文章编号:1001 - 9081(2008)07 - 1665 - 03

基于 T 模剩余蕴涵算子的直觉模糊粗糙集

阎子勤[1],姚建刚[2]
(1. 长沙理工大学 电气与信息工程学院, 长沙 410076; 2. 湖南大学 电气与信息工程学院, 长沙 410012)
(yanziqin@126.com)

摘　要:构造并系统研究了直觉模糊 T 模的剩余蕴涵。在此基础上,推导出了直觉模糊粗糙集的一种构造模型,证明了 Pawlak 粗糙集、直觉模糊集、模糊粗糙集、粗糙模糊集及模糊 T 粗糙集都是直觉模糊粗糙集的特殊情形。最后给出并证明了直觉模糊粗糙集的一些性质。

关键词:直觉模糊;粗糙集;直觉模糊粗糙集;剩余蕴涵
中图分类号: TP301.6　　**文献标志码**:A

Intuitionistic fuzzy rough sets based on residuation implication of T-norms

YAN Zi-qin[1], YAO Jian-gang[2]
(1. *School of Electrical and Information Engineering, Changsha University of Science and Technology, Changsha Hunan, 410076, China*;
2. *School of Electrical and Information Engineering, Hunan University, Changsha Hunan, 410012, China*)

Abstract: This paper researched and constructed residuation implication operator of intuitionistic fuzzy T-norms. Based on this, the paper deducted the intuitionistic fuzzy rough sets model, and proved that the Pawlak rough sets, intuitionistic fuzzy sets, fuzzy rough sets, rough fuzzy sets and fuzzy T-norms rough sets were special cases of intuitionistic fuzzy rough sets. At last, some properties of intuitionistic fuzzy sets were presented and proved.

Key words: intuitionistic fuzzy; rough sets; intuitionistic fuzzy rough sets; residuaation implication

0　引言

粗糙集概念作为处理数据分析中不确定性的一种数学方法,是由经典集合基于论域 U 上的等价关系而得出的近似,首先是由 Pawlak 提出的[1]。该理论已经成功地应用于机器学习、模式识别、决策分析、专家系统和数据挖掘,是一种有效和通用的数据处理方法。Pawlak 粗糙集模型对论域 U 进行硬划分,具有"非此即彼"的"分明概念"。Dubois 提出模糊 T 粗糙集[2],该模型由模糊集合基于论域 U 上的模糊 T 相似关系而得出的近似,表达了"亦此亦彼"的"模糊概念"。和 Dubois 的构造性方法不同,Moris 研究了模糊粗糙的数学特征[3],提出了一组公理。Radziksowska 给出了更一般的方法来刻画模糊粗糙集[4],他们定义了一簇关于模糊相似关系的模糊粗糙集,每一类模糊粗糙集是由一个蕴涵算子和一个范数决定。模糊粗糙集建立了概念对于各类知识的不确定性描述,能更客观地反映现实世界,从而成为粗糙集理论研究的热点[5]。

直觉模糊集是对 Zadeh 模糊集理论的一种扩充和发展[6],首先由 Atanassov 提出[7]。直觉模糊集在模糊集上增加一个非隶属函数,描述了"非此非彼"的"模糊概念",更加细腻地刻画了客观世界的模糊性。此后,Bubeascu 提出了直觉模糊关系的思想[8],Bustince 给出直觉模糊关系与关系合成的定义[9],并进一步给出了一种构造直觉模糊关系的方法[10]。随着直觉模糊理论的完善和发展,Chris Corneli 等人在直觉模糊等价关系的基础上,提出直觉模糊粗糙集模型[11],具有重要理论研究价值。直觉模糊 T 模的剩余蕴涵是直觉模糊推理的基础,为直觉模糊粗糙集在不确定信息系统下推理和决策中的应用,本文提出一种基于 T 模剩余蕴含的直觉模糊粗糙集。

1　直觉模糊

在给出 T 模剩余算子前先给出 Atanassov 提出的直觉模糊集及其相关描述。

定义 1　设 X 是给定的一个论域,则 U 上的一个直觉模糊集 A 定义为:

$$A = \{\langle x,\mu_A(x),\nu_A(x)\rangle \mid x \in U\} \tag{1}$$

其中:$\mu_A(x):U \to [0,1]$ 和 $\nu_A(x):U \to [0,1]$ 分别表示 A 的隶属度和非隶属度,且对所有 $x \in U$,有 $0 \leqslant \mu_A(x) + \nu_A(x) \leqslant 1$。

