

基于最小生成树的连通支配集求解算法

高文宇

(广东商学院 信息学院, 广州 510320)

(gwy@gdce.edu.cn)

摘 要:针对无线网络中的连通支配集(CDS)问题,通过分析得到了 CDS 的一个重要性质,即简单连通无向图的最小 CDS 是该图的一棵包含最多叶子节点的生成树中的非叶子节点的集合。根据这个结论,设计了一个新的连通支配集求解算法,实验表明,新算法较前人的算法有更好的性能。

关键词:连通支配集;无线传感器网络;生成树算法

中图分类号: TP301.6 **文献标志码:** A

Novel connected dominating set algorithm based on minimum spanning tree

GAO Wen-yu

(School of Computer Science, Guangdong University of Business Studies, Guangzhou Guangdong 510320, China)

Abstract: Through in-depth analysis, an important property of Connected Dominating Set (CDS) in wireless network was obtained, in which the smallest CDS of a simple connected graph is the non-leaf nodes of a spanning tree with most leaf nodes. A new CDS algorithm was designed on the basis of the analysis. Simulation results show that the algorithm possess better performance than others.

Key words: Connected Dominating Set (CDS); Wireless Sensor Network (WSN); spanning tree algorithm

0 引言

无线传感器网络具有自组织、功耗小、廉价和快速部署、可扩展性强、在恶劣和特殊的环境下具有通信能力等优点。随着传感器技术、无线网络技术以及嵌入式处理技术的发展,无线传感器网络在民用和军事领域得到了广泛的应用。典型应用包括环境监测、森林火险预警、生物和化学攻击检测、战场态势感知等。为了提高广播传输的效率^[1-3]、节能^[4-6]等,连通支配集(Connected Dominating Set, CDS)被广泛应用在无线网络中用以构建无线网络的虚拟骨干网。然而在简单连通图中求解最小连通支配集是一个 NP 难问题,在实际应用中通常只能采用近似算法求解。

1 相关研究

对于 CDS 的求解,目前主要存在两种策略。第一种是直接构建一个连通节点集,然后检测其是否能支配其余节点。这类算法最为典型的就是文献[7]中的算法 1 以及文献[8]的算法。文献[7]的算法主要思路是从一个节点出发,用启发式策略选择与其相邻的节点加入,逐步扩展,成为一个连通的集合,然后考查这个连通的集合是否已经完全支配了图中的所有节点,如果已经支配了图中所有节点,算法结束,否则继续加入相邻节点。启发式策略的应用主要用于选择加入节点时获得最大的支配增益。文献[7]的算法的主要步骤如下:

1) 初始时,图中所有节点都是白色的(未被标记),选择一个度最大的节点,将其标记为黑色,并将其所有邻接点标记为灰色。

2) 从所有灰色节点中选取一个具有最多白色邻接点的灰色节点,并将其标记为黑色,同时将该节点的所有白色邻接点标记为灰色。

3) 重复第 2) 步,直至图中没有白色节点,即所有节点都被标记为黑色或灰色,算法结束。其中被标记成黑色的节点构成该图的一个 CDS。

该算法采用了一种非常直观的贪婪策略,即第 2) 步中,每次选择能获得最大支配增益的节点加入备选集合,从而希望最终得到一个较小的 CDS。但是这种贪婪策略在面临某些特殊情形时会有严重的缺陷(见 3.1 节的分析)。因此,作者又改进了该贪婪策略,将第 2) 步改为:从所有灰色节点和其相邻白色节点对中选取具有最大支配增益的“灰-白节点对”,并将这一对节点标记为黑色,同时将这一对节点的所有白色邻接点标记为黑色。

文献[8]的算法则是:

1) 初始时所有节点都是白色的(未被标记)。

2) 如果一个节点有两个未直接相连的邻接点,则标记这个节点为黑色,最终所有的黑色节点构成一个连通支配集(这是由其选择标记节点时的条件所保证的),但这个 CDS 可能很大。

