

分块二维保局投影方法及其在人脸识别中的应用

徐冬冬,陈秀宏

(江南大学 信息工程学院,江苏 无锡 214122)

(xd8326@sina.com)

摘要:提出了一种基于图像分块的二维保局投影(分块2DLPP)的人脸识别方法。先对原始图像矩阵进行分块,然后对分块子图像施行2DLPP方法,再将各个分块按照一定的次序整合起来进行特征提取,从而实现图像降维。该方法能有效地提取图像的局部特征。实验表明:该方法在识别性能上优于2DLPP方法。

关键词:人脸识别;图像分块;特征提取;二维保局投影

中图分类号: TP391.41 **文献标志码:** A

Method of modular 2DLPP and its application in face recognition

XU Dong-dong, CHEN Xiu-hong

(School of Information Engineering, Jiangnan University, Wuxi Jiangsu 214122, China)

Abstract: A method of Two-Dimensional Locality Preserving Projections (2DLPP) for face recognition was proposed, based on modular image. Firstly, the original images were divided into modular images by presented approach. Secondly, the 2DLPP method was applied to the sub-images obtained from the previous step. Then, the modular images were combined according to a certain order to extract the features. Therefore, the dimension of the original images could be depressed. This approach could distill the local features of the images effectively. The experimental results indicate that the proposed method is superior to 2DLPP in recognition performance.

Key words: face recognition; modular image; feature extraction; Two-Dimensional Locality Preserving Projections (2DLPP)

0 引言

人脸识别作为生物识别的一个重要的研究方向,多年来一直是模式识别和人工智能领域的一个研究热点。特征提取是人脸识别的关键步骤,其主要目的是降维,它的主要思想是将原始样本投影到一个低维特征空间,得到最能反应样本本质或进行样本区分的低维样本特征。子空间方法因其具有计算代价小、可行性好等特点,被广泛地应用于人脸的特征提取,已成为人脸识别的主流方法之一^[1]。

保局投影(Locality Preserving Projections, LPP)是一种新的子空间方法,是由He等人^[2]提出的,它的本质是对非线性拉普拉斯特征映射的线性逼近。近来越来越多的研究表明,图像数据可以被表示为非线性的流形结构。当数据位于非线性子流形时,LPP可以很好地保留数据的局部信息。与主成分分析(Principal Component Analysis, PCA)算法提取最具有代表性的特征来进行降维不同,LPP算法可以提取最具有判别性的特征来进行降维,因此在保留局部特征时具有明显的优势。LPP是基于一维向量的特征提取方法,然而人脸图像矩阵是二维的,所以在特征提取前,首先要将图像矩阵转换成一维的图像向量。但是这样的操作可能会导致图像空间局部信息的丢失,以及转换后的一维向量维数过高,从而给后续操作带来困难^[3]。Chen等人^[4]提出了二维保局投影(Two-Dimensional Locality Preserving Projections, 2DLPP)算法,并将其成功用于人脸识别。2DLPP直接针对二维图像矩阵进行运算,避免了图像信息的丢失;但是在样本数量较多的情况下,该方法会因

产生的数据量过于庞大而无法完成计算。本文提出一种新的图像特征提取的方法,称为分块2DLPP。该方法可以在图像样本较多时完成计算并有较高的识别率。2DLPP是分块2DLPP的特例。在ORL和Yale人脸库上的实验表明,所提出的方法在识别性能上优于2DLPP方法。

