

文章编号:1001-9081(2010)05-1359-04

## 有理 q-Bernstein-Bézier 曲线的构造及其应用

黄日朋

(滁州学院 数学系,安徽 滁州 239000)

(hrpeng163@163.com)

**摘要:**有理 Bernstein-Bézier 曲线在计算机辅助设计和计算机图形学上具有广泛的应用。在研究了经典的 Bernstein-Bézier 曲线及 de Casteljau 算法的基础上,结合 q-Bernstein 多项式,给出了有理 q-Bernstein-Bézier 曲线的构造方法、性质和计算有理曲线的 de Casteljau 算法,并讨论了曲线的细分和升阶的方法,通过改变  $q$  的取值,可以获得有理曲线族,在曲线造型上具有较强的灵活性。最后通过表示圆锥曲线和数字图像插值证明有理 q-Bernstein-Bézier 曲线的推广是有效的。

**关键词:**有理曲线; de Casteljau 算法; 曲线细分; 曲线升阶; 圆锥曲线; 图像插值

中图分类号: TP391 文献标志码:A

### Construction and application of rational q-Bernstein-Bézier curves

HUANG Ri-peng

(Department of Mathematics, Chuzhou College, Chuzhou Anhui 239000, China)

**Abstract:** Rational Bernstein-Bézier curve has been applied widely in computer-aided design and computer graphics. To construct a kind of rational q-Bernstein-Bézier curves based on classical Bernstein-Bézier curves, de Casteljau algorithm and q-Bernstein polynomials were studied. Some properties, the algorithm for computing curves, the technique concerning subdivision and degree elevation of curves were also discussed. A family of rational Bernstein-Bézier curves could be obtained by changing the value of  $q$ . The results indicate that the rational curves have strong flexibility. At last, the generalization of rational q-Bernstein-Bézier curves was proved to be effective by conic curve and representation digital image interpolation.

**Key words:** rational curve; de Casteljau algorithm; curve subdivision; curve degree elevation; conic curve; image interpolation

### 0 引言

在机械零件、塑料制品设计中经常有许多由二次曲线弧表示的形状,这些形状在设计上都要求由图纸准确无误的给出,在制造上往往要求较高的精度。B 样条方法在表示与设计自由型曲线曲面形状时显示了强大的功能,但是 B 样条曲线包括其特例 Bézier 曲线都不能表示除抛物线外的二次曲线弧,只能近似表示。近似表示将使原本简单的问题复杂化,还带来原来不存在的设计误差问题。为描述自由型曲线和曲面,又能精确表示二次曲线弧和二次曲面,人们提出了有理 Bézier、B 样条曲线和曲面,这些理论现在广泛应用于计算机辅助设计,计算机图形学研究和数字图像处理中。Oruc 等人<sup>[1]</sup>介绍了一种广义的 Bernstein 多项式,并讨论其在曲线曲面造型中的应用。本文将这种广义的 Bernstein 多项式推广至有理情形,给出一种计算有理 Bernstein-Bézier 曲线的 de Casteljau 算法,并将讨论有理曲线的细分及升阶方法,最后通过具体实例验证本方法的有效性。

文献[1]中介绍的 q-Bernstein 多项式如下:

$$B_n(f; x) = \sum_{i=0}^n \begin{bmatrix} n \\ i \end{bmatrix} f\left(\frac{\begin{bmatrix} i \\ n \end{bmatrix}}{\begin{bmatrix} n \\ n \end{bmatrix}}\right) x^i \prod_{j=0}^{n-i-1} (1 - q^j x) \quad (1)$$

其中  $\begin{bmatrix} i \\ n \end{bmatrix}$  定义为:

$$\begin{bmatrix} i \\ n \end{bmatrix} = \begin{cases} (1 - q^i)/(1 - q), & q \neq 1 \\ 1, & q = 1 \end{cases} \quad (2)$$