显然,一般模糊集对应地可记为:

$$A = \{\langle x,\mu_A(x),1-\mu_A(x)\rangle \mid x \in U\} \tag{2}$$

此时直觉模糊集退化为一般模糊集。对于 U 上直觉模糊集,称 $\pi_A = 1 - \mu_A(x) - v_A(x)$ 为 A 中 x 的直觉指数,它是 x 对 A 的一种不确定程度的一种度量。

Bubeascu 进一步提出了直觉模糊关系的思想,在此基础上 Bustince 给出直觉模糊关系与关系合成的定义:

定义 2　设 A 和 B 是给定论域 U 上的直觉模糊集,则有:

1) $A \cap B = \{\langle x,\mu_A(x) \wedge \mu_B(x),\nu_A(x) \vee \nu_B(x)\rangle \mid \forall x \in U\}$

2) $A \cup B = \{\langle x,\mu_A(x) \vee \mu_B(x),\nu_A(x) \wedge \nu_B(x)\rangle \mid \forall x \in U\}$

3) $\bar{A} = A^C = \{\langle x,\nu_A(x),\mu_A(x)\rangle \mid x \in U\rangle\}$

4) $A \subseteq B \Leftrightarrow \forall x \in U, \mu_A(x) \leqslant \mu_B(x), \nu_A(x) \geqslant \nu_B(x)$

为方便讨论,用 $X = (x_1,x_2)$ 表示论域 U 直觉模糊 $A = \langle x,\mu_A(x),\nu_A(x)\rangle$,并记直觉模糊集为 L^* 集。则有 L^* 如下定义。

定义 3　令 $L^* = \{(x_1,x_2) \mid x_1 + x_2 \leqslant 1, (x_1,x_2) \in [0,$

收稿日期:2008 - 01 - 02;**修回日期**:2008 - 03 - 29。　**基金项目**:湖南省自然科学基金资助项目(06JJ20011)。
作者简介:阎子勤(1952 -),男,湖南长沙人,副教授,硕士,主要研究方向:智能信息处理;　姚建刚(1952 -),男,湖南长沙人,教授,博士生导师,主要研究方向:智能控制。

$1]^2\}$,且有:

$(x_1,x_2) \leqslant_{L^*} (y_1,y_2) \Leftrightarrow x_1 \leqslant y_1 \wedge x_2 \geqslant y_2, \forall (x_1,x_2), (y_1,y_2) \in L^*$,则称$(L^*, \leqslant_{L^*})$为完备格,记其边界为:

$1_{L^*} = (1,0) \quad 0_{L^*} = (0,1)$

显然,对于论域 U 上的直觉模糊集 A 等价为:

$A: U \to L^*: x \mapsto (\mu_A(x), v_A(x)); \forall x \in U$。

2 T 模剩余蕴涵算子

文献[12]系统地研究了 T 模剩余蕴含。在此基础上,本文给出了直觉模糊剩余蕴含的定义,构造并给出了一种计算方式。

定义 4 记 $I = [0,1]$,二元算子 $T: I \times I = I^2$,若满足:

1) 两极律 $T(a,1) = a; a \in I$。

2) 交换律 $T(a,b) = T(b,a); a,b \in I$。

3) 结合律 $T(T(a,b),c) = T(a,T(b,c)); a,b,c \in I$。

4) 单调律 $a \leqslant c, b \leqslant d \Rightarrow T(a,b) \leqslant T(c,d); a,b,c,d \in I$。

则称算子 T 为 I 上的 T 模,若 $T(a,0) = a, a \in I$,则称算子 T 为 S 模。T 模和 S 模是一对对偶算子,T 模和 S 模统称三角模或 T 模,有如下关系:

$$S(a,b) = 1 - T(1-a, 1-b); a,b \in I \tag{3}$$

定义 5 设 T 是 $I = [0,1]$上的下半连续三角模,定义在 I 上的二元算子 $\theta_T: I \times I \to I$ 有:设 $a,b \in I$

