文章编号:1001 - 9081(2008)06 - 1555 - 04

折线模糊神经网络对模糊函数的通用逼近

何春梅[1],叶有培[1],徐蔚鸿[2]

(1. 南京理工大学 计算机科学与技术学院,南京 210094; 2. 长沙理工大学 计算机与通信工程学院,长沙 410077)

(xiaoxiao_he8@163.com)

摘　要:基于折线模糊数间的模糊算术以及一个新的扩展原理建立了一种新的模糊神经网络模型,证明了当输入为负模糊数时,相应的前向三层折线模糊网络可以作为连续模糊函数的通用逼近器,并给出了此时连续模糊函数所需满足的等价条件,最后给出了一个仿真实例。

关键词:折线模糊数;模糊神经网络;通用逼近器;模糊算术

中图分类号: TP183　　**文献标志码**:A

Universal approximation of fuzzy functions by polygonal fuzzy neural networks

HE Chun-mei[1], YE You-pei[1], XU Wei-hong[2]

(1. *College of Computer Science and Technology, Nanjing University of Science and Technology, Nanjing Jiangsu* 210094, *China*;
2. *College of Computer and Communication Engineering, Changsha University of Science and Technology, Changsha Hunan* 410077, *China*)

Abstract: A new fuzzy neural network model was presented based on the fuzzy arithmetic of polygonal fuzzy numbers and a new extension principle. When the inputs are negative, the relevant feed-forward three-layer polygonal fuzzy neural networks were proved to be universal approximators of continuous fuzzy functions. The equivalent condition under which the fuzzy function universal approximated by the polygonal FNN should be satisfied was given. A simulation example was introduced in the end.

Key words: polygonal fuzzy numbers; Fuzzy Neural Network (FNN); universal approximator; fuzzy arithmetic

0　引言

具有一个隐含层的前向神经网络是一种通用逼近器[1-2],相关的研究成果在实际中得到了广泛应用。一个基本的问题是如何研究模糊神经网络对模糊函数的逼近性能。文献[3]率先提出了上述问题,并证明基于Zadeh扩展原理与模糊算术的正则模糊神经网络对于连续模糊函数不具有普遍近似性。文献[4-6]对正则模糊神经网络的泛逼近性进行了系统研究,但是正则模糊神经网络泛逼近性的等价条件较复杂,能否减弱或者简化模糊函数簇所满足的等价条件?为此文献[7]提出了一种折线模糊神经网络,并限制输入为正,分析了该网络对连续模糊函数的泛逼近性。本文在上述成果的基础上,作了更深入的研究。

1　预备知识

设$\mathbf{N}$为自然数,$\mathbf{R}$为实数集,$F_{oc}(\mathbf{R})$为一类有界连续模糊数。本文假设$q=\{1,2\}$,$i=\{1,2,\cdots,n\}$。对$\tilde{A}\in F_{oc}(\mathbf{R})$,本文用$\tilde{A}_0$表示支撑$supp(\tilde{A})$。给定有界闭区间$[a,b]$,$[c,d]\subset\mathbf{R}$,定义Hausdorff距离[6]:$d_H([a,b],[c,d])=|a-c|\vee|b-d|$。对$\tilde{A}$, $\tilde{B}\in F_{oc}(\mathbf{R})$,定义$\tilde{A}$,$\tilde{B}$之间的距离为$D(\tilde{A},\tilde{B})=\bigvee_{\alpha\in[0,1]}(d_H(\tilde{A}_\alpha,\tilde{B}_\alpha))$。记$F_{oc}(\mathbf{R}_-)$为$F_{oc}(\mathbf{R})$中全体非正模糊数的集合。

定义1　设$\tilde{A}\in F_{oc}(\mathbf{R})$,$n\in\mathbf{N}$,$k=1,2,\cdots,n$,若存在$a_0^1$, $a_1^1,\cdots,a_n^1,a_n^2,\cdots,a_1^2,a_0^2\in\mathbf{R}$,$a_0^1\leqslant\cdots\leqslant a_n^1\leqslant a_n^2\leqslant\cdots\leqslant a_0^2$满足:

$$\forall x\in\mathbf{R},\tilde{A}(x)=\begin{cases}\dfrac{\tilde{A}(a_k^1)-\tilde{A}(a_{k-1}^1)}{a_k^1-a_{k-1}^1}(x-a_{k-1}^1)+\tilde{A}(a_{k-1}^1), & a_k^1\leqslant x\leqslant a_{k-1}^1\\ 1, & a_n^1\leqslant x\leqslant a_n^2\\ \dfrac{\tilde{A}(a_k^2)-\tilde{A}(a_{k-1}^2)}{a_k^2-a_{k-1}^2}(x-a_{k-1}^2)+\tilde{A}(a_{k-1}^2), & a_k^2\leqslant x\leqslant a_{k-1}^2\\ 0, & \text{其他}\end{cases}\tag{1}$$

其中假设$0/0=0$称$\tilde{A}$为n-对称折线模糊数,并记$\tilde{A}([a_n^1,a_n^2];a_0^1,\cdots,a_{n-1}^1,a_{n-1}^2,\cdots,a_0^2)$。