称:

$$\begin{bmatrix} n \\ i \end{bmatrix} = \begin{cases} \frac{\begin{bmatrix} n \\ 0 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} n-1 \\ 1 \end{bmatrix} \cdots \begin{bmatrix} n-i+1 \\ i \end{bmatrix}}{\begin{bmatrix} n \\ i \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} n-1 \\ i-1 \end{bmatrix} \cdots \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}}, & 1 \leq i \leq n \\ 1, & i = 0 \\ 0, & \text{其他} \end{cases}$$

为  $q$  二项式系数。若  $q = 1$ ,  $\begin{bmatrix} n \\ i \end{bmatrix}$  就是通常的二项式系数。 $q$  二项式系数满足如下的递推关系:

$$\begin{bmatrix} n \\ i \end{bmatrix} = q^{n-i} \begin{bmatrix} n-1 \\ i-1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} n-1 \\ i \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} n \\ i \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} n-1 \\ i-1 \end{bmatrix} + q^i \begin{bmatrix} n-1 \\ i \end{bmatrix}$$

由定义的  $\begin{bmatrix} n \\ i \end{bmatrix}$  可以推出:

$$(1-x)(1-qx)\cdots(1-q^{n-1}x) = \sum_{i=0}^n (-1)^i q^{i(i-1)/2} \begin{bmatrix} n \\ i \end{bmatrix} x^i \quad (3)$$

式(1)定义的  $B_n(f; x)$  满足端点插值条件,当  $0 < q \leq 1$  时,  $B_n(f; x)$  具有经典 Bernstein 多项式保形性质。文献[2-4]还讨论了  $B_n(f; x)$  其他一些的性质和计算方法,式(1)的  $B_n(f; x)$  计算方法如下。

算法 1:

给定  $f_0^{(0)}, f_1^{(0)}, \dots, f_n^{(0)}$

循环  $m$  从 1 到  $n$

循环  $i$  从 0 到  $n - m$

$$\text{执行 } f_i^{(m)} = (q^i - q^{m-1}x)f_i^{(m-1)} + xf_{i+1}^{(m-1)}$$

返回

上述算法中如果取  $q = 1$ , 就是经典的 de Casteljau 算法<sup>[5-7]</sup>。

## 1 有理 q-Bernstein-Bézier 曲线的构造

### 1.1 曲线的构造公式

定义参数型有理 q-Bernstein-Bézier 曲线  $\mathbf{R}(t)$  为:

$$\mathbf{R}(t) = \frac{\sum_{i=0}^n \omega_i \mathbf{P}_i \mathbf{B}_i^n(t)}{\sum_{i=0}^n \omega_i \mathbf{B}_i^n(t)} \quad (4)$$

其中:  $\mathbf{P}_i \in \mathbb{R}^d$  ( $d = 2, 3$ ) 是有理曲线  $\mathbf{R}(t)$  的控制点;  $\omega_i$  是与  $\mathbf{P}_i$  ( $i = 0, 1, \dots, n$ ) 相联系的权因子, 如果令所有的权因子  $\omega_i = 1$ ,  $i = 0, \dots, n$ , 则  $\mathbf{R}(t)$  退化为非有理 q-Bernstein-Bézier 多项式曲线; 若限制所有的  $\omega_i > 0$ , 则所有的基函数都是非负的, 曲线没有奇点。

有理 q-Bernstein-Bézier 曲线  $\mathbf{R}(t)$  具有如下性质。

1) 保凸性。当权因子  $\omega_i > 0$  且  $0 < q \leq 1$  时, 曲线  $\mathbf{R}(t)$  位于控制点  $\mathbf{P}_i$  ( $i = 0, 1, \dots, n$ ) 的凸包内部。

2) 曲线  $\mathbf{R}(t)$  满足端点插值性质, 即  $\mathbf{R}(0) = \mathbf{P}_0$ ,  $\mathbf{R}(1) = \mathbf{P}_n$ 。

