

## 基于曲波变换的图像去噪新算法

厉丹<sup>1,2</sup>, 钱建生<sup>1</sup>, 王超<sup>1</sup>

(1. 中国矿业大学 信息与电气工程学院, 江苏 徐州 221000; 2. 中国矿业大学 徐海学院, 江苏 徐州 221000)

(lidanonline@163.com)

**摘要:**比较了小波变换和曲波变换,指出小波变换只具有点状奇异性的不足之处和曲波变换具有多尺度各向奇异性的优点,分析了现有的基于曲波变换的图像去噪方法,并对目前基于曲波变换的去噪算法进行了改进,提出结合 Wrapping 和 Cycle Spinning 的 WSCurvelet 去噪新算法。仿真实验的结果证实了该算法减少了伪 Gibbs 现象,较好地保留了图像的细节和纹理,获得了更好的视觉效果和更高的峰值信噪比。

**关键词:**阈值; 小波变换; 曲波变换; 循环平移; 图像去噪

**中图分类号:** TP391.41; TP751 **文献标志码:** A

## New image denoising method based on Curvelet transform

LI Dan<sup>1,2</sup>, QIAN Jian-sheng<sup>1</sup>, WANG Chao<sup>1</sup>

(1. College of Information and Electric Engineering, China University of Mining and Technology, Xuzhou Jiangsu 221008, China;

2. Xuhai College, China University of Mining and Technology, Xuzhou Jiangsu 221008, China)

**Abstract:** The comparison between wavelet transform and Curvelet transform indicates that wavelet transform only has dot singularity and Curvelet transform has advantage of multi-scale singularity in each direction. After analyzing the method of image denoising by Curvelet transform, the paper proposed a new method of combining wrapping and cycle spinning Curvelet transform to improve the existing algorithm. According to the simulation experiment, the results of the denoised pictures show that the improved algorithm has reduced the pseudo-Gibbs phenomena, can reserve more detailed information, texture of images and get higher visual impression and PSNR value.

**Key words:** threshold; wavelet transform; Curvelet transform; cycle spinning; image denoising

## 0 引言

图像去噪是图像预处理中应用比较广泛的一种技术,可以在空间域或者在频率域处理。传统的预处理方法体现了图像信噪比与空间分辨率的折中,缺点是低通滤波在平滑噪声的同时模糊了边缘,而高通滤波虽增强了边缘但也放大了噪声。近几年来,运用小波变换对图像进行去噪处理已成为一个热门的研究方向。

由于小波理论具有良好的时、频局域分析能力,因此人们提出了多种基于小波的去噪方法:利用小波变换的模极大值去噪、基于各尺度下小波系数相关性去噪、采用非线性小波变换阈值法去噪、平移不变量小波去噪、基于投影原理的匹配追踪去噪以及多小波去噪等。通常来说,小波作为一种逼近的工具,在处理一维和二维的具有点状奇异性的目标中体现出了良好的性能。然而物体光滑的边界使得自然图像的不连续性往往体现为光滑曲线上的奇异性,并不仅仅是点奇异。根据生理学家对人类视觉系统的研究结果和自然图像统计模型,一种“最优”的图像表示方法应该具有多分辨特征、局域性、方向性的特征<sup>[1-2]</sup>。由一维小波的张量积张成的可分离小波基只具有有限方向,即水平、垂直和对角,多方向的缺乏是其不能“最优”表示具有线或者面奇异的高维函数的重要原因。

小波分析的不足,使人们开始从不同角度出发,试图寻找比小波更好的表示工具。在小波理论基础上,文献[3]作者

建立了一种特别适合于表示各向异性奇异性的多尺度方法——脊波(Ridgelet)变换。由于脊波本质上是通过对小波基函数添加一个表征方向的参数得到的,所以它不但和小波一样有局部时频分析的能力,而且还具有很强的方向选择和辨别的能力,可以非常有效地表示信号中具有方向性的奇异特征,如图像的线性轮廓等,这是小波方法所不能做到的<sup>[4]</sup>。大量实验表明,脊波在直线特征的表示和提取中非常有效,为了进一步表示多维信号中更为普遍的曲线型奇异性,又发展出曲波(Curvelet)<sup>[5]</sup>方法,用多个尺度的局部直线来近似表示整条曲线。