设全体n-对称折线模糊数之集为$F_{oc}^{in}(\mathbf{R})$。若$n=1$,则1-对称折线模糊数是三角或梯形模糊数。易证度量空间$(F_{oc}(\mathbf{R}),D)$为可分离的度量空间。图1给出了一个n-对称折线模糊数的隶属曲线。

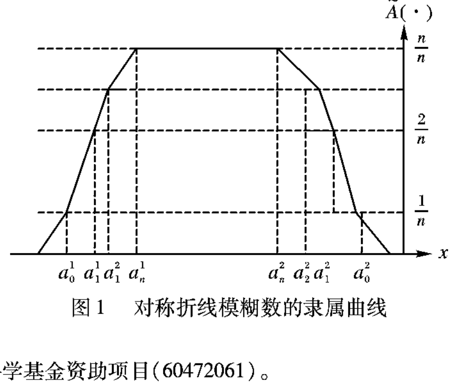

图1　对称折线模糊数的隶属曲线

收稿日期:2007-12-28;**修回日期**:2008-03-03。　**基金项目**:国家自然科学基金资助项目(60472061)。

作者简介:何春梅(1981-),女,湖南邵阳人,博士研究生,主要研究方向:模糊系统; 叶有培(1944-),男,江苏南京人,教授,博士生导师,主要研究方向:模糊系统、密码学; 徐蔚鸿(1963-),男,湖南湘潭人,教授,博士生导师,主要研究方向:模式识别、人工智能。

定义 2 设 $n \in \mathbf{N}$ 称 $\forall \tilde{A} \in F_{oc}^{in}(\mathbf{R}), Z_n(\tilde{A}) = i\tilde{A}_n$ 为 $Z_n: F_{oc}(\mathbf{R}) \to F_{oc}^{in}(\mathbf{R})$ 上的折线算子。

定义 3 扩展运算"+","-","."及数乘运算的定义请见文献[6]的式(3)和式(5)。

定义 4 若 $\forall \tilde{A} \in F_{oc}^{in}(\mathbf{R}), \sigma: \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ 是单调函数, σ 可扩展为 $F_{oc}^{in}(\mathbf{R}) \to F_{oc}^{in}(\mathbf{R})$:

$$\sigma(\tilde{A}) = \begin{cases} ([\sigma(a_n^1), \sigma(a_n^2)]; \sigma(a_0^1), \cdots, \\ \quad \sigma(a_{n-1}^1), \sigma(a_{n-1}^2), \cdots, \sigma(a_0^2)), & \sigma \text{ 不减} \\ ([\sigma(a_n^2), \sigma(a_n^1)]; \sigma(a_0^2), \cdots, \\ \quad \sigma(a_{n-1}^2), \sigma(a_{n-1}^1), \cdots, \sigma(a_0^1)), & \sigma \text{ 不增} \end{cases} \tag{2}$$

2 三层折线 FNN 及其逼近性能

2.1 三层前向折线 FNN

下面总假设 σ 是连续型 Sigmoidal 函数且处处可微,输入信号 $\tilde{X}$ 在 $F_{oc}(\mathbf{R}_-)$ 或 $F_{oc}^{in}(\mathbf{R}_-)$ 中取值,令

$$\tilde{P}[\sigma] = \{F_{nn}: F_{oc}^{in}(\mathbf{R}_-) \to F_{oc}^{in}(\mathbf{R}) \mid F_{nn}(\tilde{X}) = \sum_{j=1}^{p} \tilde{V}_j \cdot \sigma(\tilde{U}_j \cdot \tilde{X} + \tilde{\Theta}_j), p \in \mathbf{N}, \tilde{V}_j, \tilde{U}_j, \tilde{\Theta}_j \in F_{oc}^{in}(\mathbf{R})\}$$

$$\tilde{Z}[\sigma] = \{T_{nn}: F_{oc}(\mathbf{R}_-) \to F_{oc}^{in}(\mathbf{R}) \mid T_{nn}(\tilde{X}) = \sum_{j=1}^{p} \tilde{V}_j \cdot \sigma(\tilde{U}_j \cdot Z_n(\tilde{X}) + \tilde{\Theta}_j), n, p \in \mathbf{N}, \tilde{V}_j, \tilde{U}_j, \tilde{\Theta}_j \in F_{oc}^{in}(\mathbf{R})\}$$

若 $F_{nn} \in \tilde{P}[\sigma]$,则 F_{nn} 对应一单输入单输出(Single Input Single Output, SISO)的三层前向折线 FNN,其隐层节点有转移函数 σ,输入输出节点都是线性的,输入属于 $F_{oc}^{in}(\mathbf{R}_-)$,输出属于 $F_{oc}^{in}(\mathbf{R})$,内部运算基于定义 3 与定义 4;若 $T_{nn} \in \tilde{Z}[\sigma]$,类似地,$T_{nn}$ 同样对应一 SISO 的三层前向折线 FNN。