1 2DLPP方法

设有 N 个图像组成的训练样本集 X_1, X_2, \dots, X_N ,样本共有 C 类,第 i 类有 n_i 个训练样本图像,训练样本总数为 $N = \sum_{i=1}^C n_i$,每个图像均为 $m \times n$ 维。由于图像维数过高,很难将传统的方法直接应用于识别,所以降维尤其重要^[5]。子空间方法就是寻求一组投影向量 w_1, w_2, \dots, w_r (w_i 为 n 维的单位列向量),将原始的 $m \times n$ 维的图像分别投影到 w_1, w_2, \dots, w_r 上得到一组 m 维的特征向量,从而达到降低维数的目的。LPP的本质是对非线性拉普拉斯特征映射的线性逼近。它的目标函数如下:

$$\min \sum_{i,j} (y_i - y_j)^T S_{ij} \quad (1)$$

其中, $y_i = w^T x_i$ 是原始数据向量 x_i 的一维表示。

2DLPP是对二维图像矩阵执行LPP算法,也就是用以下最优化问题的解 w 作为投影向量:

$$\min \sum_{i,j} S_{ij} \| (X_i - X_j) w \|^2 \quad (2)$$

再将每个 $m \times n$ 维的图像矩阵 X_i 通过下面的变换投影到 w 上得到一个 m 维的投影特征 y_i

收稿日期:2009-03-18;修回日期:2009-05-06。

作者简介:徐冬冬(1983-),女,山东滨州人,硕士研究生,主要研究方向:模式识别; 陈秀宏(1964-),男,江苏泰兴人,教授,博士,主要研究方向:优化理论与方法、模式识别。

$$y_i = X_i w; i = 1, 2, \dots, N \quad (3)$$

通过简单的代数运算,可以得到

$$\begin{aligned} \sum_{i < j} S_{ij} \|y_i - y_j\|^2 &= \sum_{i < j} S_{ij} \|(X_i - X_j)w\|^2 = \\ &= \sum_{i < j} S_{ij} ((X_i - X_j)w)^T (X_i - X_j)w = \\ &= \sum_{i < j} S_{ij} w^T (X_i - X_j)^T (X_i - X_j)w = \\ &= w^T \sum_{i < j} S_{ij} ((X_i^T X_i - X_i^T X_j) + (X_j^T X_j - X_j^T X_i))w = \\ &= 2w^T \sum_{i < j} S_{ij} (X_i^T X_i - X_i^T X_j)w = \\ &= 2w^T \left(\sum_{i < j} X_i^T S_{ij} I_m X_i - \sum_{i < j} X_i^T S_{ij} I_m X_j \right)w = \\ &= 2w^T X^T (D \otimes I_m - S \otimes I_m) Xw = \\ &= 2w^T X^T (L \otimes I_m) Xw \end{aligned} \quad (4)$$

其中:

$$S_{ij} = \begin{cases} \exp\left(\frac{-\|X_i - X_j\|^2}{t}\right), & X_i \text{ 是 } X_j \text{ 的 } d \text{ 个最近邻之一} \\ 0, & \text{其他} \end{cases}$$

S 是由 S_{ij} 构成的对称矩阵, D 是由 S 的行和或列和组成的对角矩阵, 即 $D_{ii} = \sum_j S_{ij} L = D - S$ 是拉普拉斯矩阵。 I_m 是 m 阶的单位矩阵, $X^T = [X_1^T, X_2^T, \dots, X_N^T]$ 。符号 \otimes 表示矩阵的 Kronecker 积。两个矩阵 A 与 B 的 Kronecker 积 $A \otimes B$ 定义为 A 中的每个元素与 B 相乘所得的矩阵^[6]。

在优化问题式(2)中增加归一化约束条件 $w^T X^T (D \otimes I_m) Xw = 1$ 得到以下约束优化问题

$$\begin{aligned} \min \quad & w^T X^T (L \otimes I_m) Xw \\ \text{s. t.} \quad & w^T X^T (D \otimes I_m) Xw = 1 \end{aligned} \quad (5)$$

对应的 Lagrange 函数为:

$$g(w, \lambda) = w^T X^T (L \otimes I_m) Xw + \lambda(1 - w^T X^T (D \otimes I_m) Xw) \quad (6)$$

利用一阶必要条件, 问题(5)的解 w 应满足以下关系:

$$X^T (L \otimes I_m) Xw = \lambda X^T (D \otimes I_m) Xw \quad (7)$$

即式(5)的解 w 可以看作是广义特征值方程(7)的最小特征值所对应的特征向量。这样, 最优投影向量组 w_1, w_2, \dots, w_r 可取为式(7)的 r 个最小特征值所对应的特征向量。

