

# 基于广义多项式神经网络的点云数据隐式曲面重构方法

肖秀春<sup>1,2,3</sup>, 姜孝华<sup>1</sup>, 张雨浓<sup>1</sup>

(1. 中山大学 信息科学与技术学院, 广州 510275; 2. 广东海洋大学 信息学院, 广东 湛江 524088;

3. 浙江大学 CAD/CG 国家重点实验室, 杭州 310058)

(springxxc@163.com)

**摘要:**针对点云数据的三维重建问题,提出了一种隐式曲面重构的广义多项式神经网络新方法。该广义多项式神经网络隐层各神经元激励函数互不相同且线性无关,能够对应地学习点云数据样本中不同的模式,因此,具有较好的学习能力。基于梯度下降法原理,推导了其学习算法。仿真实验尝试将该方法应用于一些简单封闭物体的带噪点云数据隐式曲面重建,取得了较理想的重建质量和去噪效果。

**关键词:**广义多项式;神经网络;隐式曲面;点云

**中图分类号:** TP183; TP391.41 **文献标志码:** A

## Implicit surface reconstruction from point cloud data based on generalized polynomials neural network

XIAO Xiu-chun<sup>1,2,3</sup>, JIANG Xiao-hua<sup>1</sup>, ZHANG Yu-nong<sup>1</sup>

(1. School of Information Science and Technology, Sun Yat-sen University, Guangzhou Guangdong 510275, China;

2. College of Information, Guangdong Ocean University, Zhanjiang Guangdong 524088, China;

3. State Key Laboratory of CAD & CG, Zhejiang University, Hangzhou Zhejiang 310058, China)

**Abstract:** A new type of generalized polynomials neural network was proposed to reconstruct 3D implicit surface from the scattered points. Since its hidden-layer neurons were activated with the different and linear independent generalized polynomials, the proposed neural network could achieve good performance in learning different patterns. Then the weights-updating formula for the new type of neural network was derived based on gradient-descent method. The simulation results on some scattered point models show that this method can obtain good reconstruction quality and denoising effect.

**Key words:** generalized polynomial; neural network; implicit surface; scattered point

## 0 引言

点云数据也称为散乱点(Scattered Point)数据,是由三维扫描设备获取的能够较好描述实体对象的三维点数据集<sup>[1]</sup>。随着计算机图形学和三维扫描技术的不断发展,基于点云数据的实体三维重建的研究得到了越来越多的重视<sup>[2-5]</sup>。

大量文献研究表明,点云数据蕴涵着一个流形表面,该表面逼近采样数据对应的实体表面<sup>[6]</sup>。一般来说,对实体的三维重建就是建立该流形表面的具有某种拓扑的数学描述。然而,由于实体表面的不规则和复杂性,直接由点云数据建立这种数学描述是非常困难的。

目前,基于隐式曲面插值或逼近方法进行点云数据的三维重建已成为曲面描述的一类重要方法<sup>[7-8]</sup>。该方法首先构造一个含有未知参数的隐函数曲面,通过定义点云数据作为隐函数曲面的零水平集,且增加必要的约束点的办法迫使该隐函数曲面逼近原始点云数据,进而求解出相应的未知参数;在获得了点云数据的隐式表示以后,运用 Marching Cube<sup>[9]</sup>或 Bloomenthal<sup>[10]</sup>等经典的多边形化方法在隐函数曲面上提取多边形网格,最后通过渲染、纹理贴图等操作完成点云数据的

三维重建。

基于径向基函数(Radial Basis Function, RBF)的隐式函数逼近方法由于对不规则和带噪声点云数据具有较强鲁棒性,以及对缺失数据具有较好修复能力而成为上述方法的主流<sup>[2,11]</sup>。该方法最早由 Savchenko 等人引入到点云数据三维重建领域中<sup>[12]</sup>,但由于全局 RBF 隐函数方法对大规模点云数据无法处理而限制了其实际应用。近年来, Carr 运用快速多极技术增强了全局 RBF 隐函数的数据处理能力<sup>[3]</sup>;Floater 采用紧支撑径向基函数降低了 RBF 隐式逼近法在计算时间和存储上的消耗<sup>[13]</sup>;Ohtake<sup>[2,11]</sup>, Alexa<sup>[14]</sup> 和 Wendland<sup>[15]</sup> 等学者引入了多尺度技术、分层处理技术以及单位分解法,这些方法将全局 RBF 插值问题转化为局部 RBF 插值问题,运用分治策略较好地解决了 RBF 隐式逼近法的数据处理能力问题。但是,需要指出的是,尽管 RBF 函数隐式逼近法在点云数据的三维重建领域中取得了较大的成功,但由于 RBF 函数中心和尺度两个参数导致了径向基冗余的问题,从而导致求解稠密线性系统以及计算复杂度的提高。