2.2 折线 FNN 的通用逼近性

设模糊函数 $F: F_{oc}^{in}(\mathbf{R}_-) \to F_{oc}^{in}(\mathbf{R})$,称 $\tilde{P}[\sigma]$ 对 F 具有泛逼近性,若 $\forall \varepsilon > 0$,对于任意紧集 $u \subset F_{oc}^{in}(\mathbf{R}_-)$,存在 $F_{nn} \in \tilde{P}[\sigma]$,使 $\forall \tilde{X} \in u, D(F_{nn}(\tilde{X}), F(\tilde{X})) < \varepsilon$,也称 $\tilde{P}[\sigma]$ 为 F 的泛逼近器。类似地可以定义 $\tilde{Z}[\sigma]$ 对 $F: F_{oc}^{in}(\mathbf{R}_-) \to F_{oc}^{in}(\mathbf{R})$ 的泛逼近性。易证,若 $F \in \tilde{P}[\sigma]$(或 $\tilde{Z}[\sigma]$),则模糊函数在 $F_{oc}^{in}(\mathbf{R}_-)$(或 $F_{oc}(\mathbf{R}_-)$)上连续。

下面的定理描述了折线网络的输入输出,其证明与文献[6]中定理 1 类似,此处略。

定理 1 设有模糊函数 $F: F_{oc}^{in}(\mathbf{R}_-) \to F_{oc}^{in}(\mathbf{R})$,则存在 $\tilde{V}, \tilde{u}, \tilde{\Theta} \in F_{oc}^{in}(\mathbf{R})$ 使 $\tilde{F} = \tilde{V} \cdot \sigma(\tilde{U} \cdot \tilde{X} + \tilde{\Theta})$,当且仅当下列条件成立:$\forall \tilde{X} \in F_{oc}^{in}(\mathbf{R}_-)$, $F(\tilde{X})$ 是 $F_{oc}^{in}(\mathbf{R})$ 中有如下形式的折线模糊数:

$$([f_n^1(x_n^1, x_n^2), f_n^2(x_n^1, x_n^2)]; f_0^1(x^1, x_0^2), \cdots, f_{n-1}^1(x_{n-1}^1, x_{n-1}^2), f_{n-1}^2(x_{n-1}^1, x_{n-1}^2), \cdots, f_0^2(x_0^1, x_0^2)) \tag{3}$$

其中 $f_i^q(x_i^1, x_i^2) = a(i,q) \cdot \sigma(b^1(i,q)x_i^1 + b^2(i,q)x_i^2 + r(i,q))$ 而 $a(i,q), b^1(i,q), b^2(i,q)$ 及 $r(i,q)$ 满足下列关系: $\forall i = \{0, 1, \cdots, n-1\}$:

$$\begin{cases} b^1(i,q)b^2(i,q) = 0,\ q = 1,2 \\ a(i,1) \leqslant a(i+1,1) \leqslant a(i+1,2) \leqslant a(i,2) \\ a(i,1) \geqslant 0 \Rightarrow \begin{cases} r(i,1) \leqslant r(i+1,1) \leqslant r(i+1,2) \leqslant i(i,2) \\ 0 \leqslant b^1(i,1) \leqslant b^1(i+1,1), b^2(i,1) \leqslant b^2(i+1,1) \leqslant 0 \\ 0 \geqslant b^1(i,2) \geqslant b^1(i+1,2), b^2(i,2) \geqslant b^2(i+1,2) \geqslant 0 \\ b^1(i,1) \geqslant b^2(i,2), b^2(i,1) \geqslant b^1(i,2) \end{cases} \\ a(i,1) < 0 \leqslant a(i,2) \Rightarrow \begin{cases} b^1(i+1,1) \leqslant b^1(i,1) \leqslant 0, 0 \leqslant b^2(i+1,1) \leqslant b^2(i,1) \\ b^1(i,2) \geqslant b^1(i+1,2) \geqslant 0, b^2(i+1,2) \leqslant b^2(i,2) \leqslant 0 \\ r(i,1) = r(i,2), b^q(i,1) = b^q(i,2),\ q = 1,2 \\ r(i+1,1) \geqslant r(i,1), r(i+1,2) \leqslant r(i,2) \end{cases} \\ a(i,2) < 0 \Rightarrow \begin{cases} b^1(i,1) \leqslant b^1(i+1,1) \leqslant 0, 0 \leqslant b^2(i,1) \leqslant b^2(i+1,1) \\ b^1(i+1,2) \geqslant b^1(i,2) \geqslant 0, 0 \geqslant b^2(i,2) \leqslant b^2(i+1,2) \\ b^1(i,1) \leqslant b^2(i,2), b^2(i,1) \leqslant b^1(i,2) \\ r(i,2) \leqslant r(i+1,2) \leqslant r(i+1,1) \leqslant r(i,1) \end{cases} \end{cases} \tag{4}$$

由定理 1 可得如下推论:

推论 1 设有模糊函数 $F: F_{oc}^{in}(\mathbf{R}_-) \to F_{oc}^{in}(\mathbf{R})$,则下述命题成立:

1) 若 $F_{nn} \in \tilde{P}[\sigma]$,那么 $\forall \tilde{A}, \tilde{B} \in F_{oc}^{in}(\mathbf{R}_-)$, $\tilde{A} \subset \tilde{B} \Rightarrow F_{nn}(\tilde{A}) \subset F_{nn}(\tilde{B})$;