3) 变差减少性质。曲线  $\mathbf{R}(t)$  与任意直线的交点不超过它与控制多边形的交点。

4)  $\mathbf{R}(t)$  的仿射不变性:

$$\mathbf{R}(t) = \sum_{i=0}^n p_i \varphi_i(t), \varphi_i(t) = \frac{\omega_i \mathbf{B}_i^n(t)}{\sum_{i=0}^n \omega_i \mathbf{B}_i^n(t)} = 1$$

5)  $\mathbf{R}(t)$  的投影不变性, 详见定理 1。

下面给出计算有理 q-Bernstein-Bézier 多项式曲线的算法。

**算法 2** 假定控制点  $\mathbf{P}_0^0, \mathbf{P}_1^0, \dots, \mathbf{P}_n^0 \in \mathbb{R}^d$  ( $d = 2, 3$ ), 权因子  $\omega_i^0 > 0$ ,  $i = 0, 1, \dots, n$ , 给定一个初始值  $q \in \mathbb{R}$ , 且  $0 < q \leq 1$ 。

1) 计算:

$$\omega_i^j = (q^i - q^{j-1}t)\omega_i^{j-1} + t\omega_{i+1}^{j-1}; \quad i = 0, 1, \dots, n-j, j = 1, 2, \dots, n \quad (5)$$

2) 计算:

$$\mathbf{P}_i^j(t) = \frac{(q^i - q^{j-1}t)\omega_i^{j-1} \mathbf{P}_i^{j-1} + t\omega_{i+1}^{j-1} \mathbf{P}_{i+1}^{j-1}}{\omega_i^j}; \quad i = 0, 1, \dots, n, j = 1, 2, \dots, n \quad (6)$$

显然, 当  $q = 1$  时, 上述算法就是计算有理 Bernstein-Bézier 曲线的 de Casteljau 算法<sup>[6,9]</sup>。

**定理 1** 算法 2 中的  $\mathbf{P}_i^j(t)$  可以表示为:

$$\mathbf{P}_i^j(t) = \frac{\sum_{k=0}^j \omega_{i+k} \mathbf{P}_{i+k} \binom{j}{k} t^k \prod_{s=0}^{i-k-1} (q^i - q^s t)}{\sum_{k=0}^j \omega_{i+k} \binom{j}{k} t^k \prod_{s=0}^{i-k-1} (q^i - q^s t)} \quad (7)$$

且  $\mathbf{P}_0^n(t) = \mathbf{R}(t)$ 。

**证明** 首先用齐次坐标的形式定义控制点:

$$\mathbf{P}_i^0 = \begin{pmatrix} \omega_i^0 \mathbf{P}_i \\ \omega_i^0 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^d; \quad d = 2, 3, i = 0, 1, \dots, n$$

由算法 1 可得  $\omega_i^j(t) = (q^i - q^{j-1}t) \binom{\omega_i^{j-1} \mathbf{P}_i^{j-1}}{\omega_i^{j-1}} + t\omega_{i+1}^{j-1}$ , 则:

$$\mathbf{P}_i^j(t) = \begin{pmatrix} \omega_i^j \mathbf{P}_i^j \\ \omega_i^j \end{pmatrix} = (q^i - q^{j-1}t) \binom{\omega_i^{j-1} \mathbf{P}_i^{j-1}}{\omega_i^{j-1}} + t \binom{\omega_{i+1}^{j-1} \mathbf{P}_{i+1}^{j-1}}{\omega_{i+1}^{j-1}}$$

$\mathbf{P}_i^j(t)$  是  $\mathbb{R}^d$  里的 q-Bernstein-Bézier 曲线。根据文献[3]的定理 2.1, 用  $\omega_i^j$  来替换  $f_i^{(j)}$ , 可得  $\omega_0^n = \omega(t) = \sum_0^n \omega_i \mathbf{B}_i^n(t)$ , 对  $\forall t \in [0, 1]$ , 将  $\mathbb{R}^d$  里  $\mathbf{P}_i^j(t)$  投影到  $\omega = 1$  的超平面上即得式(7)。