由于 Curvelet 变换具有多尺度特性以及良好的方向特性,噪声信息和边缘信息能够很好地分开,在保持边缘的同时,使噪声抑制达到了一个很好的效果。本文的主要任务是将第二代 Curvelet 变换运用于图像去噪中,在此基础上对现有算法作出改进,使图像信噪比更高,图像显示效果更真实更清晰。

## 1 离散 Curvelet 变换<sup>[6]</sup>

以笛卡尔坐标系下的  $f[t_1, t_2]$ ,  $0 \leq t_1, t_2 \leq n$  为输入,曲波变换的离散形式可表示为:

$$c^D(j, l, k) := \sum_{0 \leq t_1, t_2 \leq n} f[t_1, t_2] \overline{\varphi_{j,l,k}^D[t_1, t_2]}, \text{ 采用一带通函数}$$

$$\Psi(\omega_1) = \sqrt{\phi\left(\frac{\omega_1}{2}\right)^2 - \phi(\omega_1)^2}, \text{ 定义 } \Psi_j(\omega_1) =$$

收稿日期:2009-04-22。 基金项目:国家自然科学基金资助项目(70533050)。

作者简介:厉丹(1981-),女,江苏徐州人,讲师,博士,主要研究方向:图像处理、目标提取、运动目标分析; 钱建生(1964-),男,浙江人,教授,博士生导师,主要研究方向:图像处理、通信与监控; 王超(1984-),男,江苏徐州人,硕士研究生,主要研究方向:图像处理、图像压缩。

$\Psi(2^{-j}\omega_1)$ , 用此函数实现多尺度分割。对于每一个  $\omega = (\omega_1, \omega_2)$ ,  $\omega_1 > 0$ , 有  $V_j(S_{\theta_1}\omega) = V(2^{\lfloor j/2 \rfloor} \frac{\omega_2}{\omega_1} - l)$ 。其中,  $S_{\theta_l}$  是一个剪切矩阵,  $S_{\theta_l} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ -\tan\theta_l & 1 \end{bmatrix}$ ,  $\theta_l$  并非等间距的, 但是斜率是等间距的。定义  $\tilde{U}_j(\omega) = \psi_j(\omega_1)V_j(\omega)$ , 针对于每一个  $\theta_1 \in [-\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{4}]$ , 有  $\tilde{U}_{j,1}(\omega) = \psi_j(\omega_1)V_j(S_{\theta_1}\omega) = \tilde{U}_{j,1}(S_{\theta_1}\omega)$ 。

离散 Curvelet 变换方法先变换到频域, 然后在频域中进行局部化, 局部化后采用二维快速傅里叶逆变换 (Two-Dimensional Inverse Fast Fourier Transform, 2DIFFT) 得到曲波系数。快速离散 Curvelet 变换在频域中进行, 这样可以利用 FFT/Wrapping 技术来实现。

### 1.1 基于 USFFT 的快速离散 Curvelet 变换

曲波变换经过几年的发展, 现在实际应用中一般采用的是基于非等间快速傅里叶变换 (Unequally-Spaced Fast Fourier Transform, USFFT) 的快速离散 Curvelet 变换方法<sup>[7-8]</sup>, 该方法的实现过程如下。

1) 对于给定的一个笛卡尔坐标下的二维函数  $f[t_1, t_2]$ ,  $0 \leq t_1, t_2 \leq \omega$  进行二维快速傅里叶变换 (Two-Dimensional Fast Fourier Transform, 2DFFT), 得到二维频域表示:  $\hat{f}[n_1, n_2]$ ,  $-n/2 \leq n_1, n_2 \leq n/2$ ;

2) 在频域, 对于每一对  $(j, 1)$  (尺度, 角度), 重采样  $\hat{f}[n_1, n_2]$ , 得到采样值  $\hat{f}[n_1, n_2 - n_1 \tan\theta_1]$ ,  $(n_1, n_2) \in P_j$ , 其中  $P_j = \{(n_1, n_2) : n_{1,0} \leq n_1 < n_{1,0} + L_{1,j}, n_{2,0} \leq n_2 < n_{2,0} + L_{2,j}\}$  且  $L_{1,j}$  是关于  $2^j$ ,  $L_{2,j}$  是关于  $2^{j/2}$  的参量, 分别表示窗函数  $\tilde{U}_j[n_1, n_2]$  的支撑区间的长宽分量;