对已知的样本 X_i , 令

$$y_k^{(i)} = X_i w_k; k = 1, 2, \dots, r \quad (8)$$

称 $y_1^{(i)}, y_2^{(i)}, \dots, y_r^{(i)}$ 为图像样本 X_i 的投影特征矢量, 它是 X_i 的局部保留成分。利用获得的局部保留成分可构成图像样本 X_i 的特征矩阵 $Y_i = (y_1^{(i)}, y_2^{(i)}, \dots, y_r^{(i)})$, 即:

$$Y_i = X_i [w_1, w_2, \dots, w_r] = X_i Q \quad (9)$$

其中, $Q = [w_1, w_2, \dots, w_r]$ 称为最优投影矩阵。

2 分块 2DLPP 方法

2.1 分块 2DLPP 方法的思想与最优投影矩阵

分块 2DLPP 的思想是先将一个 $m \times n$ 的图像矩阵 X 分成 $p \times q$ 分块图像矩阵, 即:

$$X = \begin{bmatrix} (X)_{11} & (X)_{12} & \dots & (X)_{1q} \\ (X)_{21} & (X)_{22} & \dots & (X)_{2q} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ (X)_{p1} & (X)_{p2} & \dots & (X)_{pq} \end{bmatrix}$$

其中每个子图像矩阵 X_{kl} 是 $f \times g$ 的矩阵, $pf = m, qg = n$ 。然后

将所有训练图像样本的子图像看作训练图像样本施行 2DLPP 方法。

设模式类别的数目为 C , 即共有以下 C 类: c_1, c_2, \dots, c_C , 共有训练样本 N 个, 每个样本图像是 $m \times n$ 的矩阵。训练样本图像 X_i 的 $p \times q$ 分块矩阵表示为:

$$X_i = \begin{bmatrix} (X_i)_{11} & (X_i)_{12} & \dots & (X_i)_{1q} \\ (X_i)_{21} & (X_i)_{22} & \dots & (X_i)_{2q} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ (X_i)_{p1} & (X_i)_{p2} & \dots & (X_i)_{pq} \end{bmatrix} \quad (10)$$

这样, 分块后的训练样本数共有 pqN 个。

与 2DLPP 类似, 最优投影向量组 w_1, w_2, \dots, w_r 可取为

$$X^T (L \otimes I_m) Xw = \lambda X^T (D \otimes I_m) Xw \quad (11)$$

的 r 个最小特征值所对应的特征向量。其中:

$$X^T (L \otimes I_m) X =$$

$$\begin{bmatrix} X_{11}^T (L_{11} \otimes I_f) X_{11} & X_{12}^T (L_{12} \otimes I_f) X_{12} & \dots & X_{1q}^T (L_{1q} \otimes I_f) X_{1q} \\ X_{21}^T (L_{21} \otimes I_f) X_{21} & X_{22}^T (L_{22} \otimes I_f) X_{22} & \dots & X_{2q}^T (L_{2q} \otimes I_f) X_{2q} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ X_{p1}^T (L_{p1} \otimes I_f) X_{p1} & X_{p2}^T (L_{p2} \otimes I_f) X_{p2} & \dots & X_{pq}^T (L_{pq} \otimes I_f) X_{pq} \end{bmatrix} \quad (12)$$

$X_{kl} = [(X_1)_{kl}^T, (X_2)_{kl}^T, \dots, (X_N)_{kl}^T]^T$ 是 $Nf \times g$ 的矩阵, $(X_i)_{kl}$ 指第 i 个训练样本图像的第 k 行第 l 列个分块, $k = 1, 2, \dots, p, l = 1, 2, \dots, q, I_f$ 是维数为 $f \times f$ 的单位矩阵。

$$(S_{kl})_{ij} =$$

$$\begin{cases} \exp\left(\frac{-\|(X_i)_{kl} - (X_j)_{kl}\|^2}{t}\right), & X_i \text{ 是 } X_j \text{ 的 } d \text{ 个最近邻之一} \\ 0, & \text{其他} \end{cases} \quad (13)$$