下面给出  $\mathbf{P}_i^j(t)$  的差分表现形式。

**定理 2** 当  $0 \leq j \leq n, 0 \leq i \leq n - j$  时:

$$\mathbf{P}_i^j(t) = \frac{\sum_{k=0}^j q^{(j-k)i} \binom{j}{k} \Delta^k (\omega_i \mathbf{P}_i) t^k}{\sum_{k=0}^j q^{(j-k)i} \binom{j}{k} \Delta^k \omega_i t^k} \quad (8)$$

其中  $\Delta^k (\omega_i \mathbf{P}_i) = \Delta^{k-1} (\omega_{i+1} \mathbf{P}_{i+1}) - q^{k-1} \Delta^{k-1} (\omega_i \mathbf{P}_i)$ 。

**证明** 由文献[4] 中的定理 2.3 可得:

$$\omega_i^j(t) = \sum_{k=0}^j q^{(j-k)i} \binom{j}{k} \Delta^k \omega_i t^k \quad (9)$$

由式(5)、(6)即可获得式(8)。

由上面的分析可以得到有理 q-Bernstein-Bézier 曲线的 q-差分表示形式:

$$\mathbf{R}(t) = \mathbf{P}_0^n(t) = \frac{\sum_{k=0}^n \binom{n}{k} \Delta^k (\omega_0 \mathbf{P}_0) t^k}{\sum_{k=0}^n \binom{n}{k} \Delta^k \omega_0 t^k} \quad (10)$$

### 1.2 有理 q-Bernstein-Bézier 曲线的细分和次数升阶

细分和升阶是曲线和曲面设计中增加灵活性的重要手段<sup>[8,10]</sup>。Farin 在文献[5]给出了标准的有理 Bézier 曲线的细分方法。下面给出有理 q-Bernstein-Bézier 曲线的细分公式。

**引理** 令  $B_i^n(t)$  是 q-Bernstein-Bézier 多项式, 对于常实数  $c \in (0, 1)$ , 则有:

$$B_i^n(ct) = \sum_{j=0}^n B_i^j(c) B_j^n(t) \quad (11)$$

**证明** 令  $\mathbf{M}$  是  $(n+1) \times (n+1)$  的矩阵,  $M_{i,j} = B_j^i(ct)$  ( $i = 0, 1, \dots, n, j = 0, 1, \dots, n$ )。显然  $\mathbf{M}$  是一个下三角矩阵且有特征值  $c^i t^i$  ( $i = 0, 1, \dots, n$ )。 $\mathbf{M}$  可以写成  $\mathbf{M} = \mathbf{P} \mathbf{D} \mathbf{P}^{-1}$ , 这里

$$\mathbf{P}_{i,j} = \begin{bmatrix} i \\ j \end{bmatrix}, \mathbf{P}_{i,j}^{-1} = (-1)^{i-j} q^{(i-j)(i-j-1)/2} \begin{bmatrix} i \\ j \end{bmatrix}.$$

可知:

$$\mathbf{M} = \mathbf{P} \mathbf{D}_1 \mathbf{P}^{-1} \mathbf{P} \mathbf{D}_2 \mathbf{P}^{-1} = \mathbf{T} \cdot \mathbf{L}$$

其中:  $(D_1)_{i,i} = t^i$ ,  $(D_2)_{i,i} = c^i$  ( $i = 0, 1, \dots, n$ );  $T_{i,j} = B_j^i(t)$ ;  $L_{i,j} = B_j^i(c)$ 。因此命题获证。

**定理 3** 令  $\mathbf{R}(t)$  是有理  $n$  次 q-Bernstein-Bézier 曲线,  $\mathbf{P}_i$  ( $i = 0, 1, \dots, n$ ) 表示控制点。若  $c \in (0, 1)$ , 则  $[0, c]$  区间上的曲线部分为:

$$\mathbf{R}_{[0,c]}(t) = \frac{\sum_{j=0}^n \omega_0^j(c) \mathbf{P}_0^j(c) B_j^n(t)}{\sum_{j=0}^n \omega_0^j(c) B_j^n(t)}; \quad t \in [0, 1] \quad (12)$$