另一方面,由于神经网络的并行处理、分布式存储特性,以及它对有限间断点的任意非线性函数的任意逼近能力,基

收稿日期:2009-02-27;修回日期:2009-04-08。

基金项目:国家自然科学基金资助项目(60775050);浙江大学 CAD/CG 国家重点实验室开放课题。

作者简介:肖秀春(1976-),男,湖南耒阳人,讲师,博士研究生,主要研究方向:图形与图像处理、神经网络、信息安全;姜孝华(1963-),男,湖南新化人,教授,博士生导师,博士,主要研究方向:信号检测与处理技术、神经网络;张雨浓(1973-),男,河南信阳人,教授,博士生导师,博士,主要研究方向:神经网络、机器人、高斯过程。

于神经网络的隐式曲面重构方法已成为近年来研究隐式曲面重构的另一类重要方法。Cretu<sup>[16]</sup>、吴刚<sup>[17]</sup>和李道伦<sup>[8]</sup>等提出了隐式曲面重构的多层前馈神经网络、BP 神经网络和 RBF 神经网络方法。该类方法基本原理为:将三维坐标的点云数据及其法向正方向、法向负方向的约束点作为神经网络的训练集对神经网络进行训练,则训练后的神经网络表达了近似插值于点云数据的一个隐式曲面。

本文提出了一种用于隐式曲面重构的广义多项式神经网络方法。将线性无关的广义多项式函数引入到神经网络隐层激励函数设计中,定义最小均方误差作为目标误差函数,依照梯度下降法原理,推导出网络学习算法。然后,将该广义多项式神经网络应用于点云数据隐式曲面重构。仿真实例表明,本文方法是可行且有效的,且能够较好地滤去点云数据中的噪声。

## 1 隐曲面广义多项式神经网络

### 1.1 曲面的隐函数表达

在计算几何中,曲面的函数描述一般可有显式表达(形式为  $z = f_{\text{explicit}}(u, v)$ )和隐式表达(形式为  $f_{\text{implicit}}(u, v, w) = 0$ )两类方法。通常,显式表达无法直接描述封闭曲面。然而,实际物体表面通常为封闭曲面,因此,对于点云数据的三维重建一般采用隐式函数表达形式。

不失一般性,若假定逼近无误差,则可以将点云数据的隐曲面函数表达式写成下式:

$$f_{\text{implicit}}(u_j, v_j, w_j) = 0 \quad (1)$$

$(u_j, v_j, w_j) \in s_0$

式中  $s_0$  为点云数据集,  $j = 1, 2, \dots, m$ ,  $m$  为样本数。为了使隐函数曲面逼近点云数据,还必须在点集的法向正方向(定义为指向曲面外部的方向)和法向负方向增加一定数量的约束点,一般地,可以令法向正方向的约束点的隐函数值为 +1, 法向负方向的约束点的隐函数值为 -1。于是,实际应用的点云数据隐曲面表达式可如下式:

$$f_{\text{implicit}}(u_j, v_j, w_j) = \begin{cases} 0, & (u_j, v_j, w_j) \in s_0 \\ -1, & (u_j, v_j, w_j) \in s_{-1} \\ +1, & (u_j, v_j, w_j) \in s_{+1} \end{cases} \quad (2)$$

其中,  $s_0$  为点云数据集,  $s_{-1}$  为内部约束点集,  $s_{+1}$  为外部约束点集,且称  $s = s_0 \cup s_{-1} \cup s_{+1}$  为约束点集。