S_{kl} 是由 $(S_{kl})_{ij}$ 构成的对称矩阵, D_{kl} 是由 S_{kl} 的行和或列和组成的对角矩阵, 即 $(D_{kl})_{ii} = \sum_j (S_{kl})_{ij} L_{kl} = D_{kl} - S_{kl}$ 称为拉普拉斯矩阵。

$X^T (D \otimes I_m) X$ 可类似定义。

2.2 特征提取与分类

最优投影矩阵 $Q = [w_1, w_2, \dots, w_r]$ 可用于特征提取。对第 i 个训练样本, 其 $p \times q$ 分块矩阵如式(10)所示, 则它的特征矩阵为:

$$Y_i = [y_1^{(i)}, y_2^{(i)}, \dots, y_r^{(i)}] = \begin{bmatrix} (X_i)_{11} & (X_i)_{12} & \dots & (X_i)_{1q} \\ (X_i)_{21} & (X_i)_{22} & \dots & (X_i)_{2q} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ (X_i)_{p1} & (X_i)_{p2} & \dots & (X_i)_{pq} \end{bmatrix} Q \quad (14)$$

对测试样本:

$$X_0 = \begin{bmatrix} (X_0)_{11} & (X_0)_{12} & \dots & (X_0)_{1q} \\ (X_0)_{21} & (X_0)_{22} & \dots & (X_0)_{2q} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ (X_0)_{p1} & (X_0)_{p2} & \dots & (X_0)_{pq} \end{bmatrix}$$

它的特征矩阵为:

$$Y_0 = [y_1^{(0)}, y_2^{(0)}, \dots, y_r^{(0)}] = \begin{bmatrix} (X_0)_{11} & (X_0)_{12} & \dots & (X_0)_{1q} \\ (X_0)_{21} & (X_0)_{22} & \dots & (X_0)_{2q} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ (X_0)_{p1} & (X_0)_{p2} & \dots & (X_0)_{pq} \end{bmatrix} Q \quad (15)$$

本文利用最近邻分类器进行分类。两个特征矩阵 $Y_0 = [y_1^{(0)}, y_2^{(0)}, \dots, y_r^{(0)}]$ 和 $Y_i = [y_1^{(i)}, y_2^{(i)}, \dots, y_r^{(i)}]$ 之间的距离 $d(Y_0, Y_i) = \left(\sum_{k=1}^r \|y_k^{(0)} - y_k^{(i)}\|^2 \right)^{1/2}$ 。如果 $d(Y_0, Y_{i_0}) = \min_i d(Y_0, Y_i)$, 且 $X_{i_0} \in c_k$, 那么, $X_0 \in c_k$ 。

若分块矩阵是 1×1 的, 即分块矩阵中只有一个子矩阵, 此子矩阵就是原始图像本身, 那么分块 2DLPP 就是 2DLPP。这表明 2DLPP 是分块 2DLPP 的特殊情况, 因此, 本文的分块 2DLPP 方法是 2DLPP 方法的推广。

3 实验结果与分析

实验中随机地选取训练样本和测试样本, 结果取 10 次实验结果的平均值。

3.1 实验 1

实验 1 是在 ORL 标准人脸库 (<http://www.uk.research.att.com/facedatabase.html>) 上进行的。ORL 人脸库由 40 个人、每人 10 幅图像组成, 其中人的脸部表情和脸部细节有着不同程度的变化, 人脸姿态也有不同程度的变化^[7]。为了简化运算, 提高运算速度, 本文实验所用的图像大小为 64×64 , 如图 1 所示。

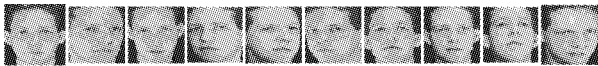


图 1 本实验所用 ORL 人脸

本实验是随机采用 20 个人的图像进行的, 以每人的任意 5 幅图像作为训练样本, 剩余 5 幅图像作为测试样本, 这样训练样本和测试样本的数目均为 100。

实验的识别率和特征向量之间的对应关系见图 2。图 2 中给出了对 ORL 图像矩阵进行 2×2 和 4×4 两种分块后分别用本文方法实验得到的结果, 分块子矩阵的大小分别为 32×32 和 16×16 。采用的分类器是最近邻分类器。