其中  $\mathbf{P}_0^j(c)$  和  $\omega_0^j(c)$  可以按照算法 1 计算。

证明 实际上  $[0, c]$  区间上的曲线可以表示为:

$$\mathbf{R}_{[0,c]}(t) = \frac{\sum_{i=0}^n \omega_i \mathbf{P}_i B_i^n(ct)}{\sum_{i=0}^n \omega_i B_i^n(ct)}; t \in [0,1] \quad (13)$$

由引理可知:

$$\mathbf{R}_{[0,c]}(t) = \frac{\sum_{i=0}^n \omega_i \mathbf{P}_i \sum_{j=0}^n B_i^j(c) B_j^n(t)}{\sum_{i=0}^n \omega_i \sum_{j=0}^n B_i^j(c) B_j^n(t)} \quad (14)$$

交换求和符号的次序,并注意到当  $i > j$  时,  $B_i^j(c) = 0$ , 因此:

$$\mathbf{R}_{[0,c]}(t) = \frac{\sum_{j=0}^n \sum_{i=0}^j \omega_i \mathbf{P}_i B_i^j(c) B_j^n(t)}{\sum_{j=0}^n \sum_{i=0}^j \omega_i B_i^j(c) B_j^n(t)} \quad (15)$$

结合式(5),(6)以及引理,即得式(12)。

下面讨论曲线的升阶,即用更高次的基函数来表示曲线。实际上有理  $n$  次 q-Bernstein-Bézier 曲线的升阶运算就是文献 [9] 中介绍的非有理曲线升阶算法的直接推广。因此,由文献[1]中的定理 3.1 可知:

$$\mathbf{R}(t) = \mathbf{R}_{[0,c]}(t) = \frac{\sum_{i=0}^n \omega_i \mathbf{P}_i B_i^n(t)}{\sum_{i=0}^n \omega_i B_i^n(t)} = \frac{\sum_{i=0}^{n+1} \omega_i' \mathbf{P}_i' B_i^{n+1}(t)}{\sum_{i=0}^n \omega_i' B_i^{n+1}(t)}$$

其中:

$$\omega_i' \mathbf{P}_i' = \left(1 - \frac{[n+1-i]}{[n+1]}\right) \omega_{i-1} \mathbf{P}_{i-1} + \frac{[n+1-i]}{[n+1]} \omega_i \mathbf{P}_i; i = 0, 1, \dots, n+1$$

## 2 应用举例

### 2.1 构造圆锥曲线

文献[9~10]中利用有理 Bézier 曲线来表示圆锥曲线。下面利用二次有理 q-Bernstein-Bézier 曲线来表示圆锥曲线,为了简化计算,取  $\omega_0 = \omega_1 = 1$ 。对于给定的二次有理 Bernstein-Bézier 曲线,通过对控制多边形的平移和旋转使得  $\mathbf{P}_0 = -\mathbf{P}_2$ 。这种变换不会改变曲线的形状,因为它具有仿射和射影不变性。同时取  $\mathbf{P}_0, \mathbf{P}_2$  的中点作为坐标系的原点  $O(0, 0)$ 。

二次有理 q-Bernstein-Bézier 曲线定义为:

$$\mathbf{R}(t) = \frac{(1-t)(1-qt)\mathbf{P}_0 + (1+q)t(1-t)\omega\mathbf{P}_1 + t^2\mathbf{P}_2}{(1-t)(1-qt) + (1+q)t(1-t)\omega + t^2} \quad (16)$$

$\omega$  是点  $\mathbf{P}_1$  的权因子。 $\mathbf{R}(t)$  的肩点是:

$$\mathbf{S} = \mathbf{R}(0.5) = \frac{(1-q)\mathbf{P}_0 + (1+q)\omega\mathbf{P}_1}{(3-q) + (1+q)\omega} \quad (17)$$