### 1.2 网络拓扑结构

为了从点云数据重建上述隐式曲面函数  $f_{\text{implicit}}(u, v, w)$ , 我们提出了一种新型广义多项式神经网络模型,其拓扑结构如图 1 所示。所构造的广义多项式神经网络为三层前向结构<sup>[19]</sup>,将线性无关的三元广义多项式函数  $\{p_i: = p_i(u, v, w)\}_{i=1}^n$  (也可引入正交函数簇作为激励函数)作为神经网络隐层  $n$  个神经元的激励函数。输入层 3 个神经元的输入对应于约束点集的三维坐标,输出层的单神经元的激励输出为  $y$ , 其目标输出对应于隐函数  $f_{\text{implicit}}(u, v, w)$  的函数值。另外,第  $i$  个隐神经元与输出神经元的连接权值为  $\omega_i (i = 1, 2, \dots, n)$ 。

对于图 1 所给出的广义多项式神经网络,其输入与输出关系可如下式所述:

$$y = \sum_{i=1}^n \omega_i p_i(u, v, w) \quad (3)$$

由多元函数逼近理论可知,上式描述的广义多项式神经

网络可逼近任意连续非线性函数<sup>[17]</sup>,从而,本文构造的隐曲面广义多项式神经网络可逼近任意连续曲面。

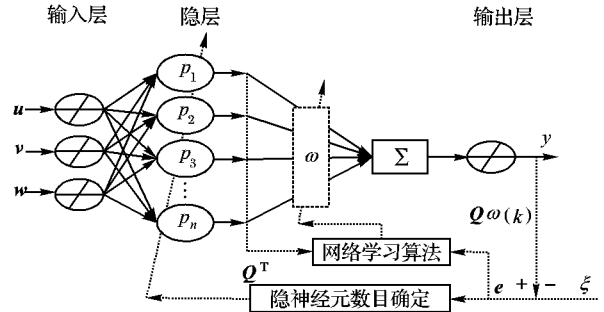


图 1 隐曲面广义多项式神经网络拓扑结构

### 1.3 隐层激励函数

不失一般性,1.2 节所述拓扑结构的神经网络隐层激励函数可以简单地定义为线性无关的三元幂多项式,为此,我们有定理 1。

**定理 1** 当三元幂多项式序列按照多项式序列的 Graded lexicographic 次序<sup>[18]</sup>排列时,若采用整数  $r_1, r_2, r_3$  分别表示第  $i$  个三元幂多项式中变量  $u, v$  和  $w$  的幂次,  $\sigma$  表示其总幂次,则第  $i$  个幂多项式的表达式可以表示为:

$$p_i(u, v, w) = u^{r_1} v^{r_2} w^{r_3}; i = 1, 2, \dots, n, \quad (4)$$

其中:

$$r_1 = \left\lfloor \frac{1}{2} \left( 2\sigma + 3 - \sqrt{8i + 1 - \frac{4}{3}(\sigma^3 + 3\sigma^2 + 2\sigma)} \right) \right\rfloor$$

$$r_2 = \frac{(\sigma - r_1)(\sigma - r_1 + 1)}{2} + \frac{\sigma(\sigma + 1)(\sigma + 2)}{6} + \frac{\sigma + 1 - i - r_1}{6}$$

$$r_3 = \sigma - r_1 - r_2$$

$$\sigma = \left\lceil \frac{1}{3} \left( 81i + 3\sqrt{729i^2 - 3} \right)^{1/3} + \frac{1}{1/(81i + 3\sqrt{729i^2 - 3})^{1/3} - 2} \right\rceil$$

