

用于图像去噪的改进型非线性扩散方程

丛 维,郭定辉

(北京航空航天大学 理学院,北京 100083)

(cici_gogo@126.com)

摘 要:修改一类图像处理用的非线性扩散方程模型的扩散系数函数,使所获得的新模型能够在考虑到图像梯度以及二阶导数的情况下,用于去除图像高梯度噪声并保持图像边缘细节。实验表明,该新模型能够在保持图像中有意义的尖峰和窄边缘的同时,消除高梯度噪声。

关键词:图像去噪;边缘保持;非线性扩散方程;扩散系数函数;高斯函数

中图分类号: TN911.73 **文献标志码:** A

Modified nonlinear diffusion equation for noise removal

CONG Wei, GUO Ding-hui

(Science College, Beihang University, Beijing 100083, China)

Abstract: A diffusion coefficient function of nonlinear diffusion equation was modified for processing image so that the modified model can remove the high gradient noise of the image and preserve the edge details of the image while considering the gradient and second derivative of the image. Experiments have shown that the modified model is capable of getting rid of the noises efficiently and preserving the edge locality and stronger peaks and thin edges while removing the high gradient noise of the image.

Key words: noise removal; preserving edge; nonlinear diffusion equation; diffusion coefficient function; Gauss function

0 引言

在图像处理和图像分析领域中,图像的平滑、降噪和锐化一直是图像处理和计算机视觉的研究热点,诸如机器人、医学图像处理和质量控制等领域都依赖图像平滑的质量。为此,人们进行了大量研究,提出了多种平滑、降噪和锐化图像的方法。近几年来,这些图像处理方法中通过偏微分方程进行图像处理工具的方法得到了较好的发展。

使用偏微分方程进行图像处理的原理是:利用经典的热传导方程来演化图像以得到图像的尺度空间。众所周知,求函数 $u_0(x, y)$ 与高斯函数

$$G_\sigma(x, y) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} \exp[-(x^2 + y^2)/4\sigma^2]; \sigma \text{ 表示尺度参数} \quad (1)$$

的卷积相当于求解如下的标准热传导模型:

$$\begin{cases} \frac{\partial u}{\partial t} = \Delta u = \nabla(\nabla u) \\ u(x, y, 0) = u_0(x, y) \end{cases}, (x, y) \in \mathbf{R}^2 \quad (2)$$

对于表示图像的函数 $u_0(x, y)$, 该模型的解表示对应图像进行平滑(去噪)后的结果。因此,该模型称为 Gaussian 平滑滤波模型。然而,该模型在去噪的同时也平滑了图像边缘。

为了在图像特征强的地方减少扩散速度,图像特征弱的地方(比如边缘)增强扩散速度。Perona 和 Malik^[1] 提出了保持边界的异向扩散模型(以下称为 P-M 模型):

$$\begin{cases} \frac{\partial u}{\partial t} = \nabla(c(|\nabla u|)) \nabla u \\ u(x, 0) = u_0(x) \end{cases} \quad (3)$$

其中: u_0 是原始图像, $c(s) > 0$ 是非增函数,称为扩散系数函数。Perona 和 Malik 讨论了两个这样的扩散系数,即:

$$c(s) = e^{-(s/k)^2} \quad (4)$$

$$c(s) = \frac{1}{1 + (s/k)^2} \quad (5)$$

其中:常数 k 为阈值,根据具体图像设定。

由 $c(s)$ 的性质可知, P-M 模型在图像梯度较大的地方,扩散较小;在图像梯度较小的地方,扩散较大。因此可以在滤除噪声的同时在一定程度上保持边界。但是,图像中噪声的存在会使图像梯度的估计偏大,从而噪声不但不会被除去,反而会被放大。而且,理论上 P-M 模型是病态的,即方程解的唯一性和稳定性得不到保证。

Catte、Coll、Morel 和 Coll^[2] 把 P-M 模型进行改进,得到所谓的 CLMC 模型

$$\begin{cases} \frac{\partial u}{\partial t} = \nabla(c(|\nabla u_\sigma|)) \nabla u \\ u(x, 0) = u_0(x) \end{cases}, u_\sigma = G_\sigma \times u \quad (6)$$

