

一种楔波近似快速算法

黄仁泰

(东莞理工学院 计算机科学与技术系, 广东 东莞 523106)

(huangrt@dgut.edu.cn)

摘要:为了降低多边形区域上矩计算的复杂度和减少楔波近似的运算时间,提出了一种楔波近似快速新算法。采用任意局部退化模型代替局部恒定退化模型,对比实验结果表明:新算法与现有文献的算法相比,运算速度提高了 3 个数量级;适用于不同参数的模型,灵活性得到较大提高。

关键词:楔波;算法;图像近似;图像矩

中图分类号: TN751.1 **文献标志码:** A

Fast algorithm of wedgelets approximation

HUANG Ren-tai

(Department of Computer Science & Technology,

Dongguan University of Technology, Dongguan Guangdong 523106, China)

Abstract: To reduce the complexity of moment calculation and the running time of wedgelets approximation, a fast algorithm of wedgelets approximation was proposed by replacing arbitrary local regression model with locally constant regression model. The experiments show that the new algorithm can result in a speedup of $O(10^3)$ of implementation compared to the available implementation algorithms in literature. It can be applied to the model with different parameters and the flexibility has been improved.

Key words: wedgelets; algorithm; image approximation; image moment

自从 Donoho 创建楔波理论以来,有关楔波理论与应用的研究获得了迅速发展。其中楔波近似算法更是其中的热点之一。最具有开创性的工作是 Donoho 提出的楔波近似实现方法^[1],这是一种函数最小化的快速计算算法,采用了目前唯一公开的软件包 Beamlab 的一部分实现。但是该算法的前提是假设在任意楔形上能够实现恒定退化,而且恒定退化依赖于图像的零阶矩。文献[2]在 Donoho 模型的基础上进行了扩展,通过自仿射函数可以实现分段近似。但是,这些算法都存在限制条件多、计算量大、耗时长、适用范围小等缺陷^[3-6]。本文提出了一种函数最小化的快速计算算法实现楔波近似。本算法不仅用于分段不变函数模型,还可以用于其他退化模型。该算法能够计算建立在任意自适应局部退化函数基上的对比实验,是一种高效灵活的工具。

1 楔形与楔波近似

一幅图像 f 可以看作是有限矩形区域 $S \subset \mathbb{Z}^2$ 到实数空间 \mathbb{R} 的映射;对于每一个像素 $s \in f$, $f(s)$ 表示相应的灰度值。

1.1 楔形划分

若离散图像 $S = [1, \dots, N] \times [1, \dots, N]$, 其中 $N = 2^J$, $J = 1, 2, 3, \dots$, 则定义集合 S 的一个划分 P 为:

定义 1 $P = \{A_k\}_{k \in K}, A_k \subset S, \bigcup_{k \in K} A_k = S$; 而且 $A_i \cap A_j = \emptyset$, 当 $i \neq j$ 时。其中子集 $A_k \subset P$ 称为该划分的一个原子。

定义 2 二进方块划分集合 Δ 满足,

1) $P_0 = \{S\} \in \Delta$

2) 如果 $P \in \Delta, |A| > 1$, 那么 $P \setminus \{A\} \cup \{A_i\} \in \Delta$, 这里 A_i ,

$i = 1, \dots, 4$ 是把 A 等分为 4 的小块。

由于图像是二进方块,所以一个二进划分的所有原子也都是二进方块,其形式为:

$$[(k-1)2^i + 1, k2^i] \times [(l-1)2^i + 1, l2^i];$$

$$i \in \{1, \dots, J\}, k, l \in \{1, \dots, 2^{J-i}\}$$

离散楔形划分定义如下:

定义 3 设 $A \in S$ 为二进方块, L_θ^n 为线号 n 、方位角 θ 的直线,其中 $(n, \theta) \in \mathbb{Z}^2 \times [-\pi/4, 3\pi/4]$, $L_\theta^n \cap A \neq \emptyset$ 以及 $L_\theta^{n+1} \cap A \neq \emptyset$, 那么 A 的一个楔形划分就是把 A 分解为两个楔形子区域 $\{W_{n,\theta}^1(A), W_{n,\theta}^2(A)\}$ (分别称为下楔形和上楔形), 即:

$$W_{n,\theta}^1(A) = \bigcup_{k \leq n} L_\theta^k \cap A$$

$$W_{n,\theta}^2(A) = \bigcup_{k > n} L_\theta^k \cap A$$

可以看出一个楔形是一个最多 5 个顶点的凸多边形,实际上它有三种情况:五边形、四边形、三角形。前两种情况的一阶矩计算需要 6 个辅助函数值,三角形的一阶矩计算需要 4 个辅助函数值。

定义 4 一个二进楔形划分 W 是指:区域 S 的一个二进方块划分 $\{A_k\}_{k \in K}$ 的再细分,也可用一个楔形划分表示:

$$\{W_{n_k, \theta_k}^1(A_k), W_{n_k, \theta_k}^2(A_k)\}; \theta_k \in [-\pi/4, 3\pi/4]$$

1.2 楔波近似

这里感兴趣的是在一类二进楔形划分上图像 f 的分段不变近似问题。既要考虑分割的复杂度又要考虑近似的精确度,其中复杂度可以用该划分中原子的数量表示。

设 Γ 为 S 的二进楔波划分的集合, 对于 $\lambda \in \mathbf{R}$, 从 Γ 中选择一个划分 $\hat{W}_\lambda(f)$ 满足:

$$\hat{W}_\lambda \in \arg \min_{W \in \Gamma} \left\{ \|f - \hat{f}_W\|_2^2 + \lambda |W| \right\}$$

其中: $\hat{f}_W = \sum_{A \in W} \bar{f}_A \bar{f}_A = \frac{1}{|A|} \sum_{i \in A} f(i)$ 表示在原子 A 上等于 f 的平均值, 在其他区域为零的函数 (A 可以是一个纯楔形或者一个方块)。

$(\hat{W}_\lambda, \hat{f}_{\hat{W}_\lambda})$ 使 $(W, g) \mapsto \|f - g\|_2^2 + \lambda |W|$ 为最小, 其中 (W, g) 中的 g 在 W 上是分段常数。所选函数的一个特殊性质是: 其最小化问题可以分解成划分集上的最小化和每一分段上的局部最小化问题。 \hat{f}_W 实际上是 W 上的 $\|f - g\|_2^2$ 的经典最小平方近似问题。

2 算法实现

下面讨论对于给定的划分 Γ , 计算下式的最小化算法。

$$\hat{W}_\lambda \in \arg \min_{W \in \Gamma} \left\{ \|f - \hat{f}_W\|_2^2 + \lambda |W| \right\}$$

对于巨大的集合 Γ , 要找到在此集合上的最优划分需要非常巨大的计算量代价。通过采用二进划分的递归结构可以大大减少计算量。然而, 在二进楔波划分集上做最小化时, 需要在多边形区域上进行大量的矩运算。这里我们提出一种在楔波区域上高阶矩计算的新算法。

假设有有限角度集合 $\Theta \subset [-\pi/4, 3\pi/4]$, 那么条件 $\vartheta \in [-\pi/4, 3\pi/4]$ 就由条件 $\vartheta \in \Theta$ 取代。为了处理水平线条, 需要假设零度 $0 \in \Theta$ 。由于二进划分是通过把方块进一步分成四个小方块的连续划分实现的, 所以, 每一个二进划分 P 可以被唯一地映射到一个二叉树 T 。树 T 的每一个节点 N 与一个二进方块 $Q \subset S$ 相对应; N 的四个子节点分别与 Q 四分割产生的四个小方块相对应。 T 的每一个终端节点则与 P 中的一个方块对应, 以此类推。每一个二叉树可以通过对更细一层的二叉树的截取获得。可以通过把节点标记为终端节点的方法实现截取。