3) 对产生的 CDS 进行剪枝,以缩减 CDS 的大小。

相关研究表明^[9],该算法产生的初始 CDS 很大,算法之所以在某些情况下有效主要是得益于其剪枝算法。而且该算法无法提供有保障的近似比,在特殊情形下性能很差。

求解 CDS 的第二种策略是:首先使用启发式规则在图中找出一个较小支配集(可能是非连通的),然后再增加一些节点以连通该支配集,从而形成一个 CDS,这类算法的典型代表

就是文献[7]中的算法2。这种方法理论上有很好的算法近似比,因为采用贪婪集合覆盖算法^[10]可以得到较小的支配集,然后通过寻找 Steiner Tree 的方法^[11]可以进一步得到较小的 CDS。但是这两个算法都涉及到大量的信息交换,因此只适合于在拥有全局信息的情况下实现,也就是说很难实现分布式算法。在文献[4]给出了这类算法的分布式近似实现,然而这会大大降低算法的效果。

下面我们通过对 CDS 与图的生成树的关系的分析给出了一种新的 CDS 求解算法。

2 基于最小生成树的 CDS 算法

2.1 问题定义

定义1 图 $G = (V, E)$ 称为简单连通无向图,需满足以下条件:

- 1) G 为无自回路的、连通的无向图。
- 2) G 中任意两个节点之间至多有一条边。

定义2 图 G 中节点 u 和节点 v 之间存在一条边,则称节点 u 与节点 v 相邻。

定义3 图 $G = (V, E)$ 中的任意节点 u ,称 u 在图中的相邻节点的个数为节点 u 的度数,记为 $D(u)$ 。

定义4 设图 $G = (V, E)$ 是简单连通无向图,若节点集 $S \subseteq V, S \neq \emptyset, \forall u \in V - S, u$ 都与 S 中至少一个节点相邻,则称 S 是图 G 的支配集。若由 S 导出的子图为连通图,则 S 为连通支配集。

在应用领域,我们通常希望求解最小 CDS,即求得的 CDS 包含的节点数最少。然而,无论是求解最小支配集或最小 CDS 都是 NP 难问题,因此我们只能采用一些近似算法来求解这个问题。

2.2 基于最小生成树的 CDS 算法(MST-CDS)

基于前面的描述,我们知道对于给定的简单连通图 G ,求最小 CDS 是一个 NP 问题,而现有算法主要包括两类:一是先在图中找出一个较小的独立集,然后再通过增加一些节点将这个独立集连通起来。二是直接采用启发式规则,从一个点出发,逐步构造一个 CDS。

第一类方案事先没有考虑连通性,因此最后的结果难以是较优的,而第二类方案在做选择时,主要考虑一个节点,也难以达到较好的效果。

通过对图的生成树的分析,以及对 CDS 的特性的分析,可以得到如下定理:

定理1 一个简单连通无向图的最小 CDS 是这个图的一棵包含最多叶子节点的生成树中的非叶子节点的集合。

证明 因为 CDS 是连通的,因此构成 CDS 的节点可以导出一棵树 T ,又因为 CDS 是支配集,因此图 G 中没在 CDS 里的节点一定和 CDS 中的某个节点相邻,因此可以将这些不在 CDS 中的节点视为 CDS 导出树 T 的叶子节点,从而构成一颗图 G 的生成树。所以为了得到最小的 CDS,那么图 G 的生成树应包含最多的叶子节点。证毕

根据定理1的结论,我们应该想办法从给定的图出发,构造一颗有尽量多叶子节点(度为1的节点)的生成树,那么这颗生成树中的非叶子节点构成的集合就是我们要求解的 CDS。

下面使用一种基于最小生成树(Minimum Spanning Tree,

MST)的贪婪策略来求解 CDS。

为了最终得到的生成树有更多的叶子节点,也就是说让最后的生成树中有更多的度为1的节点,但是整棵树所有节点的度之和是恒定的(若生成树有 n 个节点,这连通这棵树的边为 $n-1$ 条,所以度之和恒为 $2(n-1)$)。因此,为了让生成树中有更多度为1的节点,我们应该让这棵树的非叶子节点有尽量大的度。

因此,在图 G 中,应该选择度尽量大的节点来逐步构造这颗生成树。然而,仅考虑节点的度来选择节点,对于最后的连通性考虑是不利的。所以我们设计的新算法采用如下思路来构造一个较小的 CDS:

1) 对图 G 中的每条边赋权值,边的权值等于该边连接的两个相邻节点的度之和。

2) 从任一节点出发,使用最小生成树算法(如 Prim 算法)^[10]来求解图 G 的最大生成树(即具有最大权值的生成树) T (用最小生成树算法来求解具有最大权值的生成树,只需在原算法中将“每次选择具有最小权值的边”改为“每次选择具有最大权值的边”即可)。

3) 去掉最大生成树 T 中度为1的节点,剩下的节点即构成我们所求的 CDS。

2.3 算法的有效性说明

1) 算法的无偏性。由于从任意节点出发,都可以得到最优的最大生成树,因此无论从哪个节点开始构建生成树,最终得到的 CDS 都不会有偏差。

2) 对图中度较大的节点,则根据对边赋权值的规则,与它相接的边都有较大权值,这样这些边被选中的概率就较大,这会导致在一个度较大的节点周围选中较多的边,从而这个节点消耗较多的度,这会使得最终形成的生成树会有更多的度为1的叶子节点。

3) 对于图中度较小的节点,根据对边赋权值的规则,与它相连的边的权值相对于与它的邻接点相连的边的权值要小,因此与它相连的边被选中多条的概率就较小,因此它也就可能在最终的生成树中成为一个叶子节点。

4) 对于最大生成树的求解来说,存在一种不好的情况,即在生成最大生成树的过程中,若多条备选边的权值相等时,则会存在多棵权值相等的最大生成树。这对我们利用最大生成树来求解 CDS 是不利的。因此,当在生成最大生成树的过程中,若备选边的权值相等时,算法选取依附于当前生成树中度最大的节点的边,这样可以避免一些极端情况的出现。

2.4 算法的分布式实现

新算法中,第1)步中对边赋权值,可以让每个节点向相邻节点发送自己的度即可,这样每个节点就可以知道所有邻接点的度,从而无需集中信息就可以计算与本节点相连的边的权值,完成对边赋权值操作。

已有的一些分布式算法^[12]可以以较低代价在分布式环境中求解最小生成树问题,因此第2)步亦可在分布式环境中得以实现,在此不再赘述。

因此,我们的算法完全可以在一个分布式环境下实现。

3 算法分析及比较

3.1 算法在面临一个特殊图时的性能

在文献[7]中提出的算法在采用未改进的贪婪策略时

(即每次选取一个具有最大支配增益的邻接点),对于下面的图1(a)会失效。因为若从图1(a)的 u 节点出发,则应该依次选取 u 的5个邻接点,然后又依次选取 u 的邻接点的邻接点。这样,最后得到的CDS见图1(b)。显然,这是很差的结果,事实上,图1(c)中的节点就构成了一个CDS。那么使用改进的贪婪策略(即每次选取一对具有最大支配增益的邻接点)则可以避免这个问题,最终得到的支配集就是图1(c)。

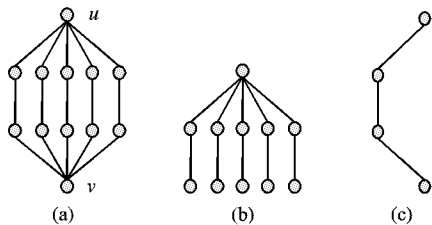


图1 文献[7]中一种特殊的图

这是一个很典型的图,那么基于最小生成树的CDS算法能解决这种情况吗?

首先,对图中的边赋权值,见图2(a),所有与 u 相连的边的权值都是7,所有与 v 相连的边的权值也是7,其余的边的权值都是4;应用最小生成树算法可以得到一棵具有最大权值的生成树,见图2(b);去掉图2(b)中的叶子节点(度为1的节点),得到最终的CDS,见图2(c),这是最好的结果。