3) 将内插后的  $\hat{f}$  与窗函数  $\tilde{U}_j$  相乘便可得到:  $\tilde{f}_{j,1}[n_1, n_2] = \hat{f}[n_1, n_2 - n_1 \tan\theta_1]\tilde{U}_j[n_1, n_2]$ ;

4) 对  $\tilde{f}_{j,1}$  进行 2DIFFT 逆变换, 由此得到离散的曲波系数集合  $C^D(j, l, k)$ 。

从数学上来说, 局部化和 2DIFFT 可以合成为一步, 就是用局部化窗口乘局部傅式变换基。

### 1.2 基于 Wrapping 的快速离散 Curvelet 变换

基于 Wrapping 的快速离散曲波变换的核心思想是围绕原点 wrap, 即在具体实现时对任意区域, 通过周期化技术一一映射到原点的仿射区域, 算法过程如下:

1) 对  $L^2(\mathbf{R}^2)$  中的  $f[t_1, t_2]$  采用 2DFFT 变换得到  $\hat{f}[n_1, n_2]$ ;

2) 对于每个尺度, 方向参数  $(j, l)$ , 对  $\hat{f}[n_1, n_2]$  采用插值方法求得  $\hat{f}[n_1, n_2 - n_1 \tan\theta_1]$ ;

3) 用抛物窗  $U_j$  乘  $\hat{f}_Y^{CT}$ , 从而局部化  $\hat{f}$ ;

4) 围绕原点 Wrapping 局部化  $\hat{f}$ ;

5) 对  $\hat{f}$  做 2DIFFT, 得到 Curvelet 系数  $C^D(j, l, k)$ 。

当边缘轮廓方向与 Curvelet 波方向一致时, 将有较大的 Curvelet 系数, 反之, 则 Curvelet 系数接近于 0。当有斑点噪声, 或者是尺寸远比目标物体小的杂物出现在图像中时, 应用 Curvelet 变换, 不仅很容易将其滤掉, 而且不损失边缘细节, 有利于准确提取边缘。

## 2 图像去噪新算法

根据曲波变换理论, 较大的曲波系数对应于较强的边缘,

噪声对应较小的系数, 因此, 在阈值的选取上, 可以采用保留较大的系数, 舍弃较小的系数的方法来实现图像的消噪。

虽然用阈值法能取得很好的去噪效果, 很好地保留图像边缘等局部特征, 但图像会出现振铃、伪吉布斯效应等视觉失真, 即在图像的某个区域出现类似水波样的波纹, 图像显示效果不理想。这种情况是由信号特性和小波基特性之间的不匹配造成的。为了抑制阈值去噪过程中由于变换缺乏不变性而产生的伪吉布斯现象, 可以采用平移图像来改变不连续点的位置。文献[9]作者提出了 Cycle Spinning 方法。我们采用强制平移信号以使它们的特性改变位置, 然后再把结果逆平移回来, 这样可以有效抑制伪吉布斯现象。对于任意信号, 可能包含几个不连续点, 它们之间会相互干扰。因此我们不采用单一平移, 而是在一定范围内对信号进行循环平移<sup>[10-12]</sup>, 然后将每次得到的结果取平均, 用“平移-去噪-平均”的平移不变量去噪法。

一维信号循环平移方法如下: 对于一个信号  $x_t$  ( $0 \leq t \leq N$ ),  $H_N = \{h; 0 \leq h \leq N\}$  用  $S_h$  表示对信号  $x$  进行  $h$  的时域平移,  $h$  是正整数, 即:  $(S_{h_x})_t = x_{(t+h) \bmod N}$  且  $S_h$  可逆, 令  $S_{-h} = (S_h)^{-1}$ ,  $T$  表示对信号进行阈值法去噪处理,  $A$  表示取“平均”, 则平移不变量小波去噪方法可以表示为  $T(x, (S_h)_{h \in H_N}) = A_{h \in H_N} S_{-h}(T(S_h(x)))$ 。对于二维图像可以将像素矩阵每一列看作一维情形中的一个样值, 即以列为单位进行平移, 这样将每一行都进行循环平移变换, 然后进行消噪处理。

新算法 WSCurvelet 具体实现如下:

1) 对含噪图像作循环平移, 平移量为 1, 平移方法如上所述;

2) 对平移后的图像进行基于 Wrapping 的 Curvelet 变换, 得到各尺度、各方向的 Curvelet 系数  $f_Y^{CT}$ ;