$$\theta_T(a,b) = \sup\{c \in I \mid T(a,c) \leqslant b\} \tag{4}$$

称 θ_T 为 T 模的剩余蕴涵算子。

定义 6 设 θ 是 T 模的剩余蕴涵算子,则 θ 满足下列主要性质,设 $a,b,c \in I$

性质 1 $\theta(a,1) = 1, \theta(1,a) = a$

性质 2 $a \leqslant b \Rightarrow \theta(c,a) \leqslant \theta(c,b)$

性质 3 $a \leqslant b \Rightarrow \theta(a,c) \geqslant \theta(b,c)$

性质 4 $\theta(a \vee b, c) = \theta(a,c) \vee \theta(b,c)$

性质 5 $\theta(a, b \wedge c) = \theta(a,b) \wedge \theta(a,c)$

性质 6 $\theta(T(a,b),c) = \theta(a, \theta(b,c))$

定义 7[13] 定义 L^*(直觉模糊集)上的二元算子 Φ 和 $\Psi: L^* = L^* \times L^*$。$\Phi(x,y) = (T(x_1,y_1), S(x_2,y_2)), \Psi(x,y) = (S(x_1,y_1), T(x_2,y_2))$,其中 $x,y \in L^*$。容易验证 Φ 和 Ψ 满足两极律、交换律、结合律及单调律,所以分别称 Φ 和 Ψ 为 L^*(直觉模糊集)上的 T 模和 S 模,T 模和 S 模是一对对偶算子,T 模和 S 模统称直觉模糊三角模或直觉模糊 T 模。

下面以两极律 $\Phi(1_{L^*}, y) = y$ 和 $\Psi(0_{L^*}, y) = y$ 为例给出证明过程。

证明 令 $y = (y_1,y_2)$ 由 $1_{L^*} = (1,0)$ 有

$$\Phi(1_{L^*}, y) = \Phi((1,0),(y_1,y_2)) = (T(1,y_1), S(0,y_2)) = (y_1,y_2) = y$$

即 $\Phi(1_{L^*}, y) = y$。 证毕。

同理有 $\Psi(0_{L^*}, y) = y$。

定义 8 设 Φ 是 L^*(直觉模糊集)上的下半连续 T 模,定义二元算子:

$$\Theta_\Phi(x,y) = \sup\{z \in L^* \mid \Phi(x,z) \leqslant_{L^*} y, x,y \in L^*\}$$

则称 Θ_Φ 为 Φ 上的剩余蕴涵算子。

定理 1 设 Φ 是 L^* 上的 T 模,θ 为 T 模的剩余蕴涵算子,则 Φ 的剩余蕴涵算子 Θ 可用 θ 表示为:

$$\Theta(x,y) = (\theta(x_1,y_1) \wedge \theta(1-x_2, 1-y_2), 1 - \theta(1-x_2, 1-y_2)); x,y \in L^* \tag{5}$$

证明

$\Theta(x,y) = \sup\{z \in L^* \mid \Phi(x,z) \leqslant_{L^*} y, x,y \in L^*\} = \sup\{z \in L^* \mid (T(x_1,z_1), 1 - T(1-x_2, 1-z_2)) \leqslant_{L^*} (y_1,y_2)\} = \sup\{z \in L^* \mid (T(x_1,z_1) \leqslant y_1, T(1-x_2, 1-z_2) \leqslant 1-y_2)\}$

又由 $z \in L^*$,可知 $z_1 + z_2 \leqslant 1$,有 z 的上界等效于 z_1 的上界和 z_2 的下界,并为 z_1 添加约束 $z_1 \leqslant 1 - z_2$,从而有

$\Theta(x,y) = (\sup\{z_1 \in I \mid ((T(x_1,z_1) \leqslant y_1) \wedge (T(1-x_2,z_1) \leqslant 1-y_2))\}, \inf\{z_2 \in I \mid (T(1-x_2, 1-z_2) \leqslant 1-y_2)\}) = (\theta(x_1,y_1) \wedge \theta(1-x_2, 1-y_2), 1 - \theta(1-x_2, 1-y_2))$ 证毕。

定理 2 设 Φ 是 L^*(直觉模糊集)上的下半连续 T 模,则 Φ 的剩余蕴涵算子 Θ 有如下性质:设 $x,y,z \in L^*$,则

性质 1 $\Theta(1_{L^*}, x) = x, \Theta(x, 1_{L^*}) = 1_{L^*}$

性质 2 $x \leqslant_{L^*} y \Rightarrow \Theta(z,x) \leqslant_{L^*} \Theta(z,y)$

性质 3 $x \leqslant_{L^*} y \Rightarrow \Theta(y,z) \leqslant_{L^*} \Theta(x,z)$

性质 4 $\Theta(x, y \wedge z) = \Theta(x,y) \wedge \Theta(x,z)$

性质 5 $\Theta(\Phi(x,y),z) = \Theta(x, \Theta(y,z))$

由定理 1 和 T 模的剩余蕴涵算子 θ 的性质容易证明。下面给出性质 1 和性质 5 的证明过程。

证明

1) 由定义有:

$\Theta(1_{L^*}, x) = \sup\{z \in L^* \mid \Phi(1_{L^*}, z) \leqslant_{L^*} x\} = \sup\{z \in L^* \mid z \leqslant_{L^*} x\} = x$ 证毕。

同理有 $\Theta(x, 1_{L^*}) = 1_{L^*}$。

2) $\Theta(\Phi(x,y),z) = \sup\{u \in L^* \times \mid \Phi(\Phi(x,y),u) \leqslant_{L^*} z\}$,由 Φ 的结合律有:

$\Theta(\Phi(x,y),z) = \sup\{u \in L^* \mid \Phi(x,\Phi(y,u)) \leqslant_{L^*} z\} = \sup\{u \in L^* * \mid \Phi(y,u) \leqslant_{L^*} \sup\{v \in L^* \mid \Phi(x,v) \leqslant_{L^*} z\}\} = \sup\{u \in L^* \times \mid \Phi(y,u) \leqslant_{L^*} \Theta(x,z)\} = \Theta(y, \Theta(x,z))$ 证毕。

定理 1 和定理 2 将直觉模糊 T 模的剩余蕴涵和 T 模的剩余蕴涵联系起来,并给出了完备格 L^* 上的相关运算。这不仅为直觉模糊推理提供了一个数学模型,而且为直觉模糊粗糙集给出了有力的数学构造和刻画工具。

3 直觉模糊粗糙集

在构造直觉模糊粗糙集之前,先给出模糊 T 粗糙集的定义。

定义 9[12] 设 R 是有限论域 U 上的模糊相似关系,称 (U,R) 是模糊 T 近似空间,对任意 $X \in U$,X 关于 (U,R) 的下近似 $\underline{R_F}X$ 和上近似 $\overline{R_F}X$ 是定义在 T 上的一对模糊集,其隶属度函数为:

$$\underline{R_F}X(x) = \inf_{u \in U} \theta(R(u,x), X(x)), x \in U \quad \overline{R_F}X(x) = \sup_{u \in U} T(R(u,x), X(x)); x \in U \tag{6}$$

则称 $(\underline{R_F}X, \overline{R_F}X)$ 为模糊 T 粗糙,$\underline{R_F}X$ 和 $\overline{R_F}X$ 分别称为模糊 T 下近似算子和模糊 T 上近似算子。依据剩余蕴涵算子 θ 构造模糊 T 粗糙,同样可以直觉模糊剩余蕴涵算子 Θ 构造直觉模糊粗糙集。

定义 10 设 R 是有限论域 U 上的直觉模糊相似关系,称 (U,R) 是直觉模糊近似空间,对任意 $X \in U$,X 关于 (U,R) 的下近似 $\underline{R_{IF}}X$ 和上近似 $\overline{R_{IF}}X$ 是定义在 T 上的一对直觉模糊集,其隶属度函数定义为

$$\begin{cases} \underline{R_{IF}}X(x) = \inf_{u \in U} \Theta(R(u,x), X(x)) \\ \overline{R_{IF}}X(x) = \sup_{u \in U} \Phi(R(u,x), X(x)) \end{cases} \tag{7}$$

则称$(\underline{R_{IF}}X,\overline{R_{IF}}X)$为直觉模糊粗糙，$\underline{R_{IF}}X$和$\overline{R_{IF}}X$分别称为直觉模糊下近似算子和直觉模糊上近似算子。

由定义 9 和定义 10 可知，当直觉模糊相似关系 Φ 退化为模糊 T 相似关系时，直觉模糊粗糙集的上、下近似就是将模糊 T 粗糙集的上、下近似的普通模糊集转化为直觉模糊集合，因此模糊 T 粗糙集是直觉模糊粗糙集的特殊情形。另一方面，文献[14]从格结构的角度给出了直觉模糊集（Intuitionistic Fuzzy Sets）、模糊粗糙集（Fuzzy Rough Sets）、粗糙模糊集（Rough Fuzzy Sets）都是 L^*（完备格）模糊集的论证。文献[12]通过 T 模剩余蕴涵算子，证明了 Pawlak 粗糙集、粗糙模糊集都是模糊 T 粗糙集。因此 Pawlak 粗糙集、直觉模糊集、模糊粗糙集、粗糙模糊集及模糊 T 粗糙集都是直觉模糊粗糙集的特殊情形。