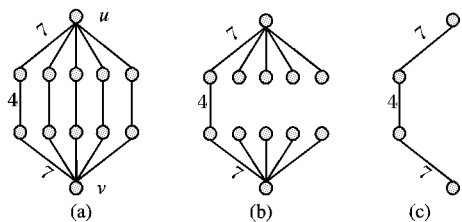


图2 基于最小生成树的CDS算法的执行过程

3.2 实验研究

为了验证新算法(MST-CDS)的性能,将新算法与文献[4,7-8]中的算法进行了比较。文献[4]中的算法是文献[7]算法的分布式近似实现,其性能比文献[7]的算法要差。在文献[8]中,将算法与文献[4]的算法进行了实验比较,文献[8]的算法在多数情况下比文献[4]算法要好,但是根据前面文献[8]算法的分析,文献[8]算法的性能其实并没有超过文献[7]算法的性能。因此,只需将我们的算法与文献[7]的算法进行实验对比即可。

对比实验采用了类似于文献[8]中的实验方案:在 100×100 的矩形区域内,随机投放一定数量的无线网络节点,每个节点的通信半径为 R ,若两个节点间的距离小于 R ,则这两个节点之间有边相连,反之则无边相连。每次产生的图若是连通的,则实验继续,若图不连通(非连通图不存在CDS),则重新产生随机图。

我们进行了两组实验。第一组,将节点的通信半径 R 分别设置为15、25、50、75。然后,对每一个半径 R ,将节点的数量 V 从0变化到100,对每一个 V ,生成1000次随机图,然后执

行文献[7]的算法和新算法,求解每一个随机图的CDS的大小。最后对1000次随机实验求得的CDS大小取平均值,作为每个算法的性能评价指标。

在第二组实验中,将节点数量 $|V|$ 分别设置为20、40、60、80。对每一个 $|V|$,将通信半径 R 从0变化到100,同样地,实验进行1000次,最后计算CDS大小的平均值。

实验结果:图3展示了第一组实验的结果。在图3(a)中,横坐标不是从0开始,是因为当 $R=15$,节点个数太少时(<50),在 100×100 的平面上随机产生的节点很难构成连通图,因此为了保证实验的随机性,产生的节点数从51开始。

从图3(a)~(c)中可以看出,新算法在各种情况下都好于文献[7]算法。图3(a)~(b)中新算法明显好于文献[7]算法,图3(c)中新算法略好于文献[7]算法。