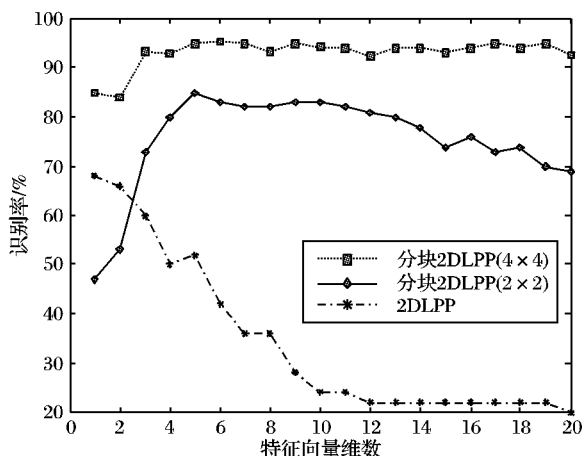


图 2 利用 5 幅图像进行训练的识别率比较

从图 2 中可以看出, 分块 2DLPP (4×4) 方法的识别率大多数在 90% 以上, 分块 2DLPP (2×2) 的识别率大多数稳定在 70% 以上, 且分块 2DLPP 方法的识别率相对比较平稳; 而 2DLPP 方法的识别率随着特征向量维数的增加呈现出下降的趋势。

表 1 给出了分别随机采用每人的任意 4 幅、5 幅和 6 幅图像进行训练的三种方法最高的识别率比较, 括号中的数字表示投影轴的数目。

从表 1 中可以看出, 在训练样本图像的数目相同时, 分块 2DLPP 方法比 2DLPP 方法的识别率更高。

表 1 实验 1 不同训练样本数目的最高识别率 %

每人训练 样本的数目	2DLPP	分块 2DLPP (2×2)	分块 2DLPP (4×4)
3	12.800 0(2)	80.000 0(2)	89.285 7(5)
4	18.333 3(2)	82.833 3(11)	92.500 0(5)
5	68.000 0(1)	85.000 0(5)	95.400 0(6)

表 2 给出了运用每人的任意 5 张图像进行训练, 剩余 5 张图像进行测试的方法综合性能的比较。

表 2 实验 1 综合性能比较

方法	识别率/%	特征维数	识别时间/s
2DLPP	50	64×4	31.750
2DLPP(2×2)	80	64×4	18.000
2DLPP(4×4)	94	64×4	1.594

从表 2 可以看出, 在降低到相同的特征维数时, 分块 2DLPP 方法比 2DLPP 方法节省很多时间, 且识别率更高。

3.2 实验 2

实验 2 是在 Yale 标准人脸库 (<http://www.cvc.yale.edu/projects/yalefaces/yalefaces.html>) 上进行的。Yale 人脸库由 15 个人、每人 11 幅图像组成, 其中主要有光照条件的变化和人脸表情的变化。如, 笑或不笑、戴或不戴眼睛等。实验中图像大小为 100×80 , 如图 3 所示。



图 3 本实验所用 Yale 人脸

本实验均随机采用 10 个人的图像进行, 以每人的任意 5 幅图像作为训练样本, 剩余 6 幅图像作为测试样本, 这样训练样本的数目为 50, 测试样本的数目为 60。

识别率和特征向量之间的对应关系见图 3。图 3 中给出了对 Yale 人脸图像矩阵进行 2×2 和 4×4 两种分块后分别用本文方法实验得到的结果。分块子矩阵的大小分别为 50×40 和 25×20 。采用的分类器是最近邻分类器。

