

基于广义变分模型的自适应图像去噪算法

王益艳

(四川文理学院 物理与工程技术系,四川 达州 635000)

(wang_yiyan8207@163.com)

摘要:通过分析全变分(TV)去噪模型的优缺点,提出了一种新的改进算法。该算法根据最大后验概率(MAP)和马尔可夫随机场(MRF)的理论,推导出一个广义变分的图像去噪模型,并对平衡正则化项和数据保真项的 Lagrange 乘子 λ 进行了自适应改进,最后采用了一种鲁棒性好和边缘保持能力强的势函数,结合梯度加权最速下降法和半点格式的数值迭代算法对自适应的广义变分去噪模型寻优求解。实验结果表明,新模型能很好地应用于图像去噪,与现有的算法相比,在峰值信噪比有所提高的同时,图像的主观视觉效果也更好。

关键词:全变分模型;最大后验概率;马尔可夫随机场;位势函数;广义高斯分布

中图分类号: TP391.41 **文献标志码:** A

Adaptive image denoising algorithm based on generalized variational model

WANG Yi-yan

(Department of Physics and Engineering Technology, Sichuan University of Arts and Science, Dazhou Sichuan 635000, China)

Abstract: A new improved algorithm for image denoising was proposed by analyzing the Total Variational (TV) model. According to the viewpoint of Maximum A Posteriori (MAP) and Markov Random Field (MRF) theory, a generalized variational functional model was deduced. And the Lagrange multiplier λ used for balancing the data fidelity term and regularized term was adaptively improved. An edge preserving potential function was adopted, which had good robustness to noises; finally an iterative algorithm was exploited to solve the energy functional combining weighted gradient descent flow and semi-point scheme. Experimental results show that the proposed model has good performance in image denoising. It is obviously superior to the conventional variational model in both visual effect and PSNR.

Key words: Total Variational (TV) model; Maximum A Posteriori (MAP); Markov Random Field (MRF); potential function; Generalized Gaussian Distribution (GGD)

0 引言

图像信号在形成和传输过程中会由于噪声的干扰而导致图像质量下降,对图像的后续处理,如边缘检测、图像分割、特征提取、模式识别等产生严重的影响。因此,图像去噪是图像预处理的一个重要的环节,需要在噪声去除的同时有效地保护图像的细节。由于噪声和细节往往分布在图像的高频区域,因此传统的线性滤波方法在去除噪声的同时容易模糊图像的边缘。近年来,基于偏微分方程(Partial Differential Equation, PDE)和变分模型的图像去噪算法引起了国内外学者的广泛关注^[1-12]。PDE方法主要是从有选择性非线性扩散的角度设计各类低阶、高阶或者低阶与高阶相结合的偏微分方程,采用数值化的迭代格式,通过随时间变化的更新,使得图像向所要得到的效果逼近。该类算法的代表为P-M扩散方程^[1],以及对其改进的后续工作^[2-3],该方法在确定扩散系数时有很大的选择空间,在前向扩散的同时具有后向扩散的功能,所以,具有平滑图像和将边缘尖锐化的能力。但是这种方法是病态问题,在实际应用中不稳定。变分模型方法是确定图像的能量函数,通过对能量函数的最小化工作,使得图像达到平滑状态。该类方法本质上是一种正则化方法,典型的代表为全变分模型^[4-7],这类方法的关键是找到合适的能量方程,保证演化的稳定性,获得理想的结果。它比PDE方程更稳定,且具有明确的理论解释,是目前普遍应用的方法。但全变分模型不具备后向扩散的能力,所以处理的图像模糊,

无边缘锐化;同时,该模型本身还存在固有缺陷,即在处理平滑区域时,有可能将噪声当成边缘,从而容易产生“阶梯”效应。基于此,本文从最大后验概率和马尔可夫随机场的理论出发,推导出一个广义变分的图像去噪模型,并对平衡正则化项和数据保真项的Lagrange乘子 λ 进行了自适应改进,最后采用一种鲁棒性好和边缘保持能力强的势函数,结合梯度加权最速下降法和半点格式的数值迭代算法对自适应的广义变分去噪模型寻优求解。实验结果表明,该算法在有效去除噪声的同时保留了图像的细节信息,相比于全变分去噪模型,避免了“阶梯”效应的出现。