对式(16)的控制点作变换:

$$\begin{bmatrix} 1 & \frac{1-q}{2} & 0 \\ 0 & \frac{1+q}{2} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (18)$$

得新的控制点为:

$$\tilde{\mathbf{P}}_0 = \mathbf{P}_0, \tilde{\mathbf{P}}_1 = \frac{(1-q)\mathbf{P}_0 + (1+q)\mathbf{P}_1}{(1-q) + (1+q)\omega}, \tilde{\mathbf{P}}_2 = \mathbf{P}_2$$

由于点  $S$  和控制能够点  $\tilde{\mathbf{P}}_1$  在过坐标原点的一条直线上,由文献[5]可知:

$$\frac{|\mathbf{OS}|}{|\mathbf{O}\tilde{\mathbf{P}}_1|} = \frac{(1-q) + (1+q)\omega}{(3-q) + (1+q)\omega} \quad (19)$$

分类讨论如下:

1) 若  $\frac{|\mathbf{OS}|}{|\mathbf{O}\tilde{\mathbf{P}}_1|} < \frac{1}{2}$ , 且  $q \neq 1$ , 则  $\mathbf{R}(t)$  表示的曲线是椭圆;

2) 若  $\frac{|\mathbf{OS}|}{|\mathbf{O}\tilde{\mathbf{P}}_1|} = \frac{1}{2}$ , 且  $q \neq 1$ , 则  $\mathbf{R}(t)$  表示的曲线是抛物线;

3) 若  $\frac{|\mathbf{OS}|}{|\mathbf{O}\tilde{\mathbf{P}}_1|} > \frac{1}{2}$ , 且  $q \neq 1$ , 则  $\mathbf{R}(t)$  表示的曲线是双曲线。

对于式(19),当  $q = -1$  时,  $\frac{|\mathbf{OS}|}{|\mathbf{O}\tilde{\mathbf{P}}_1|} = \frac{1}{2}$ , 则对任意  $\omega$ ,  $\mathbf{R}(t)$

退化为一直线。若  $\omega = 1$ , 有  $\frac{|\mathbf{OS}|}{|\mathbf{O}\tilde{\mathbf{P}}_1|} = \frac{1}{2}$ , 则当  $q \neq 1$  时,  $\mathbf{R}(t)$

表示双曲线,由  $\frac{(1-q) + (1+q)\omega}{(3-q) + (1+q)\omega} < \frac{1}{2}$  可得  $(1+q)\omega < (1-q)$ , 当  $q < -1$ ,  $\omega > 1$  或  $q > -1$ ,  $\omega < 1$  时,此不等式均成立,  $\mathbf{R}(t)$  表示椭圆;当  $q < -1$ ,  $\omega < 1$  或  $q > -1$ ,  $\omega > 1$  时,  $\mathbf{R}(t)$  表示双曲线。

给定控制点  $\mathbf{P}_0 = (-1, 0)$ ,  $\mathbf{P}_1 = (0, 2)$ ,  $\mathbf{P}_2 = (1, 0)$ , 权因子  $\omega_0 = \omega_2 = 1$ ,  $\omega_1 = 2$ , 当  $q = 0.5$ ,  $\mathbf{R}(t)$  为双曲线;当  $q = 1$ ,  $\mathbf{R}(t)$  表示直线;当  $q = 1.5$ ,  $\mathbf{R}(t)$  表示椭圆。