2) $F_{nn} \in \tilde{P}[\sigma] \Leftrightarrow \forall \tilde{X} \in F_{oc}^{in}(\mathbf{R}_-)$, $F_{nn}(\tilde{X})$ 可表示为如下折线模糊数:

$$([s_n^1(x_n^1, x_n^2), s_n^2(x_n^1, x_n^2)]; s_0^1(x_0^1, x_0^2), \cdots, s_{n-1}^1(x_{n-1}^1, x_{n-1}^2), s_{n-1}^2(x_{n-1}^1, x_{n-1}^2), \cdots, s_0^2(x_0^1, x_0^2))$$

其中 $s_i^q(x_i^1, x_i^2) = \sum_{j=1}^{p} \tilde{V}_j(i,p) \cdot \sigma(u_j^1(i,q) \cdot x_i^1 + u_j^2(i,q) \cdot x_i^2 + \theta_j(i,q))$ 满足条件: $\forall j = 1, \cdots, p$,若记 $a(i,q) = v_j(i,q)$, $b^1(i,q) = u_j^1(i,q), b^2(i,q) = u_j^2(i,q), r(i,q) = \theta_j(i,q)$,则下式成立: $s_i^1(j)(x_i^1, x_i^2) \leqslant s_{i+1}^1(j)(x_{i+1}^1, x_{i+1}^2) \leqslant s_{i+1}^2(j)(x_{i+1}^1, x_{i+1}^2) \leqslant s_j^2(j)(x_i^1, x_i^2)$。

定理 2 设模糊函数 $F: F_{oc}(\mathbf{R}_-) \to F_{oc}(\mathbf{R})$,而 $\tilde{Z}[\sigma]$ 是 F 的泛逼近器,则 F 是递增的,即若 $\tilde{A}, \tilde{B} \in F_{oc}(\mathbf{R}_-)$, $\tilde{A} \subset \tilde{B}$,那么 $F(\tilde{A}) \subset F(\tilde{B})$。

证明 若结论不真,则存在 $\tilde{A}, \tilde{B} \in F_{oc}(\mathbf{R}_-)$, $\tilde{A} \subset \tilde{B}$,但 $F(\tilde{A}) \not\subset F(\tilde{B})$,则存在 $n \in \mathbf{N}, Z_n(F(\tilde{A})) \not\subset Z_n(F(\tilde{B}))$。对 $\tilde{X} \in F_{oc}(\mathbf{R}_-)$,设 $Z_n(F(\tilde{X})) = ([f_n^1(x_n^1, x_n^2), f_n^2(x_n^1, x_n^2)]; f_0^1(x_0^1, x_0^2), \cdots, f_{n-1}^1(x_{n-1}^1, x_{n-1}^2), f_{n-1}^2(x_{n-1}^1, x_{n-1}^2), \cdots, f_0^2(x_0^1, x_0^2))$,则存在 $f_i^1(\tilde{A}) < f_i^1(\tilde{B})$ 或 $f_i^2(\tilde{A}) > f_i^2(\tilde{B})$,不妨设 $f_i^1(\tilde{A}) < f_i^1(\tilde{B})$。令 $u = \{\tilde{A}, \tilde{B}\}$, $\varepsilon = (f_i^1(\tilde{B}) - f_i^1(\tilde{A}))/4$。由条件,存在 $T_{nn}(\tilde{X}) \in \tilde{Z}[\sigma]$ 使 $D(F(\tilde{X}), T_{nn}(\tilde{X})) < \varepsilon(\tilde{X} \in u)$,故

$D(Z_n(F(\tilde{X})), Z_n(T_{nn}(\tilde{X}))) \leqslant D(F(\tilde{X}), T_{nn}(\tilde{X})) < \varepsilon$ 对 $\tilde{X} \in F_{oc}(\mathbf{R}_-)$，记 $Z_n(T_{nn}(\tilde{X})) = ([t_n^1(\tilde{X}), t_n^2(\tilde{X})]; t_0^1(\tilde{X}), \cdots, t_{n-1}^1(\tilde{X}), t_{n-1}^2(\tilde{X}), \cdots, t_0^2(\tilde{X}))$，则：$|f_i^1(\tilde{X}) - t_i^1(\tilde{X})| \vee |f_i^2(\tilde{X}) - t_i^2(\tilde{X})| < \varepsilon, \tilde{X} \in \{\tilde{A}, \tilde{B}\}$，又由假设 $\varepsilon = (f_i^1(\tilde{B}) - f_i^1(\tilde{A}))/4$，故 $t_i^1(\tilde{B}) > t_i^1(\tilde{A})$，又 $\tilde{A} \subset \tilde{B} \Rightarrow T_{nn}(\tilde{A}) \subset T_{nn}(\tilde{B}) \Rightarrow t_i^1(\tilde{B}) < t_i^1(\tilde{A})$，产生矛盾，故定理得证。

推论 2　设模糊函数 $F: F_{oc}^{in}(\mathbf{R}_-) \to F_{oc}^{in}(\mathbf{R})$，而 $\tilde{P}[\sigma]$ 是 F 的泛逼近器，则 F 是递增函数。

推论 2 的证明与定理 2 类似，此处略。max 和 min 算子的定义参见文献[6]，定理 3 给出了 $\tilde{P}[\sigma]$ 与 $\tilde{Z}[\sigma]$ 对连续模糊函数的逼近性质。