1 全变分去噪模型

令 u 为原始清晰的图像, u^0 为被噪声污染的图像,即 $u^0 = u + n$,式中 n 是均值为0、方差为 σ^2 的高斯噪声,则全变分(Total Variation, TV)去噪模型^[7]可表示为:

$$\min_u J(u) = \int_{\Omega} |\nabla u| dx dy + \frac{\lambda}{2} \int_{\Omega} |u - u^0|^2 dx dy \quad (1)$$

其中:等式右边第1项为图像的正则化项;第2项为数据保真

项。 $\nabla = \left(\frac{\partial}{\partial x}, \frac{\partial}{\partial y} \right)$ 为梯度算子; $|\nabla u| = \sqrt{\left(\frac{\partial u}{\partial x} \right)^2 + \left(\frac{\partial u}{\partial y} \right)^2}$

是图像的梯度场; Ω 为图像的定义域; $(x, y) \in \Omega$ 为像素点的二维坐标; λ 为Lagrange乘子。其对应的欧拉-拉格朗日方程为:

$$-\nabla \cdot \left(\frac{\nabla u}{|\nabla u|} \right) + \lambda(u - u^0) = 0 \quad (2)$$

从该方程可看出,扩散项 $\nabla \cdot (\nabla u)$ 的扩散系数为 $\frac{1}{|\nabla u|}$ 。在边缘处, $|\nabla u|$ 较大,扩散系数较小,因此沿边缘方向的扩散较弱,从而保留了边缘;在平滑区, $|\nabla u|$ 较小,扩散系数较大,因此在平滑区的扩散能力较强,从而去除了噪声。

但由于该模型中正则化项仅仅包含 $|\nabla u|$, 这是属于 PDE 线性扩散的情形,很多研究表明,该模型本身存在固有缺陷,即在处理平滑区域时,有可能将噪声当成边缘,从而容易产生“阶梯”效应。

2 改进的自适应广义变分模型

2.1 广义变分模型的导出

假设原始图像 u 的先验概率为 $P(u)$, 给定 u 时 u^0 的条件概率为 $P(u^0 | u)$, 则根据贝叶斯框架下的 MAP 估计,恢复图像可由下式给出:

$$\begin{aligned}\hat{u} &= \arg \max_u \{P(u | \hat{u})\} = \\ &= \arg \max_u \{P(u^0 | u)P(u)\} = \\ &= \arg \max_u \{\ln P(u^0 | u) + \ln P(u)\} = \\ &= \arg \min_u \{-\ln P(u^0 | u) - \ln P(u)\}\end{aligned}\quad (3)$$

其中: $P(u)$ 为图像的先验模型,它描述什么样的图像出现的概率大; $P(u^0 | u)$ 为数据模型,它描述从给定 u 产生 u^0 的概率。根据马尔可夫随机场 (Markov Random Field, MRF) 理论, $P(u)$ 服从如下 Gibbs 分布^[8]:

$$P(u) = \frac{1}{Z} \exp\left\{-\frac{\Phi(u)}{T}\right\} \quad (4)$$

其中: Z 为归一化常数; T 称为物理系统的温度; $\Phi(u)$ 称为能量函数,表达式为 $\Phi(u) = \sum_{c \in C} V_c(u)$, c 表示集簇,对一个给定的邻域系统,集簇内任何两个元素都是相邻的, C 为所有 c 构成的集合, V_c 是 c 上关于 u 的位势函数。 $P(u^0 | u)$ 取决于噪声的统计分布,假设噪声服从均值为零的广义高斯分布 (Generalized Gaussian Distribution, GGD):

$$P(u^0 | u) = \frac{p}{2\sigma\Gamma\left(\frac{1}{p}\right)} \exp\left(-\frac{\|u^0 - u\|_p^p}{\sigma^p}\right) \quad (5)$$