**证明** 由于三元幂多项式序列按照多项式序列的 Graded lexicographic 次序<sup>[18]</sup>排列,因而有:

$$\frac{\sigma(\sigma + 1)(\sigma + 2)}{6} < i \leq \frac{(\sigma + 1)(\sigma + 2)(\sigma + 3)}{6} \quad (5)$$

$$\frac{(\sigma - r_1)(\sigma - r_1 + 1)}{2} < i - \frac{\sigma(\sigma + 1)(\sigma + 2)}{6} \leq$$

$$\frac{(\sigma - r_1 + 1)(\sigma - r_1 + 2)}{2} \quad (6)$$

$$\frac{(\sigma - r_1)(\sigma - r_1 + 1)}{2} + \sigma - r_1 - r_2 + 1 =$$

$$i - \frac{\sigma(\sigma + 1)(\sigma + 2)}{6} \quad (7)$$

$$r_1 + r_2 + r_3 = \sigma \quad (8)$$

由于式(5)为一元三次不等式,又  $\sigma$  为整数,应用数学软件 Maple 10.0,可求解不等式(5),得:

$$\sigma = \left\lceil \frac{1}{3} \left( 81i + 3\sqrt{729i^2 - 3} \right)^{1/3} + \frac{1}{81i + 3\sqrt{729i^2 - 3}} - 2 \right\rceil$$

又,直接求解不等式(6),得:

$$\frac{2\sigma + 1 - \sqrt{8i + 1 - \frac{1}{3}(\sigma^3 - \sigma)}}{2} < r_1 \leq$$

$$\frac{2\sigma + 3 - \sqrt{8i + 1 - \frac{1}{3}(\sigma^3 + 3\sigma^2 + 2\sigma)}}{2}$$

结合  $r_1$  为整数的情况,从而有:

$$r_1 = \left\lfloor \frac{1}{2} \left( 2\sigma + 3 - \sqrt{8i + 1 - \frac{4}{3}(\sigma^3 + 3\sigma^2 + 2\sigma)} \right) \right\rfloor$$

由式(4),移项即得:

$$r_2 = \frac{(\sigma - r_1)(\sigma - r_1 + 1)}{2} + \frac{\sigma(\sigma + 1)(\sigma + 2)}{6} + \sigma + 1 - i - r_1$$

最后,由式(8),有:

$$r_3 = \sigma - r_1 - r_2 \quad \text{证毕}$$

在实际应用中,我们可以截取定理1中三元幂多项式序列的前  $n$  个多项式  $p_i(u, v, w)$ ,  $i = 1, 2, \dots, n$  作为广义多项式神经网络隐层各神经元激励函数(注:  $n$  为隐神经元数,可根据经验选取,如本文两个实例均选取  $n = (6 + 1) \times (6 + 2) \times (6 + 3)/6 = 84$ ,即所有幂次不大于6的三元幂多项式  $p_i(u, v, w)$  的个数。事实上,当选取的  $n$  值越大,其逼近精度越高)。

#### 1.4 网络参数迭代求解

若将约束点集作为隐曲面广义多项式神经网络的输入,式(1)定义的隐函数  $f_{\text{implicit}}(u, v, w)$  的函数值作为其期望输出,依据最陡梯度法原理,可推导得隐曲面广义多项式神经网络学习算法。

首先定义第  $i$  个隐神经元对第  $j$  个样本的激励响应  $q_i^{(j)}$ 、隐层对第  $j$  个样本的激励响应向量  $\mathbf{q}^{(j)}$ 、隐层对全体样本的激励响应矩阵  $\mathbf{Q}$ 、样本输出向量  $\boldsymbol{\gamma}$ 、网络参数向量  $\boldsymbol{\omega}$ 、网络误差函数  $E(\boldsymbol{\omega})$  分别如下<sup>[19]</sup>:

$$q_i^{(j)} = p_i(u_j, v_j, w_j) = u_j^{i_1} v_j^{i_2} w_j^{i_3}$$

$$\mathbf{q}^{(j)} = [q_1^{(j)} \quad q_2^{(j)} \quad \dots \quad q_n^{(j)}]^T \in \mathbf{R}^n$$

$$\mathbf{Q} = \begin{bmatrix} q_1^{(1)} & q_2^{(1)} & \dots & q_n^{(1)} \\ q_1^{(2)} & q_2^{(2)} & \dots & q_n^{(2)} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ q_1^{(m)} & q_2^{(m)} & \dots & q_n^{(m)} \end{bmatrix} \in \mathbf{R}^{m \times n}$$

$$\boldsymbol{\omega} = [\omega_1 \quad \omega_2 \quad \dots \quad \omega_n]^T \in \mathbf{R}^n$$

$$\boldsymbol{\gamma} = [0 \quad \dots \quad 0 \quad -1 \quad \dots \quad -1 \quad 1 \quad \dots \quad 1]^T \in \mathbf{R}^m$$

$$E(\boldsymbol{\omega}) = \frac{1}{2} \sum_{j=1}^m \left( \sum_{i=1}^n \omega_i q_i^{(j)} - f_j \right)^2$$