定理 3　设 $F, G \in \tilde{P}[\sigma]$ 则 $\tilde{P}[\sigma]$ 是 $\max(F,G)$ 的通用逼近器，即对任意紧集 $u \in F_{oc}^{in}(\mathbf{R}_-)$ 及 $\varepsilon > 0$，存在 $F_{nn}(\tilde{X}) \in \tilde{P}[\sigma]$ 使得 $\forall \tilde{X} \in u, D(F_{nn}(\tilde{X}), \max(F,G)(\tilde{X})) < \varepsilon$，同样 $\tilde{P}[\sigma]$ 也是 $\min(F,G)$ 的通用逼近器。

证明　任取紧集 $u \in F_{oc}^{in}(\mathbf{R}_-)$ 及 $\varepsilon > 0$，对 $\tilde{X} \in F_{oc}^{in}(\mathbf{R}_-), G(\tilde{X}), F(\tilde{X}) \in F_{oc}^{in}(\mathbf{R}_-)$，设：

$$\begin{cases} g_i^q(x_i^1, x_i^2) = \sum_{j=1}^{p} v_j(g,i,q) \cdot \sigma(u_j^1(g,i,q)x_i^1 + \\ \qquad u_j^2(g,i,q)x_i^2 + \theta_j(g,i,q)) \\ f_i^q(x_i^1, x_i^2) = \sum_{j=1}^{p} v_j(f,i,q) \cdot \sigma(u_j^1(f,i,q)x_i^1 + \\ \qquad u_j^2(f,i,q)x_i^2 + \theta_j(f,i,q)) \end{cases}$$

若分别取 $h_i^q(x_i^1, x_i^2)$ 为 $f_i^q(x_i^1, x_i^2), g_i^q(x_i^1, x_i^2)$，由推论 1 得：

$$\begin{cases} g_i^1(x_i^1, x_i^2) \leqslant g_{i+1}^1(x_{i+1}^1, x_{i+1}^2) \leqslant g_{i+1}^2(x_{i+1}^1, x_{i+1}^2) \leqslant g_i^2(x_i^1, x_i^2) \\ f_i^1(x_i^1, x_i^2) \leqslant f_{i+1}^1(x_{i+1}^1, x_{i+1}^2) \leqslant f_{i+1}^2(x_{i+1}^1, x_{i+1}^2) \leqslant f_i^2(x_i^1, x_i^2) \end{cases}$$

将 g_i^q, f_i^q 的定义域扩充为 R^2，易验证 g_i^q, f_i^q 在 R^2 上连续。记 $\max(F,G)(\tilde{X}) = ([m_n^1(x_n^1, x_n^2), m_n^2(x_n^1, x_n^2)]; m_0^1(x_0^1, x_0^2), \cdots, m_{n-1}^1(x_{n-1}^1, x_{n-1}^2), \cdots, m_0^2(x_0^1, x_0^2))$，则有 $m_i^q(x_i^1, x_i^2) = f_i^q(x_i^1, x_i^2) \vee g_i^q(x_i^1, x_i^2)$，将 m_i^q 的定义域扩充为 R^2，易验证 m_i^q 在 R^2 上连续，且下列极限存在：

$$\lim_{x_i^1 \to +\infty, x_i^2 \to +\infty} m_i^q(x_i^1, x_i^2) \qquad \lim_{x_i^1 \to -\infty, x_i^2 \to +\infty} m_i^q(x_i^1, x_i^2)$$

$$\lim_{x_i^1 \to +\infty, x_i^2 \to -\infty} m_i^q(x_i^1, x_i^2) \qquad \lim_{x_i^1 \to -\infty, x_i^2 \to -\infty} m_i^q(x_i^1, x_i^2)$$

故文献[1,2]中定理 1,2 的条件成立，$\forall \varepsilon > 0$，存在 $p \in \mathbf{N}, v_j, u_j, \theta_j \in \mathbf{R}(j = 1, \cdots, p), c_{ij}^q \in \mathbf{R}$ 满足：$\forall x_i^q \in \mathbf{R}$，

$$|f_i^q(x_i^1, x_i^2) \vee g_i^q(x_i^1, x_i^2) - \sum_{j=1}^{p} c_{ij}^q \cdot \sigma(u_j^1 \cdot x_i^1 + u_j^2 \cdot x_i^2 + \theta_j)| < \varepsilon/2 \tag{5}$$

通过调整系数 c_{ij}^q 及增加项数可使 $c_{ij}^1 \leqslant c_{(i+1)j}^1 \leqslant c_{(i+1)j}^2 \leqslant c_{ij}^2$。因此推论 1 的条件成立，故 $F_{nn}(\tilde{X}) \in \tilde{P}[\sigma], \forall \tilde{X} \in F_{oc}^{in}(\mathbf{R}_-)$，若记 $s(\tilde{X}) = ([s_n^1(x_n^1, x_n^2), s_n^2(x_n^1, x_n^2)]; s_0^1(x_0^1, x_0^2), \cdots, s_{n-1}^1(x_{n-1}^1, x_{n-1}^2), s_{n-1}^2(x_{n-1}^1, x_{n-1}^2), \cdots, s_0^2(x_0^1, x_0^2))$，有 $s_i^q(x_i^1, x_i^2) = \sum_{j=1}^{p} c_{ij}^q \cdot \sigma(u_j^1 \cdot x_i^1 + u_j^2 \cdot x_i^2 + \theta_j)$，由文献[6]的式(2)、(6)可知 $D(F_{nn}(\tilde{X}), \max(F,G)(\tilde{X})) < \varepsilon$，即 $\tilde{P}[\sigma]$ 是 $\max(F,G)$ 的通用逼近器，同理可证 $\tilde{P}[\sigma]$ 是 $\min(F,G)$ 的通用逼近器。定理得证。