其中: $\Gamma(\cdot)$ 为 Gamma 函数,即 $\Gamma(z) = \int_0^\infty e^{-t} t^{z-1} dt, z > 0$; p 、 σ 分别为 GGD 的形状参数和标准方差; $\|\cdot\|_p^p$ 为 L^p 范数。形状参数 p 反映了噪声的分布类型:当 $p = 1$ 时退化为 Laplace 分布;当 $p = 2$ 时是高斯分布;当 $0 < p < 1$ 时则为重尾分布;当 $p \rightarrow \infty$ 时则可以近似为逼近均匀随机分布。

从而由式(3)中的 MAP 估计等价于:

$$\hat{u} = \arg \min_u \left\{ \Phi(u) + \frac{\lambda}{2} \|u^0 - u\|_p^p \right\} \quad (6)$$

定义能量函数 $\Phi(u) = \int_\Omega \varphi(|\nabla u|) dx dy$, 则式(6)可化为:

$$\hat{u} = \arg \min_u \left\{ J(u) = \int_\Omega \varphi(|\nabla u|) dx dy + \frac{\lambda}{2} \|u^0 - u\|_p^p \right\} \quad (7)$$

由式(7)可以看出,贝叶斯框架下的 MAP 估计统一了能量泛函的最小化问题,从而得到了一种广义变分模型图像恢复方法。

2.2 参数的选择

从式(7)看出,广义变分模型包含了三个参数:位势函数

φ 、形状参数 p 和 Lagrange 乘子 λ 。其中位势函数 $\varphi: \mathbf{R}^+ \rightarrow \mathbf{R}$ 为特定的光滑函数,与图像的正则化项相关,可以取指数函数、抛物线函数、对数函数等^[9]。位势函数均为稳健函数,它必须满足以下 9 条基本性质^[11-12]。

①非负性: $\varphi(t) \geq 0, \forall t \in \mathbf{R}$ 且 $\varphi(0) = 0$ 。

②对称性: $\varphi(t) = \varphi(-t), \forall t \in \mathbf{R}$ 。

③可微性: $\varphi(t)$ 几乎处处可微。

④单调性: $\varphi'(t) \geq 0, \forall t \geq 0$ 。

⑤ $\lim_{t \rightarrow 0^+} \frac{\varphi(t)}{t^2} = \gamma > 0, 0 < \gamma \leq +\infty$ 。

⑥ $\lim_{t \rightarrow +\infty} \frac{\varphi(t)}{t^2} = 0$ 。

⑦ $\frac{\varphi'(t)}{t}, t \in [0, +\infty)$ 单调下降且几乎处处连续。

⑧ $\lim_{t \rightarrow 0^+} \varphi'(t) < +\infty$ 。

⑨ $\lim_{t \rightarrow +\infty} \varphi'(t) < +\infty$ 。

注意: $\varphi(t)$ 不可微时, $\varphi'(t) = [\varphi'(t+) + \varphi'(t-)]/2$ 。

其中:性质 ⑤ 衡量的是图像噪声平滑的效果;性质 ⑥ 衡量的是图像细节保护能力。关于位势函数的选取,国际上已有多篇文献报道^[10-11],文献[15]也对各种典型的边缘保持位势函数的滤波性能进行了详细的归纳和分析。在本文中,选择 $\varphi(t) = 2(1+t^2)^{1/2} - 2$, 该函数具有较强的噪声鲁棒性和边缘保持能力,同时其形式简洁明了,未知参数较少,便于数值实现。

形状参数 p 与污染图像的噪声特性有关,本文主要考虑高斯噪声的情形,因此,取 $p = 2$ 。则式(7)可变为:

$$\begin{aligned}\hat{u} &= \arg \min_u \left\{ J(u) = \int_\Omega \varphi(|\nabla u|) dx dy + \right. \\ &\quad \left. \frac{\lambda}{2} \int_\Omega |u - u^0|^2 dx dy \right\}\end{aligned}\quad (8)$$

式(8)对应的欧拉-拉格朗日方程为:

$$-\operatorname{div} \left[\frac{\varphi'(|\nabla u|)}{|\nabla u|} \nabla u \right] + \lambda(u - u^0) = 0 \quad (9)$$

引入人工时间,相应的梯度下降流为:

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \operatorname{div} \left[\frac{\varphi'(|\nabla u|)}{|\nabla u|} \nabla u \right] + \lambda(u^0 - u) \quad (10)$$