并证明了解的适定性问题。这是考虑到图像本身含有的噪声,所以在计算扩散的幅度之前对图像进行一次高斯平滑。对梯度的预滤波使得该扩散过程能够移走高对比度区域的小特征,但是仍然不能保留图像细节。

针对 P-M 模型和 CLMC 模型的缺点,文献[3]提出了一种新算子,它将上述模型中的扩散系数修改成了(称为林石模型):

$$\tilde{c}[\|\nabla G_\sigma \times u\|^2 + (G_\sigma \times u_{xx})^2 + (G_\sigma \times u_{yy})^2] \quad (7)$$

由于在尖峰处 $|\nabla u| = 0$, 二阶导数往往是局部极大值,而在零交叉点处,二阶导数往往较小,所以根据式(7)可知在尖峰处扩散系数变得较小。因此扩散得就比较慢,有利于保持尖峰。从而林石模型保留了边缘细节,使得处理后的图像有较强的真实感。

然而,通过分析发现,上述模型中对于具体图像而定的常

收稿日期:2008-01-18;修回日期:2008-04-02。 基金项目:国家自然科学基金资助项目(10571010)。

作者简介:丛维(1984-),女(满族),黑龙江哈尔滨人,硕士研究生,主要研究方向:偏微分方程、图像处理; 郭定辉(1963-),男,教授,四川成都人,主要研究方向:偏微分方程、图像处理。

数 k 在图像平滑过程中起到了很重要的作用,而这些模型对其选取没有给出准则,从而使得这些模型难于使用。

1 扩散系数函数的作用

以下引入通量函数 $\Phi(|\nabla u|) = c(|\nabla u|)|\nabla u|$ 来对上述模型中对于具体图像而定的常数 k 的作用进行分析。首先,在 P-M 模型中,如文献[1]所述,假设边缘平行于 y 方向,且 $u_x > 0$,忽略 y 方向的影响和卷积,就可以把 P-M 模型中的第一方程简化为:

$$u_t = \frac{\partial}{\partial x} \Phi(u_x) = \Phi'(u_x) \cdot u_{xx} \quad (8)$$

于是:

$$\frac{\partial}{\partial t}(u_x) = \frac{\partial}{\partial x}(u_t) = \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial}{\partial x} \Phi(u_x) \right) = \Phi'' \cdot u_{xx}^2 + \Phi' u_{xxx} \quad (9)$$

假设此处边缘由 $u_x > 0$ 定向,在拐点 $u_{xx} = 0$ 处,有 $u_{xxx} \ll 0$ (由于拐点是斜率取最大值的地方)。于是由式(2)知,在拐点邻域中, $\frac{\partial}{\partial t}(u_x)$ 与 $\Phi'(u_x)$ 符号相反,即,当 $\Phi'(u_x) > 0$ 时, u_x 随着时间的增加而减少;反之当 $\Phi'(u_x) < 0$ 时, u_x 随着时间的增加而增加。

其次,当取 $c(|\nabla u|)$ 为 CLMC 模型中的扩散函数时,可以得到:

$$\Phi(|\nabla u|) = \frac{|\nabla u|}{1 + \left(\frac{|\nabla u|}{k}\right)^2} \quad (10)$$

由此可见,当 $|\nabla u| < k$ 时, $\Phi(|\nabla u|)$ 单调增加 ($\Phi' > 0$); $|\nabla u| > k$ 时, $\Phi(|\nabla u|)$ 单调减少 ($\Phi' < 0$)。因此, $|\nabla u| \approx k$ 之前扩散随着梯度的增加而增加, $|\nabla u| \approx k$ 以后扩散随梯度的增加而减少;当 $|\nabla u| \gg k$ 时,扩散速度很慢,因为此处被视为边缘,扩散操作保护边缘。在边缘域值 k 附近一般可视为噪声区域,所以有较大的扩散,从而有较大的平滑产生。

