一操作也会同时作用于所有可能的信息。一般地,一个基因(即量子比特)的状态可表示为:

$$|\psi> = \alpha|0> + \beta|1> \tag{1}$$

其中,α和β分别是$|0>$和$|1>$的概率幅,且满足归一化条件:

$$|\alpha|^2 + |\beta|^2 = 1 \tag{2}$$

其中,$|\alpha|^2$表示量子态的观测值为0的概率,$|\beta|^2$表示量子态的观测值为1的概率。

在QGA中,第t代种群$Q(t)$中一个长度为m位的量子比特个体可表示为:

$$q_j^t = \begin{bmatrix} \alpha_1^t & \alpha_2^t & \cdots & \alpha_m^t \\ \beta_1^t & \beta_2^t & \cdots & \beta_m^t \end{bmatrix}, j = 1,2,\cdots,n$$

其中,n为种群大小,t为当前进化代数。且$|\alpha_i|^2 + |\beta_i|^2 = 1$, $i = 1,2,\cdots,m$。

量子遗传算法中采用的这种量子比特染色体表示形式,使一个染色体可以同时表示多个状态信息(一个m位的量子染色体表示2^m个可能的状态),有利于保持种群的多样性,克服早熟收敛。

2.2 量子门更新操作

在QGA中,量子比特个体是遗传信息的载体,而对信息的基本操作是由量子门来实现的。量子门通过对量子比特实施一种幺正变换来控制量子态的演化和传递,进而实现种群的进化。量子门的设计是QGA实现的关键,直接影响QGA的性能。一般情况下采用量子旋转门U,其更新过程如下:

$$[\alpha'_i \quad \beta'_i]^{\mathrm{T}} = U \cdot [\alpha_i \quad \beta_i]^{\mathrm{T}} \tag{3}$$

$$U = \begin{bmatrix} \cos\theta_i & -\sin\theta_i \\ \sin\theta_i & \cos\theta_i \end{bmatrix} \tag{4}$$

其中,$[\alpha_i \quad \beta_i]^{\mathrm{T}}$为染色体中第$i$个基因,$[\alpha'_i \quad \beta'_i]^{\mathrm{T}}$为其通过量子旋转门更新后的新基因,$\theta_i$为旋转角,其大小和符号是根据一个事先设计的调整策略而确定的。旋转角的幅值影响收敛速度,如果幅值过大,会导致早熟;若幅值过小,会使收敛速度减慢。其值一般在$0.001\pi \sim 0.05\pi$之间[6]。与其他的进化算法类似,QGA也是一种概率搜索算法,只是其个体表示具有量子比特的形式。量子染色体的更新由量子门操作来完成,实际上是一种启发式进化策略,有助于提高算法的收敛速度。

3 求解背包问题的实现

3.1 修复函数

在求解背包问题时,背包的总容量c是确定的,但是,不一定每个解都满足背包的容量限制条件($\sum_{i=1}^{m} w_i x_i \leqslant c$),必定有不满足限制条件的解存在,因此,对非法解的处理是解决背包问题的一个重要步骤。

经典背包问题在求最大利润时大多采用惩戒函数和修复函数的方法[7]。本文采用修复函数的方法来修正非法解,使其变为可行的编码。具体实现方法如下:

设置一个寄存器*overfilled*,放置二值数0或1。1表示背包已装满,0表示背包没满。

(1) *overfilled*置0。

(2) 若$\sum_{i=1}^{m} w_i x_i > c$,则*overfilled*置1。

(3) 当*overfilled*为1时,随机选择一个x_i使其为0,直到$\sum_{i=1}^{m} w_i x_i \leqslant c$。此时,将*overfilled*置0。

(4) 当*overfilled*为0时,随机选择一个x_j使其为1,直到$\sum_{i=1}^{m} w_i x_i > c$。此时,将*overfilled*置1。

(5) 将最后选择的一个x_j置回0。

3.2 算法实现

带修复函数的量子遗传算法求解背包问题的具体实现步骤如下:

(1) 初始化:产生初始种群

$Q(t) = \{q_1^t, q_2^t, \cdots, q_n^t\}$

其中q_j^t为第t代种群中的第j个量子染色体。

$$q_j^t = \begin{bmatrix} \alpha_{j1}^t & \alpha_{j2}^t & \cdots & \alpha_{jm}^t \\ \beta_{j1}^t & \beta_{j2}^t & \cdots & \beta_{jm}^t \end{bmatrix}, j = 1,2,\cdots,n$$

式中,n是种群中量子染色体的数目,由于量子遗传算法具有高度并行性,所以种群规模可以很小而不影响算法的性能,本文中取$n = 10$;m为量子染色体的长度,即背包中物品的个数。初始化时,全部染色体的所有基因

$\alpha_{ji}^0, \beta_{ji}^0, j = 1,2,\cdots,n;\ i = 1,2,\cdots,m$

都被初始化为$1/\sqrt{2}$,这意味着一个染色体取到所有可能值的概率是相等的。

(2) 量子坍塌:对$Q(t)$中的个体进行一次观测,以获得一组确定的解$P(t) = \{x_1^t, x_2^t, \cdots, x_n^t\}$。其中,第$j$个染色体的观测值$x_j^t = \{x_{j1}^t, x_{j2}^t, \cdots, x_{jm}^t\}$是一个长度为$m$的二进制串,其每一位$x_{ji}^t$的值观测为0或1是根据相应量子比特的概率选择得到的。具体观测过程为:产生一个$0 \sim 1$之间的随机数r,若$|\alpha_{ji}^t|^2 < r$,则取$x_{ji}^t = 1$,否则取$x_{ji}^t = 0$;量子坍塌得到的每组二进制串x_j^t即为一个0-1背包问题的解决方案。

(3) 修正非法解:采用3.1节所述的修复函数修正不可行编码,使所有的编码都满足背包限制条件,变为可行的编码。

(4) 计算适应度:选取适应度函数为背包中物品的总价值。第j个染色体的适应度值$f_j = \sum_{i=1}^{m} p_i \cdot x_{ji}$。式中,$p_i$是背包中第$i$个物品的价值;$x_{ji}$为第$j$个染色体的第$i$位观测值,$m$为染色体长度,即背包中物品的个数。由于要求背包的最大价值,所以适应度值越大的个体越好。

(5) 更新种群:通过量子旋转门,根据(3)式和(4)式更新$Q(t)$。本文采用一种通用的旋转角调整策略[8],如式(5)所示:

$$\theta_i = \mathrm{sign}\left\{(x_{ji}^t - b_i^t) \cdot \left[f(x_j^t) - f(b^t)\right] \cdot \alpha_{ji}^t \cdot \beta_{ji}^t\right\} \cdot \Delta\theta_i \tag{5}$$

式中,θ_i为旋转角;sign为符号函数;x_{ji}^t和b_i^t分别为解x_j^t与当前最优解b^t的第i位;$f(x_j^t)$和$f(b^t)$分别是它们的适应度值;$[\alpha_{ji}^t \quad \beta_{ji}^t]$为种群中第$j$个染色体的第$i$个基因对;$\Delta\theta_i$为量子比特旋转的角度,其大小可以控制算法的收敛速度,本文中

取 0.01π。此调整策略可以用通常的表格形式表示，如表 1。表中 $s(\alpha_{ji}^t\beta_{ji}^t)$ 为量子比特旋转的方向函数。图 1 是量子旋转门作用于量子比特个体的示意图。例如，当 $x_{ji}^t = 0, b_i^t = 1$ 时，若 $f(x_j^t) \leqslant f(b^t)$，为使当前个体收敛到具有更高适应度的染色体，应该增加当前解对应量子比特取 1 的概率，即要使 $|\beta_{ji}^t|$ 变大，此时，在图 1 中，若 $(\alpha_{ji}^t, \beta_{ji}^t)$ 在第 1,3 象限，θ 应向逆时针方向旋转（取正值），若在第 2,4 象限，θ 应向顺时针方向旋转（$\Delta\theta_i$ 取负值）。