Lagrange 乘子 λ 为正则化项和保真项之间的权重参数,可通过将式(9)两边同时乘以 $(u - u^0)$, 然后在整个图像区域 Ω 上积分求得:

$$\lambda = \frac{1}{\sigma^2 |\Omega|} \int_\Omega \operatorname{div} \left[\frac{\varphi'(|\nabla u|)}{|\nabla u|} \nabla u \right] \cdot (u - u^0) dx dy \quad (11)$$

其中 σ^2 是噪声的方差。由式(11)可以看出, λ 与 $1/\sigma^2$ 成正比,相当于一个全局标量。

文献[13]中建议将上述标量问题转化为如下的自适应问题。

首先,定义局部方差为:

$$P_z(x, y) = \frac{1}{|\Omega|} \int_\Omega (u_z(\tilde{x}, \tilde{y}) - \eta[u_z])^2 w_{x,y}(\tilde{x}, \tilde{y}) d\tilde{x} d\tilde{y} \quad (12)$$

其中 $w_{x,y}(\tilde{x}, \tilde{y}) = w_{x,y}(|\tilde{x} - x|, |\tilde{y} - y|)$ 是正则化的、对称平滑的窗口,且满足:

$$\int_\Omega w_{x,y}(\tilde{x}, \tilde{y}) d\tilde{x} d\tilde{y} = 1 \quad (13)$$

$\eta[\cdot]$ 是相对于概率密度 $\frac{w_{x,y}(\tilde{x}, \tilde{y})}{\Omega}$ 的期望值。从局部方差可知:

$$\int_{\Omega} P_z(x, y) = P_z \text{d}x \text{d}y \quad (14)$$

其中 $P_z = \text{var}(u_z)$ 。则自适应广义变分模型的能量函数最小化问题可以描述为当满足 $P_z(x, y) = S(x, y)$ 时,求解:

$$\min \int_{\Omega} \varphi(|\nabla u|) \text{d}x \text{d}y \quad (15)$$

其中, $P_z(x, y)$ 是 $u_z = (u - u^0 - \zeta)$ 的局部方差, ζ 是一常数,并且假设 $S(x, y) \geq 0$ 。使用 Lagrange 算子解决上述最小化问题得:

$$J(u) = \int_{\Omega} (\varphi(|\nabla u|) + \frac{1}{2} \lambda(x, y) P_z(x, y)) \text{d}x \text{d}y \quad (16)$$

其对应的欧拉-拉格朗日方程为:

$$\tilde{\lambda}(x, y)(u - u^0 - \zeta) - \text{div} \left[\frac{\varphi'(|\nabla u|)}{|\nabla u|} \nabla u \right] = 0 \quad (17)$$

其中, $\tilde{\lambda}(x, y) = \int_{\Omega} \lambda(\tilde{x}, \tilde{y}) w_{x,y}(|\tilde{x} - x|, |\tilde{y} - y|) \text{d}\tilde{x} \text{d}\tilde{y}$ 。

引入人工时间,相应的梯度下降流为:

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \text{div} \left[\frac{\varphi'(|\nabla u|)}{|\nabla u|} \nabla u \right] + \tilde{\lambda}(x, y)(u^0 - u + \zeta) \quad (18)$$

将式(17)两边同时乘以 $(u - u^0 - \zeta)$, 并在整个图像区域 Ω 上积分,可得:

$$\int_{\Omega} (\lambda(x, y) S(x, y) - R(x, y)) \text{d}x \text{d}y = 0 \quad (19)$$

其中:

$$R(x, y) = (u - u^0 - \zeta) \text{div} \left[\frac{\varphi'(|\nabla u|)}{|\nabla u|} \nabla u \right] \quad (20)$$

从而得到:

$$\lambda(x, y) = \frac{R(x, y)}{S(x, y)} = \frac{(u - u^0 - \zeta) \text{div} \left[\frac{\varphi'(|\nabla u|)}{|\nabla u|} \nabla u \right]}{S(x, y)} \quad (21)$$

而常数 ζ 可以通过求解 $\partial_t J$ 得到:

$$\zeta = \frac{\int_{\Omega} \lambda(x, y) (\bar{u}(x, y) - \bar{u}^0(x, y)) \text{d}x \text{d}y}{\int_{\Omega} \lambda(x, y) \text{d}x \text{d}y} \quad (22)$$