由归纳法可证，若 $F_1, \cdots, F_n \in \tilde{P}[\sigma]$，则 $\tilde{P}[\sigma]$ 分别是 $\max(F_1, \cdots, F_n), \min(F_1, \cdots, F_n)$ 的通用逼近器。

引理 1　设 $\tilde{A}, \tilde{B}, \tilde{C}, \tilde{D} \in F_{oc}^{in}(\mathbf{R}_-), \tilde{A} \subset \tilde{B} \Rightarrow \tilde{C} \subset \tilde{D}, \tilde{B} \subset \tilde{A} \Rightarrow \tilde{D} \subset \tilde{C}$，则存在 $F_{nn}(\tilde{X}) \in \tilde{P}[\sigma]$，使得 $F_{nn}(\tilde{A}) = \tilde{C}, F_{nn}(\tilde{B}) = \tilde{D}$。

定理 4　设 $F: F_{oc}^{in}(\mathbf{R}_-) \to F_{oc}^{in}(\mathbf{R})$ 是连续模糊函数，则 $\tilde{P}[\sigma]$ 是 F 的通用逼近器当且仅当 F 是递增的。

证明　必要性由推论 2 可得，此处只证充分性。任取 $\varepsilon > 0$ 及紧集 $u \subset F_{oc}^{in}(\mathbf{R}_-), \forall \tilde{A}, \tilde{B} \in u$，设 $\tilde{C} = F(\tilde{A}), \tilde{D} = F(\tilde{B})$。对 $\tilde{A}, \tilde{B}, \tilde{C}, \tilde{D}$，由假设及引理 1 有 $F_{nn}(\tilde{A}) = F(\tilde{A}), F_{nn}(\tilde{B}) = F(\tilde{B})$。由 $F_{nn}(\tilde{X})$ 的连续性知，存在 $\delta > 0$，使得 $\forall \tilde{X} \in \vartheta_\delta(\tilde{B}) \cap u, D(F(\tilde{X}), F_{nn}(\tilde{X})) < \varepsilon/2$，其中 $\vartheta_\delta(\tilde{B})$ 为度量空间 $(F_{oc}^{in}(\mathbf{R}_-), D)$ 中 $\tilde{B}$ 的 δ 邻域。因 u 是紧集，则存在 $\tilde{B}_1, \cdots, \tilde{B}_m \in F_{oc}^{in}(\mathbf{R}_-)$，使得 $u \subset \bigcup_{j=1}^{m} \vartheta_\delta(\tilde{B}_j)$，令 $F_{nn}(\tilde{X}) = (\max(F_{nn}(\tilde{A}, \tilde{B}_1), \cdots, F_{nn}(\tilde{A}, \tilde{B}_m))$，由定理 3，存在 $T(\tilde{A}) \in \tilde{P}[\sigma]$ 使得 $\forall \tilde{X} \in u, D(F_{nn}[\tilde{A}](\tilde{X}), T[\tilde{A}](\tilde{X})) < \varepsilon/4$，又对 $\tilde{X} \in F_{oc}^{in}(\mathbf{R}_-)$，令：

$$\begin{cases} F(\tilde{X}) = ([f_n^1(\tilde{X}), f_n^2(\tilde{X})]; f_0^1(\tilde{X}), \\ \qquad \cdots, f_{n-1}^1(\tilde{X}), f_{n-1}^2(\tilde{X}), \cdots, f_0^2(\tilde{X})) \\ F_{nn}[\tilde{A}](\tilde{X}) = ([r_n^1(\tilde{X}), r_n^2(\tilde{X})]; r_0^1(\tilde{X}), \\ \qquad \cdots, r_{n-1}^1(\tilde{X}), r_{n-1}^2(\tilde{X}), \cdots, r_0^2(\tilde{X})) \\ T[\tilde{A}](\tilde{X}) = ([t_n^1(\tilde{X}), t_n^2(\tilde{X})]; t_0^1(\tilde{X}), \\ \qquad \cdots, t_{n-1}^1(\tilde{X}), t_{n-1}^2(\tilde{X}), \cdots, t_0^2(\tilde{X})) \end{cases} \tag{6}$$