为进一步说明和刻画直觉模糊粗糙集，下面给出并证明直觉模糊下近似算子$\underline{R_{IF}}X$和直觉模糊上近似算子$\overline{R_{IF}}X$的几个性质。

性质 1 $\underline{R_{IF}}X \subseteq X \subseteq \overline{R_{IF}}X$

性质 2 若 $R1 \subseteq R2$，则$\underline{R1_{IF}}X \supseteq \underline{R2_{IF}}X$，$\overline{R1_{IF}}X \subseteq \overline{R2_{IF}}X$

性质 3 $\underline{R_{IF}}(X \cap Y) = \underline{R_{IF}}X \cap \underline{R_{IF}}Y$

性质 4 $\overline{R_{IF}}(X \cup Y) = \overline{R_{IF}}X \cup \overline{R_{IF}}Y$

性质 5 $\underline{R_{IF}}(\underline{R_{IF}}X) = \underline{R_{IF}}X$

性质 6 $\overline{R_{IF}}(\overline{R_{IF}}X) = \overline{R_{IF}}X$

证明

1）由定义有：

$\because \underline{R_{IF}}X(x) = \inf\limits_{u\in U}\Theta(R(u,x),X(x)) \leqslant_{L^*}\Theta(R(\chi,x),X(x)) = \Theta(1_{L^*},X(x)) = X(x)$

$\therefore \underline{R_{IF}}X(x) \subseteq X(x)$

由 Φ 两极律有：

$\because \underline{R_{IF}}X(x) = \sup\limits_{u\in U}\Phi(R(u,x),X(x))$

$\therefore \Phi(R(x,x),X(x)) \leqslant_{L^*} \sup\limits_{u\in U}\Phi(R(u,x),X(x))$ 又 $\Phi(R(x,x),X(x)) = \Phi(1_{L^*},X(x)) = X(x)$

$\therefore \overline{R_{IF}}X(x) \leqslant_{L^*} X(x)$

$\therefore X(x) \subseteq \overline{R_{IF}}X(x)$ 证毕。

2）$\because R1 \subseteq R2$

$\therefore R1(u,x) \leqslant_{L^*} R2(u,x)$，由定理 2 性质 3 有 $\Theta(R1(u,x),X(x)) \leqslant_{L^*} \Theta(R2(u,x),X(x))$

$\therefore \underline{R1_{IF}}X(\chi) \subseteq \underline{R2_{IF}}X(\chi)$ 由 Φ 单调律有

$\Phi(R1(u,x),X(x)) \leqslant_{L^*} \Phi(R2(u,x),X(x))$

$\therefore \overline{R1_{IF}}X(\chi) \subseteq \overline{R2_{IF}}X(\chi)$ 证毕。

3）$\underline{R_{IF}}(X \cap Y) = \inf\limits_{u\in U}\Theta(R(u,x),X(x) \cap Y(x))$

由定理 2 性质 4 有：

$\underline{R_{IF}}(X \cap Y) = \inf\limits_{u\in U}(\Theta(R(u,x),X(x)) \wedge \Theta(R(u,x),Y(x))) = \inf\limits_{u\in U}\Theta(R(u,x),X(x)) \cap \inf\limits_{u\in U}\Theta(R(u,x),Y(x)) = \underline{R_{IF}}X \cap \underline{R_{IF}}Y$

证毕。

4）$\overline{R_{IF}}(X \cup Y) = \sup\limits_{u\in U}\Phi(R(u,x),X(x) \cup Y(x))$

由定理 2 性质 4 有：

$\overline{R_{IF}}(X \cup Y) = \sup\limits_{u\in U}(\Phi(R(u,x),X(x)) \vee \Phi(R(u,x),Y(x))) = \sup\limits_{u\in U}\Phi(R(u,x),X(x)) \cup \sup\limits_{u\in U}\Phi(R(u,x),Y(x)) = \overline{R_{IF}}X \cup \overline{R_{IF}}Y$

证毕。

5）$\underline{R_{IF}}(\underline{R_{IF}}X) = \inf\limits_{u\in U}\Theta(R(u,v),\inf\limits_{v\in U}\Theta(R(v,x),X(x)))$