由上述可知,式(10)和式(18)是两种类似的广义变分模型,不同的是式(10)中包含了标量数据保真项 $\lambda(u^0 - u)$, 而式(18)中包含了自适应的数据保真项 $\tilde{\lambda}(x, y)(u^0 - u + \zeta)$ 。自适应的广义变分模型能在去除高斯噪声的同时保护图像的边缘细节,并且可以有效避免 TV 模型中存在的阶梯效应。

2.3 数值算法

对于变分模型的数值实现问题,通常采用的是半点格式下的 Gauss-Jacobi 迭代法^[5-7],该类方法本质上是变分模型离散化成一个倒数梯度加权数字滤波器,在去噪时容易造成图像模糊。因此,我们采用了一种新的结合梯度加权最速下降法和半点格式的数值迭代算法^[14]对本文模型进行数值离散化。

首先令 η 为图像的梯度方向, ξ 为与 η 垂直的切线方向,分别表示如下:

$$\eta = \frac{\nabla u}{|\nabla u|} = \frac{(u_x, u_y)}{\sqrt{u_x^2 + u_y^2}}, \quad \xi = \frac{\nabla^\perp u}{|\nabla u|} = \frac{(-u_y, u_x)}{\sqrt{u_x^2 + u_y^2}} \quad (23)$$

以 $u_{\xi\xi}$ 和 $u_{\eta\eta}$ 分别表示 u 在 ξ 和 η 方向上的二阶导数,则式(18)可化为 $\eta - \xi$ 方向的 PDE:

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \left[\frac{\varphi'(|\nabla u|)}{|\nabla u|} u_{\xi\xi} + \varphi''(|\nabla u|) u_{\eta\eta} \right] + \tilde{\lambda}(x, y)(u^0 - u + \zeta) \quad (24)$$

其中:

$$\begin{cases} u_{\eta\eta} = \frac{u_x^2 u_{xx} + 2u_x u_y u_{xy} + u_y^2 u_{yy}}{u_x^2 + u_y^2} \\ u_{\xi\xi} = \frac{u_y^2 u_{xx} - 2u_x u_y u_{xy} + u_x^2 u_{yy}}{u_x^2 + u_y^2} \end{cases} \quad (25)$$

采用半点格式的中心差分来离散化式(24)中的 PDE,为了利用像素周围更多的信息,本文选择 8 邻域系统,如图 1 所示。

$(i-1, j-1)$	$(i-1, j)$	$(i-1, j+1)$
$(i, j-1)$	(i, j)	$(i, j+1)$
$(i+1, j-1)$	$(i+1, j)$	$(i+1, j+1)$

图 1 图像的 8 邻域系统

设 h 为 x, y 方向上两像素间的网格步长, δt 为时间步长,记 $u_{i,j}^n$ 为采样值 $u(ih, jh; n\delta t)$, 则中心像素点的一阶导数和二阶导数对应的有限差分格式为:

$$\begin{aligned} \frac{\partial u}{\partial t} &= \frac{u_{i,j}^{n+1} - u_{i,j}^n}{\delta t} \\ (u_x)_{i,j}^n &= \frac{u_{i+1,j}^n - u_{i-1,j}^n}{2h} \\ (u_y)_{i,j}^n &= \frac{u_{i,j+1}^n - u_{i,j-1}^n}{2h} \\ (u_{xx})_{i,j}^n &= \frac{u_{i+1,j}^n - 2u_{i,j}^n + u_{i-1,j}^n}{h^2} \\ (u_{yy})_{i,j}^n &= \frac{u_{i,j+1}^n - 2u_{i,j}^n + u_{i,j-1}^n}{h^2} \\ (u_{xy})_{i,j}^n &= \frac{u_{i+1,j+1}^n - u_{i-1,j+1}^n - u_{i+1,j-1}^n + u_{i-1,j-1}^n}{4h^2} \end{aligned} \quad (26)$$