最小化分两步实现: 第一步, 对每一个二进方块进行楔形划分计算, 即对树中的每一个节点进行计算。第二步, 对于给定的参数 $\lambda \geq 0$, \hat{W}_λ 最小化计算可通过循环截取二叉树, 并采用第一步产生的最优楔形划分。这里需特别注意, 只有第二步才依赖于 λ ; 第二步的复杂度并不依赖于第一步中采用的角度的数量。

下面对实现第二步作详细叙述。

给出 $\lambda \geq 0$, 最优划分 \hat{W}_λ 有三种可能的情况:

1) $\hat{W}_\lambda = \{S\}$;

2) $\hat{W}_\lambda = \{W_1, W_2\}$ 对于存贮有根节点中的最优楔开 W_1, W_2 ;

3) $\hat{W}_\lambda = \cup_{i=1, \dots, 4} \hat{W}_\lambda^i$ 这里每一个是二进子块 Q_i 的最优楔形划分, Q_1, \dots, Q_4 是 S 四分割的结果。

由于最小化算法就是比较上述三种情况的最后得分。第一种情况的得分是局部近似误差与 λ 的和; 第二种情况得分是 $\hat{W}_\lambda^i (i = 1, \dots, 4)$ 得分之和; 第三种情况需要应用最小化算法的递归。

完整的更为精确的最小化算法描述如下:

1) 产生一个空树。用近似误差等于 ∞ 初始化每个节点。

2) 最优楔形划分的计算。

(a) 对于每一个 $\vartheta \in \Theta$, 计算辅助矩阵 \bar{W}_ϑ ;

(b) 对于每一个二进方块 Q 和每一个 n , 计算近似误差 ϵ 和由于沿直线 L_ϑ^n 对 Q 划分产生的相应的均值。如果计算出的近似误差小于对应节点 N 的存贮值, 那么就存贮节点 N 上的均值、误差、角度 ϑ 和直线号码 n 。

3) \hat{W}_λ 和相应得分的计算。可以采用上述步骤的直接递归方法。对于自下而上的算法, 可参考文献[1]。在任何情况下, 算法都会取决于第二步产生的所有二进方块的最优楔形划分的有效性。

3 实验结果及结论

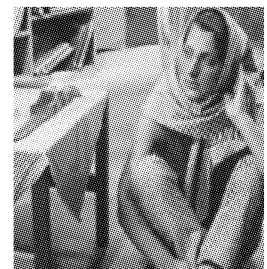
采用模型 $M = \Phi_{\theta_i, a_i} \cup \Phi_1$, 这里 $\Phi_{\theta, a}$ 是局部回归集合, 由下述函数定义:

$$\Phi_{\theta, a}(z) = (1, \cos(\langle z, V_\theta \rangle), \sin(\langle z, V_\theta \rangle))$$

把该模型应用于纹理丰富的标准测试图 Barbara。参数选择如下 $(\theta, a) \in \{-\pi/4, 0, \pi/4, \pi/2\} \times \{1, 1/2, 1/4\}$ 。实验结果见图 1 ~ 3。