由定理 2 性质 4 有：

$\underline{R_{IF}}(\underline{R_{IF}}X) = \inf\limits_{u,v\in U}\Theta(R(u,v),\Theta(R(v,x),X(x)))$

又由定理 2 性质 5 有：

$\underline{R_{IF}}(\underline{R_{IF}}X) = \inf\limits_{u,v\in U}\Theta(\Phi(R(u,v),R(v,x)),X(x))$

又由关系的传递性有：

$\underline{R_{IF}}(\underline{R_{IF}}X) = \inf\limits_{u\in U}\Theta(\Phi(R(u,x)),X(x)) = \underline{R_{IF}}X$ 证毕。

6）$\overline{R_{IF}}(\overline{R_{IF}}X) = \sup\limits_{u\in U}\Phi(R(u,v),\sup\limits_{v\in U}\Phi(R(v,x),X(x)))$

$\overline{R_{IF}}(\overline{R_{IF}}X) = \sup\limits_{u,v\in U}\Phi(R(u,v),\Phi(R(v,x),X(x)))$

$\overline{R_{IF}}(\overline{R_{IF}}X) = \sup\limits_{u,v\in U}\Phi(\Phi(R(u,v),R(v,x)),X(x))$

由关系的传递性有：

$\overline{R_{IF}}(\overline{R_{IF}}X) = \sup\limits_{u\in U}\Phi(R(u,x),X(x)) = \overline{R_{IF}}X$ 证毕。

这些性质为直觉模糊粗糙集的应用提供了数学工具支持，具有重要的价值。

4 结语

本文推导并建立了模糊 T 模剩余蕴涵和直觉模糊剩余蕴涵的严格数学关系，这对直觉模糊在不确定信息系统下推理和决策具有重要的应用价值。在此基础上，构造了一种统一的不确定性数据集合模型——直觉模糊粗糙集模型。这为细腻地描述和处理一般的不确定性数据提供了理论依据，使得不确定性理论的更广泛应用拥有了更好的工程数学基础。

参考文献：

[1] PAWLAK Z. Rough sets[J]. International Journal of Computer and Information Sciences, 1982, 11(5): 341－356.

[2] DUBOIS D, PRADE H. Rough sets and fuzzy rough sets[J]. International Journal of General Systems, 1990, 17(2/3): 191－209.

[3] MORSI N N, YAKOUT M M. Axiomatics for fuzzy rough set[J]. Fuzzy Sets and Systems, 1998, 100(1/3): 327－342.

[4] RADZIKOWSKA A M, KERRE E E. Acomparative study of fuzzy rough sets[J]. Fuzzy Sets and Systems, 2002, 126(2): 137－155.

[5] 黄金杰，武俊峰，蔡云泽. 模糊粗糙数据模型：一种数据分析的新方法[J]. 计算机学报，2005, 28(11): 1866－1874.

[6] ATANASSOV K. Intuitionistic fuzzy sets[J]. Fuzzy Sets and Systems, 1986, 20(1): 87－96.

[7] ZADEH L A. Fuzzy sets[J]. Information and Control, 1965(8): 338－385.

[8] BUBAESCU T. Some observations on intuitionistic fuzzy Relations[J]. Itinerat Seminar on Functional Equations. Cluj-Napoca, 1989: 111－118.

[9] BUSTINCE H, BURILLO P. Structures on intuitionistic fuzzy realtions[J]. Fuzzy Sets and Systems, 1996, 78(3): 293－303.

[10] BUSTINCE H. Construction of intuitionistic fuzzy relation with predetermined properties[J]. Fhzzy Sets and Systems, 2000, 109(3): 379－403.

[11] CORNELIS C, de COCK M, EIKERRE E. Intuitionistic fuzzy rough sets: At the crossroads of imperfect Knowledge[J]. Expert Systems, 2003, 20(5): 260－270.

[12] 张文修，吴伟志，梁吉业，等. 粗糙集理论与方法[M]. 北京：科学出版社，2001.

[13] DESCHRIJVER G, CORNELIS C, KERRE E E. On the representation of intuitionistic fuzzy t-norms and t-conorms[J]. IEEE TRANSACTIONS ON FUZZY SYSTEMS, 2004, 12(1): 45－61.

[14] ZHANG CHENG-YI, FU HAI-YAN. Similarity measures on three kinds of fuzzy sets[J]. Pattern Recognition Letters, 2006, 27(12): 1307－1317.