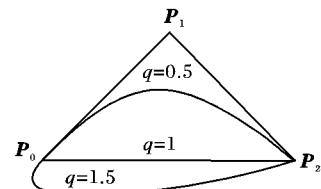


图 1  $q = 0.5$ , 双曲线;  $q = 1$ , 直线;  $q = 1.5$  椭圆

### 2.2 图像插值上的应用

图像插值是图像处理的重要内容之一,广泛应用于军事、航空、医学、通信、气象、遥感、动画制作和电影合成等领域。图像插值就是利用已知邻近像素点的灰度值来产生未知像素点的灰度值,以便由原始图像再生出具有更高分辨率的图像。目前文献中已经提出了很多实现图像插值的方法,如线性插值、三次样条、B 样条、双三次样条等,传统的插值方法侧重于图像的平滑,从而取得更好的视觉效果。但这类方法在保持图像平滑的同时,常常导致图像的边缘模糊。而图像的信息是影响视觉效果的重要因素,同时也是目标识别与跟踪、图像匹配、图像配准等图像处理问题的关键因素。下面简要一种介绍基于区域一致性的图像插值算法,这种方法既能保持图像光滑,也能保持图像边缘清晰。

这类插值方法一般采用如图 2 所示原理图,首先将原始低分辨率图像分割成不同区域;然后将插值点映射到低分辨率图像,判断其所属区域;最后根据插值点的邻域像素设计不同的插值公式,计算插值点的值。

符祥等人<sup>[11]</sup>利用分水岭算法将图像分割成不同区域,同

一区域内的像素标记相同,相邻区域的像素标记不同。然后将插值点映射到低分辨率图像,并结合近邻法和众数法确定待插值点所属区域,将待插值点分为两类:对于区域内的点,采用线性插值;对于区域间的过渡点,设计非线性插值公式,分配较大的权值给与待插值点属于同一区域的邻域像素,分配较小的权值给其他邻域像素,具体过程详见文献[11]。



图 2 区域指导的插值算法原理

设原始图像为  $f(x,y)$ ,缩放的比例是  $S_H$  和  $S_V$ ,插值后图像  $F$  中像素的位置记为  $(I, J)$ ,其所对应的原始图像中的位置为  $(x', y')$ ,且满足关系:  $x' = IS_H, y' = JS_V$ ,令  $x = [x'], y = [y'], dx = x' - x, dy = y' - y$ ,其中  $[x]$  表示取整函数,显然,  $0 \leq dx, dy < 1$ 。

图 3 表示图像插值原理。图 3(a)中原始图像中  $A, B, C, D$  四点的坐标分别是  $(x, y), (x+1, y), (x, y+1), (x+1, y+1)$ ;图 3(b)为插值后的目标图像,根据不同的缩放倍数,可以在  $E, F, G, H$  和  $I$  区域中插入不同个数的像素点;图 3(c)描述了插入的像素点  $M(x', y')$  映射到原图的位置。

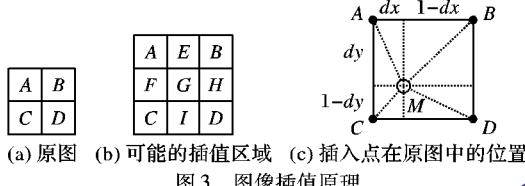


图 3 图像插值原理

分类讨论如下:

对于区域的  $E$  点,当  $A$  和  $B$  的标记相同时,为区域内部点,采用一维线性插值<sup>[11]</sup>;否则为区域间过渡插点,采用一维非线性插值,利用本文介绍的式(4);对于  $F, H, I$  和区域  $E$  的方法相似。对于区  $G$  域内的点,当  $A, B, C, D$  四点的标记都相同时,为区域内的点,采用二维线性插值公式<sup>[11]</sup>;否则为过渡点,采用二维非线性插值,沿  $x$  方向和  $y$  方向分别使用本文介绍的式(4)。