则 $\forall \tilde{X} \in u, -\varepsilon/4 < r_i^q[\tilde{A}](\tilde{X}) - t_i^q(\tilde{X}) < \varepsilon/4$，又因为 $r_i^q[\tilde{A}](\tilde{X}) = \max(F_{nn}(\tilde{A}, \tilde{B}_1)(\tilde{X}), \cdots, F_{nn}(\tilde{A}, \tilde{B}_1)(\tilde{X}))) = \max(F(\tilde{A}, \tilde{B}_1)(\tilde{X}), \cdots, F(\tilde{A}, \tilde{B}_1)(\tilde{X})$，故 $r_i^q[\tilde{A}](\tilde{X}) - t_i^q(\tilde{X}) = \max(f_i^q(\tilde{X}) - t_i^q(\tilde{X})) < \varepsilon/4$ 即 $f_i^q(\tilde{X}) - t_i^q(\tilde{X}) < \varepsilon/4$。同理，存在 $\eta > 0$，使得 $\forall \tilde{X} \in \vartheta_\eta(\tilde{A}) \cap u, D(F(\tilde{X}), F_{nn}(\tilde{X})) < \varepsilon/4$，则有 $\tilde{A}_1, \cdots, \tilde{A}_m \in F_{oc}^{in}(\mathbf{R}_-)$，使得 $u \subset \bigcup_{j=1}^{m} \vartheta_\eta(\tilde{A}_j)$，令 $H[\tilde{B}] = (\min(H[\tilde{A}_1, \tilde{B}], \cdots, H[\tilde{A}_m, \tilde{B}])$，由定理 3，存在 $T \in \tilde{P}[\sigma]$ 使得 $\forall \tilde{X} \in u, D(F_{nn}(\tilde{X}), T(\tilde{X})) < \varepsilon/4$，与上述相似，可得 $-\varepsilon/4 < r_i^q(\tilde{X}) - t_i^q(\tilde{X}) < \varepsilon/4$，则 $r_i^q(\tilde{X}) - t_i^q(\tilde{X}) = \min(f_i^q(\tilde{X}) - t_i^q(\tilde{X})) > -\varepsilon/4$，故 $f_i^q(\tilde{X}) - t_i^q(\tilde{X}) > -\varepsilon/4$，即 $|f_i^q(\tilde{X}) - t_i^q(\tilde{X})| < \varepsilon/4$，所以 $\forall \tilde{X} \in u, D(F(\tilde{X}), T(\tilde{X})) < \varepsilon/4$，即 $T \in \tilde{P}[\sigma]$ 是 $F(\tilde{X})$ 的通用逼近器。定理得证。

定理 5　设 $F: F_{oc}^{in}(\mathbf{R}_-) \to F_{oc}^{in}(\mathbf{R})$ 是连续模糊函数，则 $\tilde{Z}[\sigma]$ 是 F 的通用逼近器当且仅当 F 递增。

定理 5 的必要性由定理 2 可得，充分性证明与定理 4 类似，此处略。

3　例子

下面给出一个用折线 FNN 来模拟一个 SISO 模糊推理模

型的例子。推理规则库 $\{R_l \mid l = 1,2,\cdots,L\}$ 由 L 条模糊规则组成，R_l：if x 是 $\tilde{X}(l)$，then z 是 $\tilde{Y}(l)$。假设 $L = 3$，则 $\tilde{X}(l)$ 是推理的前件模糊集，$\tilde{Y}(l)$ 是后件模糊集，且 $\tilde{X}(l) \in F_{oc}^{in}(\mathbf{R}_-)$，$Y(l) \in F_{oc}^{in}(\mathbf{R})$。用一个 I/O 关系来表示上述模糊推理，可用于 FNN 训练的学习模式集合，即模糊模式对集 $M = \{(\tilde{X}(1),\tilde{Y}(1)),\cdots,(\tilde{X}(3),\tilde{Y}(3))\}$。设 $x_1 = z_1 = 0$ 而 $x_i - x_{i+1} = 0.5$，$z_i - z_{i+1} = 0.3(i = 1,2)$，$\tilde{X}(l)$ 与 $\tilde{Y}(l)$ 分别定义如表 1 所示。

表 1 模糊模式集

$\tilde{X}(l)$	$\tilde{Y}(l)$
$\tilde{X}(1) = ([0, -0.1];0,0, -0.2, -0.5)$	$\tilde{Y}(1) = ([0,0.05];0,0,0.15,0.35)$
$\tilde{X}(2) = ([-0.5, -0.6]; -0.1, -0.4, -0.8, -1.1)$	$\tilde{Y}(2) = ([0.25,0.35];0.05,0.2,0.45,0.65)$
$\tilde{X}(3) = ([-1, -1.1]; -0.6, -0.9, -1.3, -1.6)$	$\tilde{Y}(3) = ([0.55,0.65];0.35,0.5,0.75,0.95)$

由表 1 可知 $n = 2$。设转移函数如下：$\forall x \in \mathbf{R}$，$\sigma(x) = \begin{cases} \dfrac{-x^2}{1+x^2}, & x \leqslant 0 \\ 0, & x > 0 \end{cases}$，容易验证 σ，在 $(-\infty,0]$ 是连续单调递增的可微函数，在 $[0,+\infty)$ 上恒为 0。选取隐含层节点具有 60 个神经元的三层前向折线 FNN 来近似实现上述的 SISO 模糊函数关系，取误差界 $\varepsilon = 0.2$，即使得 $|\tilde{O}(x) - \tilde{Y}(l)| \leqslant \varepsilon$。采用模糊 BP 算法[7]，迭代 300 步后，得出实际输出为：

$$\tilde{O}(1) = ([0.0103,0.0305];0.0061,0.0076,0.198,0.386)$$

$$\tilde{O}(2) = ([0.2691,0.2963];0.0631,0.232,0.4835,0.7038)$$

$$\tilde{O}(3) = ([0.6027,0.6713];0.3633,0.5964,0.8024,0.9236)$$

通过比较 $\tilde{Y}(l)$ 与 $\tilde{O}(l)$ 可知，该折线 FNN 以较高精度实现了给定的模糊推理规则。

4 结语

本文利用折线模糊数及其扩展运算定义了一类新的模糊网络，分析了输入为负时，网络对模糊函数的通用逼近性，推广并扩充了文献[3-7]的成果。下一步的研究是讨论输入为一般的模糊数的情形以及为网络设计相应的学习算法。

参考文献：

[1] SCARSELLI F, TSOI A C. Universal approximation using feedforward neural networks: A survey of some existing methods and new results [J]. Neural Networks, 1998, 11(1): 15-17.