3) 对系数  $f_Y^{CT}$  进行阈值处理得到  $\hat{f}_Y^{CT}$ , 根据先验知识, 最精细尺度取阈值系数为 2.5, 其他各个尺度上取阈值系数为 2.2;

4) 对  $\hat{f}_Y^{CT}$  进行 Curvelet 反变换, 重构图像, 得到去噪后的图像;

5) 对去噪后的图像进行逆循环平移, 重复以上步骤, 并对迭代后的结果求平均值, 得到最终去噪结果。

该方法不仅能有效去除伪吉布斯现象, 表现出更好的图面质量, 而且还可得到更小的均方根误差, 提高信噪比。

## 3 仿真实验及性能分析

为了检验本文去噪算法的优越性, 我们在 Matlab7.1 环境下, 选取大小为  $512 \times 512$  的树袋熊图像 (取自网页) 为实例进行实验。表 1 是噪声标准差在 10、15、20、25、30 五种情况下, 用不同消噪方法得到的峰值信噪比 (PSNR)。测试方法列举出 4 种, 分别为: 基于平移变换改进的小波变换 CSWavelet、基于 USFFT 的快速离散 Curvelet 变换 USFFTCurvelet、基于 Wrapping 的 Curvelet 变换 WrapCurvelet 和本文的基于 Wrapping 和平移不变量结合的 WSCurvelet 算法分别对噪声图像进行处理。

以树袋熊图像为例, 显示噪声标准差 30 的条件下不同算法的去噪结果, 如图 1 所示。

为了更好地看到消噪后图像的细节部分, 本文截取树袋熊手臂区域进行放大比较, 如图 2 所示。

通过实验结果可以看出,在不同标准差下各种消噪方法的 PSNR 和消噪效果具有明显不同,使用本文改进的方法进行图像消噪,能更好地提高峰值信噪比和图像显示效果,说明了改进算法的有效性。

表 1 树袋熊图像消噪前后的峰值信噪比

噪声标准差	消噪前	CSWavelet	USFFTCurvelet	WrapCurvelet	本文算法
10	28.1264	30.2353	29.1636	29.1873	31.1624
15	24.6189	28.1679	27.5666	27.5939	28.8725
20	22.1094	26.9177	26.4605	26.5370	27.4576
25	20.1600	26.0032	25.6639	25.7390	26.4201
30	18.5833	25.2595	25.0292	25.1151	25.6507

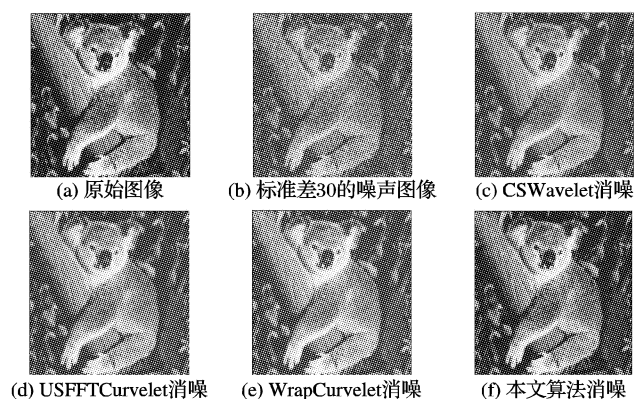


图 1 对树袋熊图像进行不同消噪算法的比较

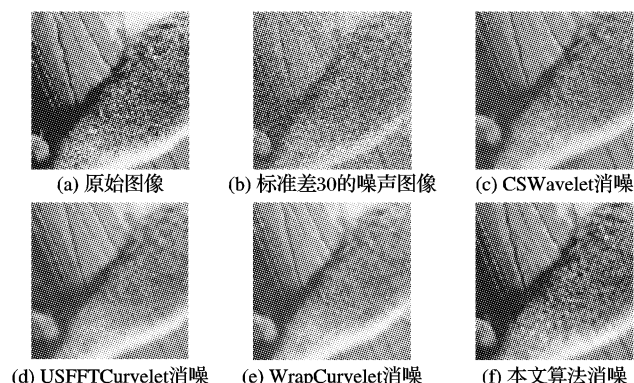


图 2 对树袋熊手臂区域进行不同消噪算法的放大比较

从视觉效果上看,本文算法既滤除了噪声,同时也很好地保留了图像中的细节信号。与 CSWavelet、USFFTCurvelet、WrapCurvelet 相比,本文算法消噪后的图像更清晰,能较好地恢复图像中的纹理,很好地保留图像中的边缘信息。例如树袋熊手臂上的体毛、手臂抱着的树干的纹理等细节恢复的都比其他消噪法效果好,并且在标准差增大的情况下仍旧体现出良好的优势。