(a) 线性模型14 682个系数, PSNR=25.96 dB

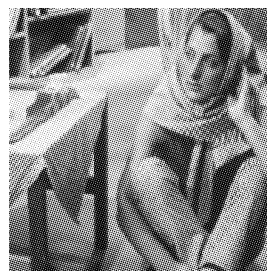


(b) 线性模型与通用正弦模型集合 14 484个系数, PSNR=28.97 dB

图1 Barbara, 256 × 256 无楔形二叉树

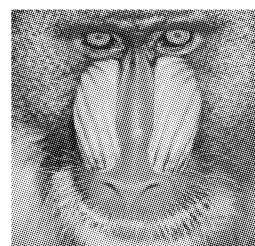


(a) 线性模型14 730个系数, PSNR=27.79 dB

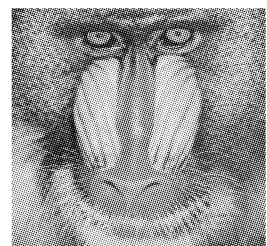


(b) 线性模型与通用正弦模型集合 14 511个系数, PSNR=33.29 dB

图2 Barbara, 256 × 256 无楔形二叉树



(a) 线性模型27 150个系数, PSNR=24.44 dB



(b) 线性模型与通用正弦模型集合 26 574个系数, PSNR=27.44 dB

图3 Babara, 512 × 512, 8个可能角度的模型

我们对比了简单的线性模型在许多近似参数情况下的结果。从图 4 中可以看出, 在不同的模型下, 无论是信噪比还是视觉质量, 其近似结果有很大区别。

本文采用 Beamlab 软件包, 在奔腾 2.8 GHz 计算机上进行模拟。在不同角度的楔形模型下, 其近似运行时间见表 1。

表 1 本文算法与 BeamLab 所用算法运行时间对比

图像大小	BeamLab	等效二进楔形	有 1 024 个角度的二进楔形	有 180 个角度的二进楔形	有 4 个角度的二进楔形	二进方块
16 × 16	6.72s	< 0.02s	1s	0.2s	< 0.01s	< 0.01s
32 × 32	45.34s	0.05s	2s	0.3s	< 0.01s	< 0.01s
64 × 64	330.41s ≈ 5.5min	0.2s	8s	1.6s	0.04s	< 0.01s
128 × 128	2 676.3s ≈ 4.6min	1.2s	37s	6s	0.2s	0.04s
256 × 256	27 918s ≈ 7h45min	8s	140s	24s	1s	0.5s
512 × 512	> 12h	59s	722s	120s	10s	6s

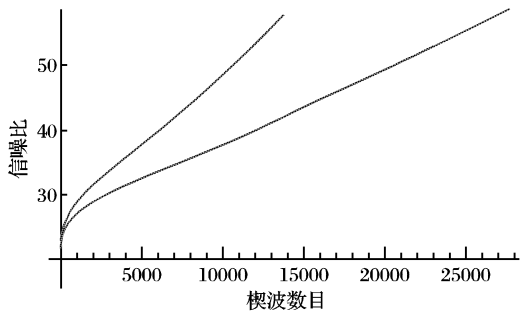


图 4 信噪比与楔波数目的关系 (Barbara)

本文提出了一种多边形区域上矩计算和楔波近似的高效快速算法。该算法能够计算建立在任意自适应局部退化函数基上的对比实验,是一种高效灵活的工具。其中最有用的特性是对于不同的 λ 能够快速计算出结果;在比较适中的时间内计算出率失真曲线;还能够针对不同的参数模型进行仿真实验。

(上接第 2151 页)

4 试验结果

表 1 Fast inter 和 UMHexagonS 的比较

格式	序列	$\Delta t/\%$	$\Delta PSNR/dB$	$\Delta kbits/\%$
QCIF	Foreman	-60.06	-0.08	+2.89
	Silent	-71.44	-0.06	+5.45
	News	-55.98	-0.11	+3.53
	Coastguard	-59.97	-0.02	+1.63
	Container	-46.87	-0.02	+1.65
CIF	Mobile	-31.20	-0.07	+0.32
	Pairs	-42.69	-0.08	+1.55
	Tempete	-57.50	-0.10	+3.96
	Highway	-75.46	-0.11	+2.32
	Sign_irene	-80.62	-0.13	+4.88