最后,对于林石模型^[3],也假设边缘平行于 y 方向。对较平滑的信号来说, $|u_{xxx}| \ll |u_x|$, 且在拐点处 $u_{xxx} \ll 0$, 因此 u_x 的变化趋势主要还是受 u_x 本身的大小控制的: 当 u_x 大于某一阈值 k 时, $\frac{\partial}{\partial t}(u_x) > 0$; 反之,若 u_x 小于 k 时,就有 $\frac{\partial}{\partial t}(u_x) < 0$ 。

由上述分析可以知道,只有梯度幅值大于参数 k 的像素才作为边缘信息被保留,而梯度幅值较小的低对比度边缘将被滤除。过大的边缘域值的多次迭代会导致边缘的模糊,而较小的边缘域值会使扩散速度很慢,并且对高梯度的噪声无能为力。因此,阈值 k 的取值直接影响各向异性扩散方法对图像的去噪和保持边缘的能力。参数 k 是常数时实验效果不佳,原因在于在对噪声图像平滑的过程中,随着图像平滑程度的增加,相应的梯度不断下降。因此把边缘域值 k 改进为基于时间 t 的递减函数是自然的想法。

2 扩散系数函数的改进

为此,构造一个函数 $k(t)$ 具有以下简单的性质:

- 1) 单调递减;
- 2) 收敛于某一给定的值。

这种函数形式的选择有很多,例如:

$$k(t) = k_0 \left(1 + \frac{1}{t} \right) \quad (11)$$

$$k(t) = k_0 \exp\left(\frac{1}{1+t}\right) \quad (12)$$

其中: k_0 是迭代稳定时的边缘域值,可以通过 Canny^[4] 提取边缘的方法,一般取为使图像 70% 的点为非边缘点的分界值。对于以上两个函数,显然都有 $\lim_{t \rightarrow \infty} k(t) = k_0$ 。

根据数学分析的知识,函数 $k(t)$ 的作用是在扩散的一开始即去除高梯度(梯度大于边缘梯度的噪声),随着扩散的继续,边缘域值 k 减少,从而减少图像边缘的模糊,这时噪声与信号强度也同时减少,但噪声的减少程度更大,最后边缘域值 k 基本保持稳定。

3 各模型的实验结果

3.1 差分格式

以 P-M 模型为例,按照文献[1]的离散方法给出数值迭代形式:

$$u_{i,j}^{t+1} = u_{i,j}^t + \lambda [c_{N^*} \nabla_N u + c_{S^*} \nabla_S u + c_{E^*} \nabla_E u + c_{W^*} \nabla_W u]_{i,j}^t \quad (13)$$

为保证迭代稳定, $0 \leq \lambda \leq 1/4$ 。

其中:

$$\begin{aligned} \nabla_N u_{i,j} &= u_{i-1,j} - u_{i,j} \\ \nabla_S u_{i,j} &= u_{i+1,j} - u_{i,j} \\ \nabla_E u_{i,j} &= u_{i,j+1} - u_{i,j} \\ \nabla_W u_{i,j} &= u_{i,j-1} - u_{i,j} \\ c_{N^*}^t &= g(|\nabla_N u_{i,j}^t|) \\ c_{S^*}^t &= g(|\nabla_S u_{i,j}^t|) \\ c_{E^*}^t &= g(|\nabla_E u_{i,j}^t|) \\ c_{W^*}^t &= g(|\nabla_W u_{i,j}^t|) \end{aligned}$$

按同样的方法离散 CLMC 模型和林石模型(见文献[3]),容易证明去噪后的图像不会产生新的极值点^[2-3]。

3.2 实验结果

对 P-M 模型、CLMC 模型、林石模型,以及新模型的计算结果进行比较(如图 2 所示)。图 2(a) 是原图。图 2(b) 是在原图上叠加了均值为 0, 方差为 15 的高斯白噪声的图像。图 2(c) 是使用 P-M 模型处理的结果。图 2(d) 是 CLMC 模型处理结果。图 2(e) 是林石模型的处理效果。图 2(f) 是改进的边缘域值的林石算子的处理效果。