上式中  $E(\boldsymbol{\omega})$  对参数向量  $\boldsymbol{\omega}$  求偏导,得到  $E(\boldsymbol{\omega})$  的梯度  $\nabla E(\boldsymbol{\omega})$  表达式为:

$$\nabla E(\boldsymbol{\omega}) = \frac{\partial E(\boldsymbol{\omega})}{\partial \boldsymbol{\omega}} = \mathbf{Q}^T (\mathbf{Q}\boldsymbol{\omega} - \boldsymbol{\gamma}) \quad (9)$$

依据最陡梯度法的思想,网络学习迭代式为:

$$\boldsymbol{\omega}(k+1) = \boldsymbol{\omega}(k) - \eta \frac{\partial E}{\partial \boldsymbol{\omega}} \Big|_{\boldsymbol{\omega}=\boldsymbol{\omega}(k)} \quad (10)$$

其中学习率  $\eta > 0$ , 迭代次数  $k = 0, 1, 2, \dots$ 。

将式(9)代入式(10),可得网络学习算法如下:

$$\boldsymbol{\omega}(k+1) = \boldsymbol{\omega}(k) - \eta (\mathbf{Q}^T (\mathbf{Q}\boldsymbol{\omega}(k) - \boldsymbol{\gamma})) \quad (11)$$

## 2 应用实例

### 2.1 仿真实例及结果

为了验证本文方法的可行性及去噪效果,我们在 Visual

C++ 和 OpenGL 图形库上开发了本文算法的仿真实验平台。

实验过程中,根据迭代式(11)来求解神经网络权值参数。如1.1节所述,若将原始三维模型的点坐标作为点云数据集,则约束点集由点云数据集和式(2)求解。另外,设神经网络权值向量  $\boldsymbol{\omega}$  的初始值随机给出,学习率  $\eta$  取为0.1,目标误差设定为  $10^{-2}$ ,最大迭代次数设定为2000,隐神经元数目如前所述可设定为84,则由约束点集及激励矩阵  $\mathbf{Q}$  的定义可求得矩阵  $\mathbf{Q}$ 。从而,式(11)中  $\mathbf{Q}, \boldsymbol{\gamma}$  为常数矩阵或常数向量,由该式最终可迭代求解出神经网络权值向量。此时的神经网络结构及其参数即表达了原始三维模型的隐式曲面。最后,采用的经典的 Bloomenthal 网格化算法对所重建的隐式曲面进行网格化处理<sup>[10]</sup>。

图2为本文方法对部分简单封闭物体的带噪点云数据模型的三维重建结果。其中图2(a)、(c)为原始带噪三维点云模型显示,由图可看出,该三维模型的点云在模型表面较粗糙,可视为在数据采集时携带的一定随机噪声。

图2(b)、(d)为采用本文算法重建出的隐式曲面经网格化后的三角形网格模型。由重建前后的模型显示效果进行对比观察,我们不难看出,重建后的三维网格模型光滑性较好,且较好地保持了原始模型的尖锐特征。

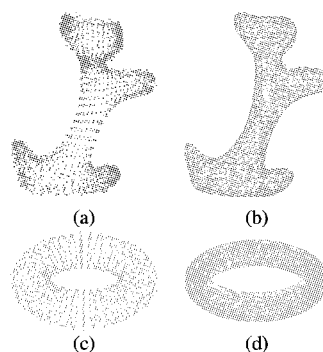


图2 带噪点云数据隐式曲面重建实例

### 2.2 实验结果分析

上述仿真实验结果表明,本文方法对隐式曲面三维重建是可行且有效的,它能够去除点云模型中的噪声,重建出光滑性较好的三维实体。并且,本文算法去噪时具有如下优点,即不需要对带噪声情况进行特殊处理,去噪过程很自然地隐含在本文方法中。