在图3(d)中,当 $R=75$ 时,产生的随机图已相当稠密,新算法产生的CDS基本上保持在1左右(因为此时理论上一

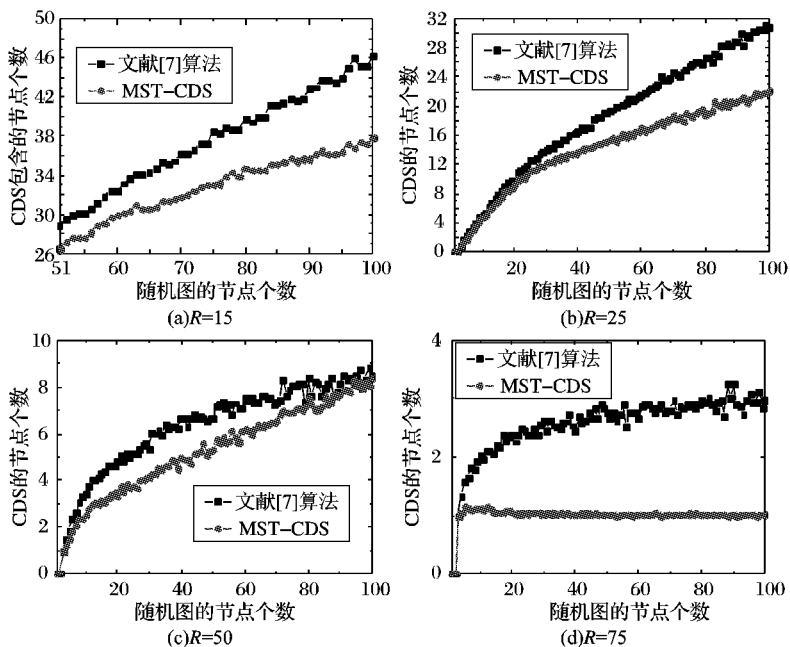


图3 第一组实验结果

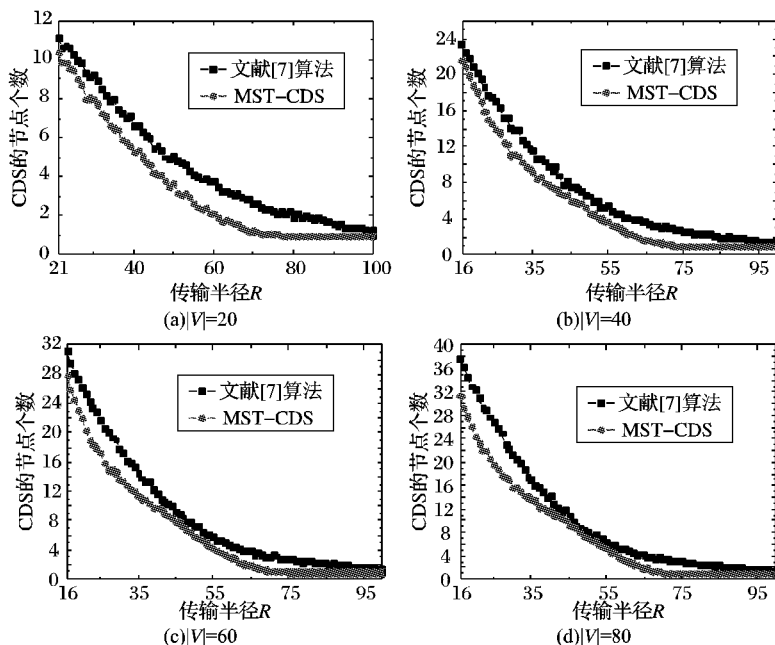


图4 第二组实验结果

个半径为 $R = 75$ 的节点就可以覆盖整个 100×100 区域),所以新算法基本上在各种情况下都可以找到最好的结果。而[7]的算法得到的 CDS 大小始终徘徊在 2~3 之间。

图4展示了第二组实验的结果。横坐标都不是从0开始,是因为传输半径 R 太小时(<16),在 100×100 的平面随机产生的节点很难构成连通图,因此为了保证实验的随机性,传输半径从16开始。

从图4中可以看出,新算法在各种情况下都好于文献[7]的算法,

综上所述,实验结果显示新算法较之文献[7]的算法具有更好的性能。

4 结语

连通支配集在网络通信领域有着广泛的用途,深入分析了现有一些 CDS 求解算法,在此基础上,得到了关于 CDS 的一个新特性,即最小 CDS 是图的一棵包含最多叶子节点的生成树中的非叶子节点的集合。根据这个结论,设计了一种全新的寻找 CDS 的策略,即通过建立一棵含叶子节点较多的生成树来寻找一个较小的 CDS。随后给出了一种基于最小生成树的方法来建立一棵含叶子节点多的生成树。理论分析和对比实验表明,新算法较前人的算法有明显的改进。

参考文献:

- [1] NI S Y, TSENG Y C, CHEN Y S. The broadcast storm problem in a mobile Ad Hoc network [C]// *MobiCom'99: Proceedings of the 5th Annual ACM/IEEE International Conference on Mobile Computing and Networking*. [S. l.]: ACM Press, 1999: 152–162.
- [2] DAI F, WU J. Performance analysis of broadcast protocols in Ad Hoc networks based on self-pruning [J]. *IEEE Transactions on Parallel and Distributed Systems*, 2004, 15 (11): 1–13.
- [3] 彭伟,卢锡城. 一个新的分布式最小连通支配集近似算法[J]. *计算机学报*, 2001, 24 (3): 254–258.
- [4] DAS B, HARGHAVAN V B. Routing in Ad Hoc networks using minimum connected dominating sets [C]// *ICC'97: IEEE International Conference on Communications*. Montreal, Quebec: IEEE Press, 1997: 1–20.
- [5] LEE J, MANS B. Energy efficient virtual backbones for reception aware MANET [C]// *VTC 2006-Spring: Proceedings of the 63rd IEEE Vehicular Technology Conference*. Montreal: IEEE, 2006, 3: 1097–1101.
- [6] 许力,林志伟. 基于图着色的无线自组网极小连通支配集算法[J]. *通信学报*, 2007, 28(3): 108–114.
- [7] GUHA S, KHULLER S. Approximation algorithms for connected dominating sets [J]. *Algorithmica*, 1998, 20 (4): 374–387.
- [8] WU J, LI H. On calculating connected dominating set for efficient routing in Ad Hoc wireless networks [C]// *Proceedings of the 3rd International Workshop on Discrete Algorithms and Methods for Mobile Computing and Communications*. Seattle: ACM, 1999: 7–14.
- [9] WAN P, ALZOUBI K, FRIEDER O. Distributed construction of connected dominating set in wireless Ad Hoc networks [C]// *IEEE INFOCOM'02*. Washington, DC: IEEE press, 2002: 141–149.
- [10] CORMEN T H, LEISERSON C E, RIVEST R L, *et al.* Introduction to Algorithms[M]. 2nd. Cambridge, MA: The MIT press, 2001.
- [11] KARPINSKY M, ZELIKOVSKY A. New approximation algorithms for the Steiner tree problem [J]. *Journal of Combinatorial Optimization*, 1997, 1(1): 47–65.
- [12] GALLAGER R G, HUMBLET P A, SPIRA P M. A distributed algorithm for minimum-weight spanning trees [J]. *ACM Transactions on Programming Languages and Systems*, 1983, 5(1): 66–77.