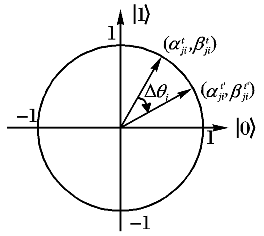


图 1　量子旋转门

（6）该算法的流程图如图 2。

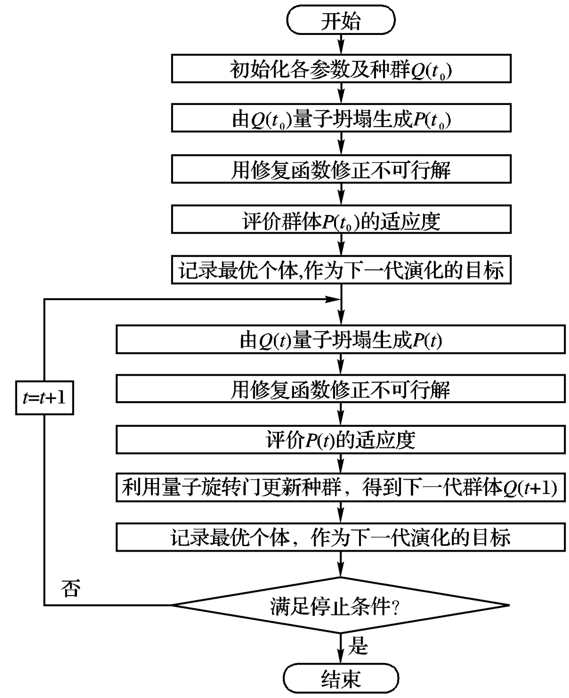


图 2　QGA 求解背包问题流程

4　应用实例

表 1　旋转角调整策略

x_{ji}^t	b_i^t	$f(x_j^t) \leqslant f(b^t)$	$\Delta\theta_i$	$s(\alpha_{ji}^t\beta_{ji}^t)$			
				$\alpha_{ji}^t\beta_{ji}^t > 0$	$\alpha_{ji}^t\beta_{ji}^t < 0$	$\alpha_{ji}^t = 0$	$\beta_{ji}^t = 0$
0	0	假	0	0	0	0	0
0	0	真	0	0	0	0	0
0	1	假	0.01π	−1	+1	0	0
0	1	真	0.01π	+1	−1	0	0
1	0	假	0.01π	+1	−1	0	0
1	0	真	0.01π	−1	+1	0	0
1	1	假	0	0	0	0	0
1	1	真	0	0	0	0	0

为了验证本文提出带修复函数的量子遗传算法在求解背包问题时的有效性，以两个典型的背包问题为例，测试该方法的性能，并与传统遗传算法（CGA）进行比较。

算例 1

采用文献[9]中的一个背包问题实例，例子中有 50 个物品可供选择，具体参数如下：

$p = \{p_i\} = \{220, 208, 198, 192, 180, 180, 165, 162, 160, 158, 155, 130, 125, 122, 120, 118, 115, 110, 105, 101, 100, 100, 98, 96, 95, 90, 88, 82, 80, 77, 75, 73, 72, 70, 69, 66, 65, 63, 60, 58, 56, 50, 30, 20, 15, 10, 8, 5, 3, 1\}$

$w = \{w_i\} = \{80, 82, 85, 70, 72, 70, 66, 50, 55, 25, 50, 55, 40, 48, 50, 32, 22, 60, 30, 32, 40, 38, 35, 32, 25, 28, 30, 22, 50, 30, 45, 30, 60, 50, 20, 65, 20, 25, 30, 10, 20, 25, 15, 10, 10, 10, 4, 4, 2, 1\}$