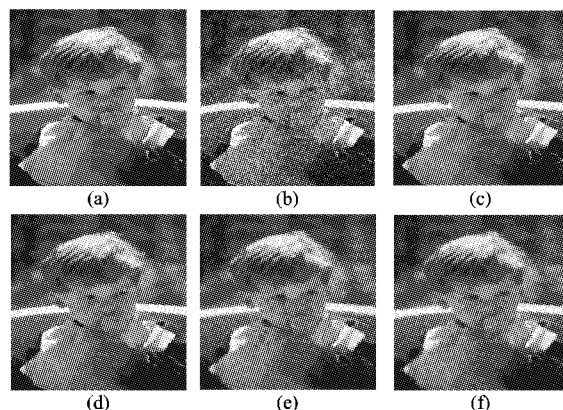


图 2 各模型计算结果的比较

从视觉效果上,经 P-M 模型处理后,图像残存明显的高梯度噪点,而且图像边缘严重模糊(注意小朋友的手);经 CLMC 模型处理后,图像部分区域过度平滑(注意小朋友的脸颊);林石算子在保持边缘和细节方面表现很好,但仍残存很多噪声点;而新模型处理后的灰度值最接近原图像,并且在保持细节和去除噪声两方面都比以上方法有较好的表现。

(下转第 1775 页)

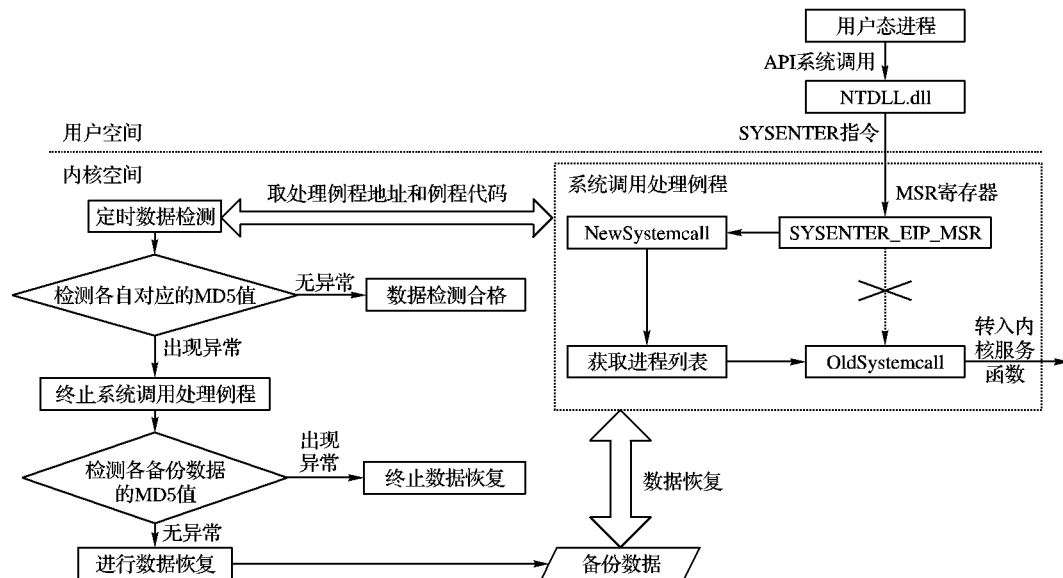


图2 改进的HSC检测流程

参考文献:

- [1] BUTLER J R I L. Detecting compromises of core subsystems and kernel function in Windows NT/2000/XP [D]. University of Maryland, Baltimore County, 2002.
- [2] DOROTHY E. Denning, information warfare and security [M]. Boston: Addison Wesley, 2001.
- [3] 雷校勇, 黄小平. Windows RootKit 技术原理及防御策略 [D]. 上海: 上海交通大学, 2006.
- [4] BUTLER J, JEFFREY L, PINKSON J. Hidden Processes: The Implication for Intrusion Detection [C] // Proceedings of the 2003 IEEE Workshop on Assurance United States Military Academy, West Point. New York: IEEE Press, 2003.
- [5] 王建华, 张焕生, 侯丽坤. Windows 核心编程 [M]. 北京: 机械工业出版社, 2001.
- [6] SCHREIBER S B. Undocumented Windows 2000 Secrets: A programmer's cookbook [M]. Boston: Addison Wesley, 2001.
- [7] GREG H, JAMES B. RootKit: Subverting the Windows Kernel [M]. Boston: Addison Wesley, 2005.
- [8] RFC 1321, The MD5 Message-Digest Algorithm [S]. 1992.
- [9] 加密技术及流行加密算法 [EB/OL]. [2005-11-25]. http://www.chip.cn/info/showArticle.jsp?article_id=3699&iPath=7&icPath=44.
- [10] 朱若磊. 利用核心态钩挂技术防止代码注入攻击 [D]. 广东: 广东商学院, 2006.