(上接第1489页)

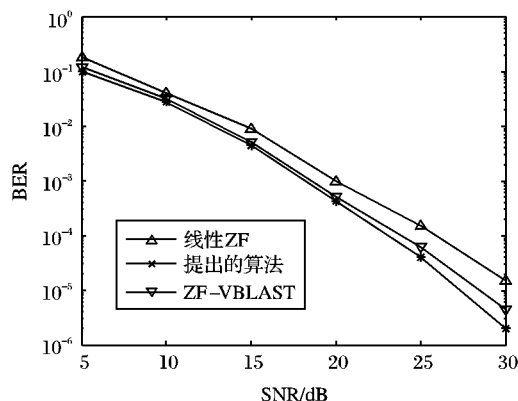


图4 6×3 TSSTD 系统不同检测算法的平均误码率

3 结语

针对实际 MIMO 无线系统多 STTD 系统受噪声干扰与多径衰落影响的符号检测问题,提出了一种有效的基于 QR 分解的线性检测与功率分配算法。该算法基于 QR 连续符号检测,采用平均 BER 的方式使得系统的性能与瞬时信道状态无关,因此只需要接收端反馈少量的 CSI 信息即可实现信道矩阵的有效估计,提高功率分配的准确性。通过最小化平均 BER 上界,得到了最优化的功率分配机制。该方法同时适用于其他多 STTD 系统。详细的仿真实验结果表明,提出算法的性能与理论值一致;与不采用功率分配算法时相比,平均 SNR 提高约 2 dB;增加发送与接收天线的数量,可以进一步提

高系统的增益。

参考文献:

- [1] ALAMOUTI S M. A simple transmit diversity technique for wireless communications [J]. *IEEE JSAC*, 1998, 16(8): 1451–1458.
- [2] ONGGOSANUSI E N, DABAK A G, SCHMIDL T M. High rate space-time block coded scheme: Performance and improvement in correlated fading channels [C]// *Proceedings of IEEE Wireless Communications and Networking*. New Jersey: IEEE press, 2002: 194–199.
- [3] SHIM S, KIM K, LEE C. An efficient antenna shuffling scheme for a DSTD system [J]. *IEEE Communication Letters*, 2005, 9(2): 124–126.
- [4] KALBASI R, FALCONER D D, BANIHASHEMI A H. Optimum power allocation for a V-BLAST system with two antennas at the transmitter [J]. *IEEE Transactions on Communications*, 2005, 9 (9): 826–828.
- [5] YAN Z, WONG K M, LUO Z Q. Optimal diagonal precoder for multiantenna communication systems [J]. *IEEE Transactions on Signal Processing*, 2005, 53(6): 2089–2100.
- [6] GOLDEN G, FOSCHINI G J, VALENZUELA R A, *et al.* Detection algorithm and initial laboratory results using V-BLAST space-time communication architecture [J]. *IEE Electronics Letters*, 1999, 35 (1): 14–16.
- [7] MCKAY M R, COLLINGS I B. Capacity and performance of MIMO-BICM with zero-forcing receivers [J]. *IEEE Transactions on Communications*, 2005, 53(1): 74–83.