[2] CHEN T P, CHEN H. Approximation using capability in by multilayer feedforward networks and related problems [J]. IEEE Transaction on Neural Networks, 1995, 6(1): 25-30.

[3] BUCKLEY J J, HAYASHI Y. Can neural nets be universal approximators for fuzzy functions[J]. Fuzzy Sets and Systems, 1999(101): 323-330.

[4] 刘普寅. 正则模糊神经网络是模糊值函数的泛逼近器[J]. 控制与决策, 2003, 18(1): 19-28.

[5] LIU PU-YIN, LI HONGXING. Approximation analysis of feedforward regular fuzzy neural networks with two hidden layers[J]. Fuzzy Sets and Systems, 2005(150): 373-396.

[6] 刘普寅. 一种新的模糊神经网络及其逼近性能[J]. 中国科学: E 辑, 2002, 32(1): 76-86.

[7] 刘普寅. 模糊神经网络理论及应用研究[D]. 北京: 北京师范大学, 数学研究所, 2002: 79-81.

(上接第 1551 页)

参考文献：

[4] 艾英山, 张德贤. 人脸识别方法的综述与展望[J]. 计算机与数字工程, 2005, 33(10): 24-27.

[5] SAKAI T NAGAO M, KANADC T. Computer analysis and classification photographs of human face [C]// Proceedings of the 1st USA-Japan Computer Conference. USA: Purdue University, 1972: 2-7.

[6] 杜旭凌, 捷相, 洪贵, 等. 基于遗传模拟退火神经网络的人脸识别方法[J]. 计算机安全, 2007(2): 21-22.

[7] 戴阳春, 谢芳. 基于模糊 RBF 神经网络的人脸识别研究[J]. 自动化技术与应用, 2006, 25(6): 4-5.

[8] BARTLETT M S, SEJNOWSKI T J. Independent components of face images: A representation for face recognition [C]// Proceedings of the 4th Annual Joint Symposium on Neural Computation. Pasadena, CA, USA: [s. n.], 1997: 3-10.

[9] 蔺广逢, 范引娣, 张媛. 主成分分析与 BP 神经网络的人脸识别方法研究[J]. 现代电子技术, 2007, 30(2): 53-55.

[10] 刘振, 吴鹏, 陈月辉. 基于 PCA 和神经网络的人脸识别[J]. 山东科学, 2006, 19(4): 63-67.

[11] SCHOLKOPF B, SMOLA A, MULLER K-R. Nonlinear component analysis as a kernel eigenvalue problem [J]. Neural Computation, 1998, 10(5): 1299-1319.

[12] 韩柯, 朱秀昌, 王汇源. 基于 ICA 与 BP 神经网络相结合的人脸识别研究[J]. 信号处理与模式识别, 2006(2): 50-52.

[13] 范燕, 祁云嵩, 宋晓宁. 一种基于独立成分分析和径向基神经网络的人脸识别新方法[J]. 江苏科技大学学报: 自然科学版, 2006, 20(4): 46-50.

[14] MIKA S, RATSCH G, WESTON J, *et al.* Fisher discriminant analysis with Kernels [C]// Proceedings of IEEE International Workshop on Neural Networks for Singnal Processing. Washington: IEEE Press, 1999: 41-48.

[15] COX T, COX M. Multidimensional scaling [M]. London: Chapman & Hall, 1994.

[16] ROWEIS S, SAUL L. Nonlinear dimensionality reduction by locally lin2ear embedding [J]. Science, 2000, 290(5500): 2323-2326.

[17] TENENBAUM J B, De SILVA V, LANGFORD J C. A global geometric framework for nonlinear dimensionality reduction [J]. Science, 2000, 290(5500): 2319-2322.

[18] 王庆春, 王慧. Isomap 与径向基神经网络在人脸识别系统中的应用[J]. 电脑开发与应用, 2006, 19(10): 52-54.

[19] 高涛, 何明一, 何凯. 基于加权小波分析和神经网络的人脸识别[J]. 电视技术, 2006(292): 121-122.

[20] HAYAKAWA T, ICHIHASHI H, OKAMOTO S, *et al.* Learning chaotic dynamics in recurrent RBF network [C]// Proceedings of the 1995 IEEE International Conference on Neural Networks. Washington: IEEE Press, 1995, 1: 588-593.

[21] 张向东, 孙薇, 金锦良. 多层前馈模糊神经网络进行图像识别[J]. 计算机应用与软件, 2001, 18(5): 1-4.

[22] 胡琳. 基于小波变换和人工神经网络的 PCA 人脸识别方法研究[D]. 苏州: 苏州大学, 2002.