$c = 1\,000$

算法参数：

· 带修复函数的量子遗传算法（QGA）：种群大小为 10，最大进化代数为 500；

· 传统遗传算法（CGA）：种群大小为 50，最大进化代数为 500，交叉概率 0.8，变异概率 0.05。

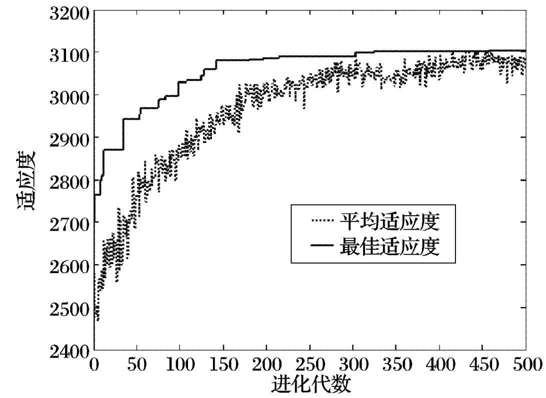


图 3　QGA 解算例 1 的适应度曲线

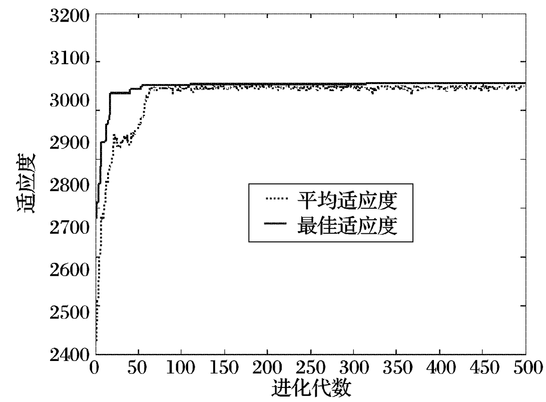


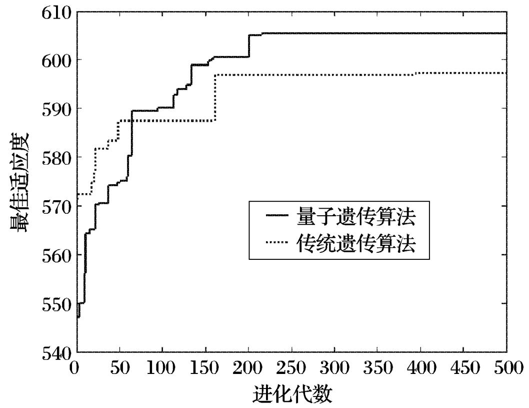
图 4　CGA 解算例 1 的适应度曲线

用 QGA 解决此背包问题，可得到如图 3 的进化过程曲线。用该算法可以求出该问题的最优解决方案，决策变量 $x_i (i = 1,2,\cdots,m)$ 为 11010101111011011011011111111010000101001100000 1000，背包的总价值为 3 103，总质量为 1 000。而用传统遗传算法（种群大小 sizepop = 50，最大进化代数 maxgen = 500，交叉和变异概率分别为 0.8 和 0.05）解决该背包问题无法得到全局最优解，运行结果如图 4 所示。将图 3 和图 4 进行比较不难看出，传统遗传算法（CGA）的平均适应度迅速趋向全局最佳适应度，而量子遗传算法（QGA）的平均适应度趋向全局最佳适应度的趋势比较缓慢，由此可以说明，QGA 虽然种群较小，但却具有更好的种群多样性。

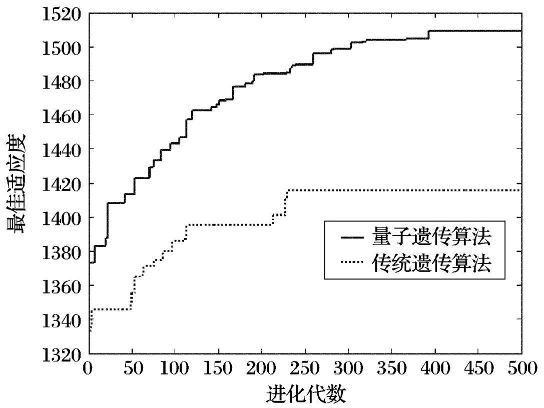
算例 2

物品随机产生，物品个数 m 分别取 100、250 和 500，物品重量 w_i 为 1 ~ 10 之间均匀分布的随机数，物品价值 $p_i = w_i + 5$，背包容量 $c = \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{m} w_i$。