由一阶和二阶导数的差分格式可以得到 $|\nabla u|, u_{\xi\xi}$ 和 $u_{\eta\eta}$ 的离散形式,进一步对式(24)利用时间步进法求解,其迭代形式为:

$$\begin{aligned} u_{i,j}^{n+1} &= u_{i,j}^n + \delta t \cdot \left[\left(\frac{\varphi'(|\nabla u|)}{|\nabla u|} u_{\xi\xi} + \varphi''(|\nabla u|) u_{\eta\eta} \right)_{i,j}^n + (\tilde{\lambda}(x, y)(u^0 - u + \zeta))_{i,j}^n \right] \end{aligned} \quad (27)$$

设图像大小为 $M \times N$, 每个像素位置点 $(i, j) \in \{1, 2, \dots, M\} \times \{1, 2, \dots, N\}$, 采取对称边界条件为: $u_{0,j} = u_{1,j}$, $u_{M+1,j} = u_{M,j}$, $u_{i,0} = u_{i,1}$, $u_{i,N+1} = u_{i,N}$ 。并且为了避免上述方程中分母处的梯度为零,将梯度提升为 $|\nabla u|_\varepsilon = \sqrt{|\nabla u|^2 + \varepsilon}$, 其中, $\varepsilon > 0$ 。

3 实验结果与分析

为了验证本文自适应广义变分去噪模型的有效性,我们进行了大量的仿真实验。采用峰值信噪比 (Peak Signal to Noise Ratio, PSNR) 作为去噪性能的客观评价尺度, PSNR 定

义为:

$$PSNR = 10 \lg \left(\frac{(M \times N) \max(x_{ij})^2}{\sum_{i,j} (x_{ij} - y_{ij})^2} \right) \quad (28)$$

式中, x 是大小为 $M \times N$ 的原始图像, y 是去噪后的图像。PSNR 值越大, 图像去噪效果越好。

以标准 Lena 灰度图像为测试对象, 对其加入均值为 0, 不同噪声方差 (依次为 15、20、25、30) 的高斯噪声, 将本文算法与传统均值滤波、EV 模型^[14]、TV 模型^[7]算法进行了去噪比较。图 2 给出了方差为 25 时, 不同算法去噪后的视觉效果。表 1 是不同噪声方差下, 各算法去噪前后的 PSNR 值对比。

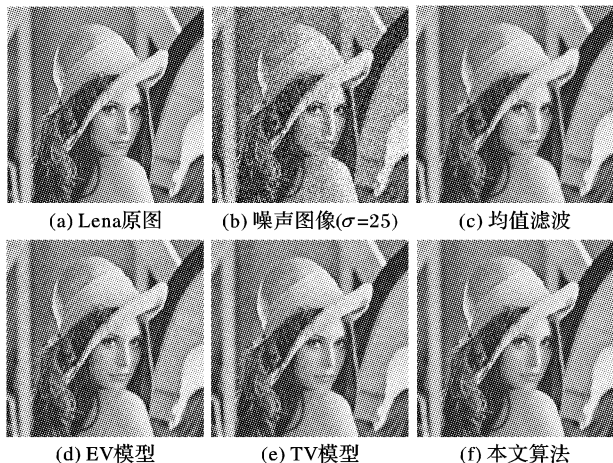


图 2 Lena 图像去噪效果

从图 2 可以看出, 传统均值滤波去噪效果比较模糊, 而 EV 模型与本文算法运算复杂度相当, 但本文算法图像去噪后的效果明显更佳。这是因为, 在本文中, 对参数 λ 的选择具有自适应性, 在边缘区域能平稳扩散, 因此, 能更好地保护图像细节。TV 模型在帽檐处边缘保持得较好, 但在背景等平坦区域产生了一些因“阶梯”效应引起的虚假条纹 (如图 3 所示), 而本文算法去噪后的图像避免了阶梯效应, 既有效抑制了大量噪声, 又保护了帽檐等边缘细节。此外, 从表 1 中 PSNR 值的比较结果可以看出, 在相同的噪声条件下, 本文算法得到的 PSNR 值均高于其他三种算法, 这也从客观评价角度说明了本文算法的有效性和优越性。