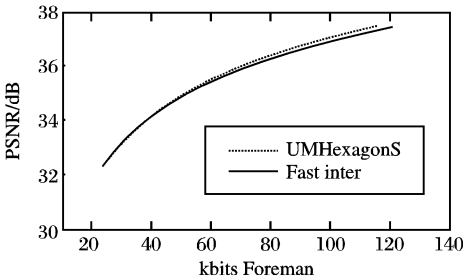


图 2 Foreman RD 曲线

该算法应用于 H. 264/AVC JM8. 6^[7] 参考软件中。在 IPPP, baseline 档次下, 参考帧为 1, 分别对 5 个 QCIF 和 5 个 CIF 150 帧测试序列进行试验, 就编码时间、比特率、PSNR 指标, 对 UMHexagonS 算法和在其基础之上的改进的 Fast inter 算法进行了比较。如表 1 所示: 当 $QP = 28, \Delta t$ 为 Fast inter

参考文献:

[1] WEDGELETS D L. Nearly minimax estimation of edges [J]. Annals of Statistics, 1999, 27 (3): 859 - 897.

[2] WILLETT R M, NOWAK R D. Platelets: A multiscale approach for recovering edges and surfaces in photon-limited medical imaging [J]. IEEE Transactions on Medical Imaging, 2003, 22(4): 332 - 350.

[3] YANG L, ALBRECHTSEN F. Fast and exact computation of Cartesian geometric moments using discrete Green's theorem [J]. Pattern Recognition, 1996, 29(7): 1061 - 1073.

[4] WAKIN M B. Image compression using multiscale geometric edge models [D]. Houston: Rice University, 2002.

[5] ROMBERG J K, WAKIN M B, BARANIUK R G. Multiscale wedgelet image analysis: fast decompositions and modeling [C]// IEEE ICIP 02. [S. l.]: IEEE Press, 2002.

[6] WAKIN M B, ROMBERG J K, CHOI H, et al. Image compression using an efficient edge cartoon + texture model [C]// IEEE Proceedings of the Data Compression Conference (DCC '02). [s. n.]: IEEE Press, 2002: 43 - 52.

较 UMHexagonS 节省的编码时间; $\Delta PSNR(dB)$ 为 Fast inter 较 UMHexagonS 下降的峰值信噪比, $\Delta kbits$ 为 Fast inter 较 UMHexagonS 提高的比特率。试验结果表明, 改进的帧间模式判别算法, 平均编码时间仅为 UMHexagonS 的 42. 52%, 平均峰值信噪比下降仅为 0. 076 dB, 平均比特率增加仅为 2. 818%。图 2 表示 Foreman 视频序列两种算法的 RD 曲线, 从中可以看出本算法编码时间的减少是以峰值信噪比 (PSNR) 的下降, 单帧比特数的增加为代价的, 但基本上保证图像率失真和码率性能。

参考文献:

[1] ITU-T Rec. H. 264/ISO/IEC14496-10 AVC (Doc JVT - G050), Draft ITU-T recommendation and final draft international standard of joint video specifications [S].

[2] CHEN Z B, XU J F, HE Y. Fast motion estimation for JVT [C]// JVT-G016, Joint Video Team (JVT) of ISO/IEC MPEG & ITU-T VCEG (ISO/IEC JTC1/SC29/WG11 and ITU-T SG16 Q. 6). Pat-taya: [s. n.], 2003

[3] RICHARDSON I. H. 264 and MPEG-4 video compression [M]. London: John Wiley & Sons, 2003.

[4] LIM KP, SULLIVAN G, WIEGAND T. Text description of joint model reference encoding methods and decoding concealment meth-ods [C]// JVT-N046, JVT of ISO/IEC MPEG and ITU-T VCEG. Hong Kong: [s. n.], 2005.

[5] JING X, CHAU L P. Fast approach for H. 264 Inter mode decision [J]. Electronics Letters, 2004, 40(17): 1051 - 1052.

[6] YU A C. Efficient block - size selection algorithm for inter - frame coding in H. 264 /MPEG AVC [C]//2004 IEEE international Confer-ence on Acoustics, Speech, and Signal Processing. [S. l.]: IEEE Press, 2004: 169 - 172.

[7] SCHÄFER K. H. 264/AVC reference software [EB/OL]. [2007 -02 - 10.] http://iphome.hhi.de/suehring/tml/download/old_jm/.