需要进一步指出的是,上述仿真实验均是在:1)未对神经网络学习算法进行进一步优化;2)未对点云数据进行聚类分析、特征提取等数据简化处理;3)未采用单元分解法对点云数据进行分割、分块处理,等情况下进行的。这些也将是我们后续研究工作的主要方面和重要方向。

## 3 结语

本文针对点云数据的三维重建问题,提出了一种隐曲面广义多项式神经网络方法。该方法是隐式曲面三维重建的一种新的方法,具有一定的实际应用意义。

### 参考文献:

- [1] 陈飞舟,陈志杨,丁展,等. 基于径向基函数的残缺点云数据修复[J]. 计算机辅助设计与图形学学报, 2006, 18(9): 1414-1419.
- [2] OHTAKE Y, BALYZEV A, SEIDEL H. A composite approach to meshing scattered data[J]. Graphical Models, 2006, 68(3): 255-267.

(下转第2064页)

粒子采样数目对目标跟踪误差影响很大,粒子数较高时,可有效跟踪目标,粒子数目较低时系统跟踪误差较大,且容易发散;不同粒子数目下,UPF-TBD 算法比 PF-TBD 算法跟踪目标更为准确,采用较少的粒子也可以达到一定的目标跟踪性能。

#### 4 结语

基于 UPF 的 TBD 算法应用于运动小目标检测和跟踪性能优越。在较高的信噪比下,算法能在较小的延迟时间内及时捕获运动小目标,并且能够迅速稳定到较为可靠的目标检测和跟踪状态。在较低的信噪比情况下,其检测和跟踪性能有所下降,但仍可较为稳定地检测和跟踪小目标。而 PF-TBD 算法在高信噪比下的目标捕获概率及灵敏度都要低于 UPF-TBD 算法,在低信噪比下 PF-TBD 算法处理较为吃力,目标捕获所需时间较长,同时目标捕获概率较低,很难用于目标出现判定,目标跟踪也容易发散。不同粒子数的对比实验也表明,基于 UPF 的 TBD 算法,对采样粒子数的要求要低于 PF-TBD,在本文测试的不同的粒子数情况下表现出较为稳定的检测性能,而在相同粒子数情况下 UPF-TBD 算法的检测概率和跟踪性能明显优于 PF-TBD 算法。这表明,UPF-TBD 算法是一种性能优越的小目标 TBD 算法,在小目标的检测和跟踪方法方面有较强的处理能力,适用于复杂环境下小目标的联合检测和跟踪。