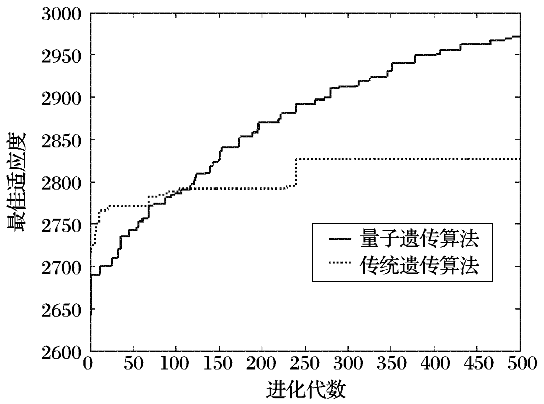
采用传统遗传算法（CGA）和量子遗传算法（QGA）分别对 $m = 100$、$m = 250$ 和 $m = 500$ 的三种背包问题进行求解，算法参数同算例 1，得到每代最佳适应度的比较如图 5 所示。从图 5 中可以看出，量子遗传算法的寻优能力明显优于传统遗传算法。



(a) m=100



(b) m=250



(c) m=500

图 5 QGA 和 CGA 解算例 2 比较

分别用 CGA 和 QGA 对上述背包问题进行 50 次试验，记录下每次运行的最佳适应度值，即背包的最大总价值。50 次运行结果的最优值、平均值和最差值如表 2 所示。

从以上两个例子中可以看出，在求解背包问题时量子遗传算法的寻优能力优于传统遗传算法。而且，从两者的平均适应度曲线的比较可以看出，量子遗传算法虽然种群规模小，但仍能保持种群中个体的多样性，可以避免早熟收敛。而传统遗传算法在进化后期适应度高的个体大量繁殖，充斥整个解空间，这样就容易导致算法停止在局部最优解上。总之，带修复函数的量子遗传算法在求解背包问题时具有优良的性能。

表 2 CGA 和 QGA 解算例 2 的实验结果

物品个数	运行结果	CGA	QGA
100	最优	608.8	625.68
	平均	586.05	602.02
	最差	567.92	582.46
250	最优	1461.4	1533.8
	平均	1412.25	1499.142
	最差	1360.9	1465.6
500	最优	2833.1	3016.1
	平均	2776.47	2958.02
	最差	2713.8	2927.7

5 结语

本文提出了一种带修复函数的量子遗传算法来求解背包问题，该算法采用量子比特概率编码方式构造染色体，能够表示出许多线性叠加状态；模拟量子坍塌的随机观察使种群更加丰富；用量子旋转门操作实现种群进化，有效地提高了算法的收敛速度，减少优化过程中的早熟收敛。在量子门更新时采用一种通用的旋转角调整策略，使编程更为简单。对于运行中产成的非法解，采用修复函数进行修正。几个典型背包问题实例的测试结果表明，量子遗传算法比传统遗传算法具有更好的种群多样性和全局寻优能力。

参考文献：

[1] 梁开福. 背包问题的性质研究[J]. 数学理论与应用, 2000, 20(2): 23 – 27.

[2] 张晓琴, 黄玉清. 基于禁忌搜索的启发式求解背包问题算法[J]. 电子科技大学学报, 2005, 34(3): 359 – 362.

[3] 胡欣, 汪红星, 康立山. 求解多维 0-1 背包问题的混合遗传算法[J]. 计算机工程与应用, 1999, (11): 31 – 33.

[4] HAN KH, KIM JH. Quantum - inspired evolutionary algorithm for a class of combinatorial optimization[J]. IEEE Transactions on Evolutionary Computation, 2002, 6(6): 580 – 593.

[5] HAN KH, KIM JH. Genetic quantum algorithm and its application to combinatorial optimization problems[A]. Proceeding of IEEE Conference on Evolutionary Computation[C]. Piscataway: IEEE Press, 2000. 1354 – 1360.

[6] HAN KH, KIM JH. On setting the parameters of quantum-inspired evolutionary algorithm for practical applications[A]. Proceeding Congr. Evolutionary Computation[C]. Canberra, Australia, 2003. 178 – 184.

[7] 熊焰, 陈欢欢, 苗付友, 等. 一种解决组合优化问题的量子遗传算法 QGA[J]. 电子学报, 2004, 32(11): 1855 – 1858.

[8] 李斌, 谭立湘, 邹谊, 等. 量子概率编码遗传算法及其应用[J]. 电子与信息学报, 2005, 27(5): 805 – 810.

[9] 李娟, 方平, 周明. 一种求解背包问题的混合遗传算法[J]. 南昌航空工业学院学报, 1998, (3): 31 – 35.