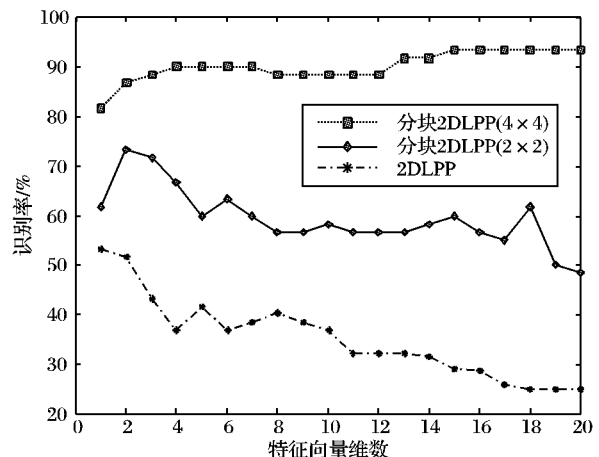


图 4 利用 5 幅图像进行训练的识别率比较

从图 4 中可以看出, 分块 2DLPP (4×4) 方法的识别率大多数在 85% 以上, 分块 2DLPP (2×2) 的识别率大多数稳定在 60% 左右, 而 2DLPP 方法的识别率相对较低。

表 3 给出了分别随机采用每人的任意 4 幅、5 幅和 6 幅图像

进行训练的最高的识别率,括号中的数字表示投影轴的数目。

表3 实验2 不同训练样本数目的最高识别率 %

每人训练 样本的数目	2DLPP	分块 2DLPP (2 × 2)	分块 2DLPP (4 × 4)
4	28.5714(2)	44.2857(10)	77.1429(20)
5	53.6667(1)	73.3333(2)	93.0000(15)
6	36.0000(30)	82.0000(20)	94.0000(20)

表3显示在训练样本图像的数目相同时,本文提出方法的识别率比2DLPP的识别率高很多。表明本文方法在识别性能上优于2DLPP方法。

表4给出了采用每人的任意5幅图像进行训练,其余6幅图像进行测试的方法综合性能比较。

表4 实验2 综合性能比较

方法	识别率/%	特征维数	识别时间/s
2DLPP	51.6667	100 × 2	19.4850
2DLPP(2 × 2)	73.3333	100 × 2	0.5780
2DLPP(4 × 4)	86.6667	100 × 2	0.3060

从表4可以看出,在降低到相同的特征维数时,本文提出的方法识别率更高,所用的时间更少。可见,本文的方法在综合性能上优于2DLPP方法。

在式(7)中, $L \otimes I_m$ 和 $D \otimes I_m$ 均为维数为 $(Nm) \times (Nm)$ 的矩阵,且 w 的系数矩阵大小为 $n \times n$;而在式(11)中, $L \otimes I_m$ 和 $D \otimes I_m$ 的大小均为 $(N \times f) \times (N \times f)$, w 的系数矩阵的维数为 $g \times g$ 。由于 $m = p \times f$, $n = q \times g$,当 $p, q \geq 2$ 时,求最优投影向量时分块2DLPP要比2DLPP方法的运算量小得多,速度因此会快很多。

4 结语

本文提出了分块2DLPP的人脸识别方法。该方法是一种基于子图像矩阵的线性判别分析方法,它是2DLPP的推

广。在该方法中,对各个分块进行如式(12)所示的变换,即2DLPP方法,然后进行整体的特征提取从而使整个图像降维,这样可得到较高的识别率并提高识别速度。另外,由于分块2DLPP的运算量较小,与2DLPP相比,该方法可适用于图像样本较多的情况。在ORL和Yale人脸库上的实验结果表明,分块2DLPP法在识别性能上优于2DLPP方法,且具有健壮性。

参考文献:

- [1] YE J, JANARDAN R, LI Q. GPCA: An efficient dimension reduction scheme for image compression and retrieval [C]// Proceedings of the 10th ACM SIGKDD International Conference on Knowledge Discovery and Data Mining. New York, ACM Press, 2004: 354 - 363.
- [2] HE X F, NIYOGI P. Locality preserving projections [EB/OL]. [2009 - 01 - 05]. http://books.nips.cc/papers/files/nips16/NIPS2003_AA20.pdf.
- [3] 祝磊,朱善安.基于2维保局投影的人脸识别[J].中国图象图形学报,2007,12(11): 2043 - 2047.
- [4] CHEN SI-BAO, ZHAO HAI-FENG, KONG MIN, et al. 2D-LPP: A two-dimensional extension of locality preserving projections [J]. Neurocomputing, 2007, 70(4/6): 912 - 921.
- [5] HE X F, YAN S, HU Y, et al. Face recognition using Laplacian-faces [J]. IEEE Transactions on Pattern Analysis and Machine Intelligence, 2005, 27(3): 328 - 340.
- [6] HU DE-WEN, FENG GUI-YU, ZHOU ZONG-TAN. Two-dimensional locality preserving projections(2DLPP) with its application to palmprint recognition [J]. Pattern Recognition, 2007, 40(1): 339 - 342.
- [7] BELKIN M, NIYOGI P. Laplacian eigenmaps and spectral techniques for embedding and clustering [C]// Proceedings of Neural Information Processing Systems Conference. Cambridge, MA: MIT Press, 2001: 585 - 591.

(上接第2037页)

本文对三维孔洞没有投影到二维平面上处理,而是直接进行三角化,这对于某些高度折叠的孔洞可能会产生杂乱的三角形,当然,大部分的情况是可以处理的。下一步,我们将进一步研究高曲率孔洞的调整问题,以期得到更良好的修补效果和更无缝的连接。

参考文献:

- [1] DAVIS J, MARSCHNER R, GARR M, et al. Filling holes in complex surfaces using volumetric diffusion [C]// Proceedings of the First International Symposium on 3D Data Processing Visualization and Transmission. Padova, Italy: IEEE, 2002: 428 - 438.
- [2] LIEPA P. Filling holes in meshes [C]// Proceedings of the Eurographics /ACM SIGGRAPH Symposium on Geometry Proceeding. New York: ACM, 2003: 200 - 205.
- [3] CARR J C, BEATSON R K, CHERRIE J B, et al. Reconstruction and Representation of 3D Objects with Radial Basis Functions [C]// Proceedings of the 28th Annual Conference on Computer Graphics and Interactive Techniques. New York: ACM, 2001: 67 - 76.
- [4] 杜佶,张丽艳,王宏涛,等.基于径向基函数的三角网格曲面孔洞修补算法[J].计算机辅助设计与图形学学报,2005,17(9):

1976 - 1982.

- [5] 陈文亮,张胜,金修宝.有限元网格的孔洞修补算法研究[J].计算机学报,2005,28(6): 1068 - 1071.
- [6] 张丽艳,周儒荣,周来水.三角网格模型孔洞修补算法研究[J].应用科学学报,2002,20(3): 221 - 224.
- [7] 成欣,周明全,耿国华,等.空间三角网格曲面的补洞方法[J].计算机应用研究,2006,23(6): 158 - 160.
- [8] VARNUSKA M, PARUS J, KOLINGEROVA I. Simple holetriangulation in surface reconstruction [C]// Proceedings of ALGORITHM 2005. Bratislava, Slovakia: Vydavatelstvo STU, 2005: 280 - 289.
- [9] HORMANN K. Theory and applications of parameterizing triangulations [D]. Erlangen: University of Erlangen, 2001.
- [10] 张洁,岳玮宁,王楠,等.三角网格模型的各向异性孔洞修补算法[J].计算机辅助设计与图形学学报,2007,19(7): 892 - 897.
- [11] 袁天然.三角网格模型光顺、简化和缝补技术的研究及应用 [D].南京:南京航空航天大学,2007.
- [12] 王宏涛,杜佶,刘胜兰,等.基于径向基函数的多种类型孔洞修补算法研究[J].机械科学与技术,2005,24(6): 744 - 747.
- [13] JUN Y. A piecewise hole filling algorithm in reverse engineer [J]. Computer-Aided Design, 2005, 37(2): 263 - 270.