(上接第1765页)

为了定量比较各滤波方法的优劣, 给出图像峰值信噪比 $PSNR$ 和信噪比 SNR 的比较结果, 其中 $PSNR$ 和 SNR 的定义如下:

$$PSNR = 10 \log \left(\frac{255^2}{MSE} \right) \quad (14)$$

$$SNR = 10 \log \left(\frac{\sum_{i=0}^M \sum_{j=0}^N (u(i,j))^2}{\sum_{i=0}^M \sum_{j=0}^N (u(i,j) - \hat{u}(i,j))^2} \right) \quad (15)$$

其中:

$$MSE = \frac{\sum_{i=0}^{M-1} \sum_{j=0}^{N-1} (u(i,j) - \hat{u}(i,j))^2}{M \times N} \quad (16)$$

MSE 是两幅图像对应像素值的均方差, $M \times N$ 代表以像素表示的图像大小。上述算法的峰值信噪比随着迭代次数的增加都是先升后降的, 这是因为刚开始滤波的时候滤除的噪声比信号多, 信噪比上升; 当滤除的噪声和信号量相同时信噪比达到最大值, 随着迭代时间的增进, 滤除信号的量超过噪声的量, 信噪比下降。表1给出上述算法的最大 $PSNR$ (其中 k 是阈值, n 是迭代次数, ρ 是高斯卷积的核)。

表1 试验结果

试验结果	$PSNR$	SNR	k	n	ρ
P-M 模型	28.9370	21.2712	13	26	-
CLMC 模型	29.0121	21.2903	13	15	0.27
林石模型	29.1327	21.4109	13	50	0.35
新模型	29.1894	21.4676	13	80	0.27

由表1可以看出, 新模型具有最大的 $PSNR$ 和 SNR 。新模型在每次迭代过程中需要计算阈值以及二阶导数, 因此达到最高峰值信噪比所需要的时间比前几种模型都长, 但是对于图像质量的提高来说是值得的。

4 结语

在林石模型的基础上修改了扩散系数函数的阈值, 使其随着迭代时间的增加而减少, 得到的新模型不仅继承了原模型的优点, 而且在高梯度噪声处, 有较好的处理效果。

参考文献:

- [1] PERONA P, MALIK J. A scale space and edge detection using anisotropic diffusion [J]. IEEE Transaction On Pattern Analysis And Machine Intelligence, 1990, 12(7): 69-639.
- [2] CATTE F, COLL T, LION P L, et al. Image selective smoothing and edge-detection by nonlinear diffusion [J]. SIAM Journal On Numerical Analysis, 1992, 29(1): 182-193.
- [3] 林宙辰, 石青云. 一个能去噪和保持真实感的各向异性扩散方程 [J]. 计算机学报, 1999, 22(11): 1133-1137.
- [4] CANNY J. A computational approach to edge detection [J]. IEEE Transaction On Pattern Analysis And Machine Intelligence, 1986, 8(6): 697-698.
- [5] ALVAREZ L, LIONS P L, MOREL J M. Image selective smoothing and edge detection by nonlinear diffusion [J]. SIAM Journal On Numerical Analysis, 1992, 29(3): 845-866.
- [6] RUDIN L, OSHER S J, FATEMI E. Nonlinear total variation based noise removal algorithms [J]. Physics, 1992, 60(1/4): 259-268.
- [7] 张亶, 陈刚. 基于偏微分方程的图像处理 [M]. 北京: 高等教育出版社, 2004.