#### 参考文献:

- [1] HARMON J L. Track-before-detect performance for a high PRF search mode [C]// IEEE Proceedings of the 1991 Radar Conference. Beijing: IEEE, 1991: 11 - 15.
- [2] KRAMER J D R, REID W S. Track-before-detect processing for a range-ambiguous radar [C]// IEEE Radar Conference. Boston, Mass, USA: IEEE, 199: 113 - 116.
- [3] SAMOND D J, BIRCH H. A particle filter for track-before-detect [C]// IEEE Proceedings of the American Control Conference. Washington, DC: IEEE, 2001: 3755 - 3760.
- [4] ROLLASON M, SAMOND D J. A particle filter for track-before-detect of a target with unknown amplitude [C]// IEEE International Seminar on Target Tracking: Algorithms and Applications. Boston, Mass, USA: IEEE, 2001: 1 - 4.
- [5] RUTTEN M G, GORDON N J, MASKELL S. Efficient particle-based track-before-detect in Rayleigh noise [C]// Fusion 2004: Proceedings of the 7th International Conference on Information Fusion. Sweden: IEEE, 2004: 693 - 700.
- [6] 胡洪涛, 敬忠良, 胡士强. 基于辅助粒子滤波的红外小目标检测前跟踪算法[J]. 控制与决策, 2005, 20(11): 1208 - 1212.
- [7] MERWE R, DOUCET A, FREITAS N. The unscented particle filter, CUED/F-INFENG/TR 380 [R]. Cambridge, UK: Cambridge University, Engineering Department, 2000.
- [8] JULIER S J, UHLMANN J K. A new approach for filtering nonlinear system [C]// Proceedings of the American Control Conference. Washington: IEEE, 1995, 3: 1628 - 1632.
- [9] JULIER S J. The scaled unscented transformation [C]// Proceedings of the 2002 American Control Conference. 2002, 6: 4555 - 4559.
- [10] WAN E A, DER MERWE U. The unscented Kalman filter for nonlinear estimation [C]// Adaptive Systems for Signal Processing, Communications, and Control Symposium. [S. l.]: IEEE, 2000, 1: 151 - 158.
- [11] 陈华明, 孙广富, 卢焕章. 基于动态规划和置信度检验的小目标检测 [J]. 系统工程与电子技术, 2003, 4(25): 472 - 475.
- [12] LIOU R J, AZIMI-SADJADI M R. Dim target detection and clutter rejection using modified high order correlation neural network [C]// Proceedings of the DCNN Seattle. Alabama: IEEE, 1992: 701 - 706.
- [3] CARR J C, REATSON R K, CHERRIE J, *et al.* Reconstruction and representation of 3D objects with radial basis functions [C]// Proceedings of ACM SIGGRAPH Conference on Computer Graphics. New York: ACM, 2001: 67 - 76.
- [4] LEVIN D. Mesh-independent surface interpolation [C]// Geometric Modeling for Scientific Visualization. Heidelberg, Germany: Springer-Verlag, 2003: 37 - 49.
- [5] 杜佳, 张丽艳, 王宏涛. 基于径向基函数的三角网格曲面孔洞修补算法 [J]. 计算机辅助设计与图形学学报, 2005, 17(9): 1976 - 1982.
- [6] 王青, 王融青, 鲍虎军, 等. 散乱数据点的增量快速曲面重建算法 [J]. 软件学报, 2000, 11(9): 1221 - 1227.
- [7] 吴刚. 隐含多项式曲线曲面拟合次数的确定研究 [J]. 计算机研究与发展, 2007, 44(1): 148 - 153.
- [8] 李道伦, 卢德唐, 孔祥言, 等. 基于 BP 神经网络的隐式曲面构造方法 [J]. 计算机研究与发展, 2007, 44(3): 467 - 472.
- [9] LORENSSEN W, CLINE H. Marching cubes: a high resolution 3D surface construction algorithm [J]. Computer Graphics, 1987, 21(4): 163 - 169.
- [10] BLOOMENTHAL J. An implicit surface polygonizer [M]. San Diego, USA: Academic Press Professional, 1994: 324 - 349.
- [11] OHTAKE Y, BELYAEV A, SEIDEL H. 3 D scattered data interpolation and approximation with multilevel compactly supported RBFs [J]. Graphical Models, 2005, 67(3): 150 - 165.
- [12] SAVCHENKO V, PASKO A, OKUNEV O, *et al.* Function representation of solids reconstructed from scattered surface points and contours [J]. Computer Graphics Forum, 1995, 14(4): 181 - 188.
- [13] FLOATER M S, ISKE A. Multistep scattered data interpolation using compactly supported radial basis functions [J]. Computational and Applied Mathematics, 1996, 73(1/2): 65 - 78.
- [14] ALEX M, BEHR J, COHEN-OR D. Computing and rendering point set surfaces [J]. IEEE Transactions on Visualization and Computer Graphics, 2003, 9(1): 1 - 12.
- [15] WENDLAND H. Scattered Data Approximation. Approximation [M]. Cambridge, UK: Cambridge University Press, 2005.
- [16] CRETU A - M, PETRIU E M, PATRY G G. A comparison of neural networks architectures for geometric modelling of 3D objects [C]// IEEE International Conference on Computational Intelligence for Measurement Systems and Applications. [S. l.]: IEEE, 2004: 155 - 160.
- [17] 梁学章, 李强. 多元逼近 [M]. 北京: 国防工业出版社, 2005.
- [18] DUNKL C F, XU Y. Orthogonal Polynomials of Several Variables [M]. Cambridge, UK: Cambridge University Press, 2001.
- [19] 张雨浓, 曾庆淡, 肖秀春, 等. 复指数 Fourier 神经网络隐神经元衍生算法 [J]. 计算机应用, 2008, 28(10): 2503 - 2506.

(上接第 2045 页)