(a) 图 2(e) 局部放大

(b) 图 2(f) 局部放大

图 3 TV 模型的“阶梯”效应

表 1 各算法去噪后对应的 PSNR 值比较

噪声方差 σ	噪声图	均值滤波	EV 算法 ^[14]	TV 模型 ^[7]	本文算法
15	24.601	27.941	31.106	32.037	33.897
20	22.125	27.659	29.927	30.367	32.195
25	20.156	27.294	28.971	29.601	30.649
30	18.575	26.938	28.246	28.073	29.571

4 结语

本文从最大后验概率和马尔可夫随机场的理论出发, 推导出了一个广义变分的图像去噪模型。在模型参数的分析过程中, 对数据保真项选取针对高斯噪声的 L^2 范数, 并对平衡正则化项和数据保真项的 Lagrange 乘子 λ 进行了自适应改进, 最后采用了一种鲁棒性好和边缘保持能力强的势函数, 结合梯度加权最速下降法和半点格式的数值迭代算法对自适应的广义变分去噪模型寻优求解。实验表明, 该模型比传统算法具有更优的噪声抑制性和边缘保护能力, 同时还避免了全变分模型存在的“阶梯”效应。进一步的研究工作是针对脉冲噪声的变分模型。

参考文献:

- [1] PERONA P, MALIK J. Scale space and edge detection using anisotropic diffusion [J]. IEEE Transactions on Pattern Analysis and Machine Intelligence, 1990, 12(7): 629–639.
- [2] CATTÉ F, LIONS P-L, MOREL J-M, *et al.* Image selective smoothing and edge detection by nonlinear diffusion [J]. SIAM Journal on Numerical Analysis, 1992, 29(1): 182–193.
- [3] ALVAREZ L, LIONS P-L, MOREL J-M. Image selective smoothing and edge detection by nonlinear diffusion II [J]. SIAM Journal on Numerical Analysis, 1992, 29(3): 845–866.
- [4] RUDIN L I, OSHER S, FATEMI E. Nonlinear total variation based noise removal algorithms [J]. Physica D, 1992, 60(1/4): 259–268.
- [5] RUDIN L, OSHER S. Total variation based image restoration with free local constraints [C]// ICIP-94: IEEE International Conference on Image Processing. Washington, DC: IEEE Press, 1994, 1: 31–35.
- [6] COBSON D, VOGEL C. Convergence of an iterative method for total variation denoising [J]. SIAM Journal on Numerical Analysis, 1997, 34(5): 1779–1791.
- [7] CHAN T F, OSHER S, SHEN J. The digital TV filter and nonlinear denoising [J]. IEEE Transactions on Image Processing, 2001, 10(2): 231–241.
- [8] GEMAN S, GEMAN D. Stochastic relaxation, Gibbs distributions, and the Bayesian restoration of images [J]. IEEE Transactions on Pattern Analysis and Machine Intelligence, 1984, PAMI-6(6): 721–741.
- [9] TEBOUL S, LAURE B-F, AUBERT G, *et al.* Variational approach for edge-preserving regularization using coupled PDEs [J]. IEEE Transactions on Image Processing, 1998, 7(3): 387–397.
- [10] BLACK M J, RANGARAJAN A. On the unification of line processes, outlier rejection, and robust statistics with applications in early vision [J]. International Journal of Computer Vision, 1996, 19(1): 57–91.
- [11] CHARBONNIER P, BLANC-FERAUD L, AUBERT G, *et al.* Deterministic edge-preserving regularization in computed imaging [J]. IEEE Transactions on Image Processing, 1997, 6(2): 298–311.
- [12] 邵文泽, 韦志辉. 各向异性扩散与 M-估计的比较研究 [J]. 计算机工程与应用, 2006, 42(31): 43–45.
- [13] GILBOA G, ZEEVI Y Y, SOCHEN N. Texture preserving variational denoising using an adaptive fidelity term [C]// VLSM 2003: Proceedings of 2nd IEEE Workshop on Variational, Geometric and Level Set Methods in Computer Vision. Washington, DC: IEEE Press, 2003: 137–144.
- [14] 王益艳. 基于熵变分的图像去噪模型 [J]. 四川文理学院学报: 自然科学版, 2009, 19(2): 16–19.
- [15] 邵文泽, 韦志辉. 一种非线性数字滤波器的统一设计框架及其性能分析 [J]. 计算机学报, 2007, 30(1): 91–102.