从信噪比 PSNR 来看,在这 4 种去噪方法中,基于 Wrapping 的 WrapCurvelet 方法优于 USFFTCurvelet,基于循环平移变换的 CSWavelet 方法优于 WrapCurvelet 方法,而结合 Wrapping 和循环平移变换的本文算法有着最高的 PSNR 值,降低了图像中的伪 Gibbs 现象和振铃效应,使图像视觉效果更好。

#### 4 结语

传统的图像消噪可在空间域或在频率域处理,但是由于

噪声和边缘、轮廓上的像素点在空间域都位于灰度突变的地方,在频率域都对应图像频谱中的高频成分,因此用传统消噪方法处理的图像易使得图像本身的细节如边缘轮廓、线条等模糊不清,从而使图像降质。图像消噪总是要以一定的细节模糊为代价,因此如何尽量消除图像的噪声,又尽量保持图像的细节,是图像消噪研究的主要问题之一。

近年来利用小波分析的去噪取得了较为满意的效果。但是小波变换只有有限的方向,只能反映奇异点的位置和特征,而难以表达更高维的特征,显然不符合最优表示图像时所要求的各向异性准则。与小波变换相比,Curvelet 变换等多尺度几何分析方法,在图像去噪应用上显示出巨大的潜力,可以更好地逼近含线奇异的高维函数。

本文通过研究基于 Curvelet 的图像去噪算法,提出了 Cycle Spinning 和 wrapping 技术结合来改进原有的 Curvelet 去噪方法。通过仿真实验可知,改进方法的去噪效果明显优于 CSWavelet、USFFTCurvelet 和 WrapCurvelet 变换算法,提高了图像的 PSNR 值,降低了伪 Gibbs 现象和振铃效应,降低了信号的均方根误差,同时更好地保留了图像的高频细节和图像纹理,改善了图像的视觉效果。

#### 参考文献:

- [1] OLSHAUSEN B A, FIELD D J. Emergence of simple-cell receptive field properties by learning a sparse code for natural images[J]. Nature, 1996, 381: 607 - 609.
- [2] DONOHO D L, FLESIA A G. Can recent innovations in harmonic analysis 'Explain' key findings in natural image statistics [J]. Network: Computation in Neural Systems, 2001, 12(3): 371 - 393.
- [3] CANDES E J. Ridgelet: Theory and applications[D]. Stanford, CA: Stanford University, Department of Statistics, 1998.
- [4] 赵小明, 叶喜剑. 一种新的脊波变换方法[J]. 计算机研究与发展, 2008, 45(5): 915 - 922.
- [5] CANDES E J, DONOHO D L. Curvelets[D]. Stanford, CA: Stanford University, Department of Statistics, 1999.
- [6] EMMANUEL C, LAURENT D, DONOHO D, et al. Fast discrete curvelet transforms [J]. Multiscale Modeling and Simulation, 2006, 5(3): 861 - 899.
- [7] CAND' ES E J, DEMANET L. Curvelets and fast wave equation solvers[D]. California, CA: California Institute of Technology, 2005.
- [8] CANDES E J, DONOHO D L. New tight frames of curvelets and optimal representations of objects with  $C^2$  singularities[J]. Communications on Pure and Applied Mathematics, 2004, 57(2): 219 - 266.
- [9] COIFMAN R R, DONOHO D L. Translation-invariant de-noising [C]// Wavelets in Statistics, LNS 103. New York: Springer-Verlag, 1995: 125 - 150.
- [10] 李杰, 丁宣浩. 改进的小波自适应阈值图像消噪[J]. 桂林电子科技大学学报, 2006, 26(5): 351 - 354.
- [11] 李杰, 丁宣浩. 平移不变与系数放大小波变换图像消噪方法[J]. 桂林电子科技大学学报, 2006, 26(3): 177 - 180.
- [12] 杨华莉, 王瑶. 基于 FDCT 的图像消噪算法[J]. 西南民族大学学报, 2007, 33(4): 897 - 900.