### 2.3 实验与分析

对  $80 \times 80$  的 Lena 图像采用不同的方法进行插值,线性插值的方法图像的边缘比较模糊;和双三次样条插值比较,本文提出的方法优点是插值后图像在平滑、细节保持和清晰度方面效果较好,如眼部、帽、肩部和脸部等边缘较清晰。若将原图像看作是无失真的图像,插值后的图像是有失真的图像,用本文提出的方法插值,得到图像峰值信噪比为 38.034 dB,边缘信噪比为 33.137 dB,消耗的时间为 1.034 s,而用线性插值法峰值信噪比为 36.089 dB,边缘信噪比为 31.472 dB,消耗的时间为 0.812 s;用双三次 B 样条法峰值信噪比为 37.876 dB,边缘信噪比为 32.457 dB,消耗的时间为 0.933 s。本文方法的缺点是消耗时间比另两种方法长。



图 4 对 Lena 图像进行插值处理效果比较

对二值图像的局部放大三倍,图 5(c)中从左至右依次采

用的方法是线性插值算法、最近邻域法、双三次样条法和本文提出的方法。从图像放大的效果来看,本文所提出的方法对于较高倍数的放大时仍能较好地保持图像的边缘和整体清晰度。

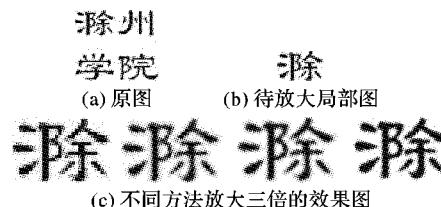


图 5 二值图像进行局部放大效果比较

### 3 结语

本文介绍了有理 q-Bernstein-Bézier 曲线公式的构造、性质和算法,阐述了曲线的细分和升阶技术,指出有理 q-Bernstein-Bézier 曲线是普通有理 Bernstein-Bézier 曲线的推广,通过数值实例说明当参数变化时,有理 q-Bernstein-Bézier 曲线  $R(t)$  表示曲线族。本文的例子表明参数  $q$  变化时,可得圆锥曲线族,说明这种推广是可行的。最后,介绍了通过有理 q-Bernstein-Bézier 曲线对数字图像进行插值,图像具有良好的视觉效果。

有理 Bézier 曲线和 B 样条方法在计算机图形学中已经得到广泛的应用,但在图像处理、数据压缩、图像特征的提取还面临许多挑战。如何提高运算效率以及缩短运算时间,是下一阶段研究的对象。若将文中介绍的方法推广至二元情形,应用于曲面的构造上,也是很有意义的工作。

### 参考文献:

- [1] ORUC H, PHILLIPS G M. q-Bernstein polynomials and Bézier curves [J]. Journal of Computational and Applied Mathematics, 2003, 151(1): 1–12.
- [2] ORUC H, PHILLIPS G M. A generalization of the Bernstein polynomials [J]. Proceedings of the Edinburgh Mathematical Society, 1999, 42(2): 403–413.
- [3] PHILLIPS G M. A de Casteljau algorithm for generalized Bernstein polynomials [J]. BIT Numerical Mathematics, 1997, 37(1): 232–236.
- [4] PHILLIPS G M. Bernstein polynomials based on the q-integers [J]. Annals of Numerical Mathematics, 1997, 38(4): 511–518.
- [5] FARIN G. Curves and surfaces for computer-aided geometric design: A practical guide [M]. 5th ed. San Diego, USA: Academic Press, 2002.
- [6] GOODMAN T N T, ORUC H, PHILLIPS G M. Convexity and generalized Bernstein polynomials [J]. Proceedings of the Edinburgh Mathematical Society, 1999, 42(2): 179–190.
- [7] PIEGL L, TILLER W. The NURBS book [M]. 2nd ed. Berlin: Springer-Verlag, 1997.
- [8] HOSCHEK J, LASSEK D. Fundamentals of computer aided geometric design [M]. Natick, MA, USA: AK Peters, 1993.
- [9] FARIN G. Algorithms for rational Bézier curves [J]. Computer-Aided Design, 1983, 15(2): 73–77.
- [10] 施法中. 计算机辅助几何设计与非均匀有理 B 样条 [M]. 北京: 高等教育出版社, 2001.
- [11] 符祥, 郭宝龙. 区域指导的自适应图像插值算法 [J]. 光电子·激光, 2008, 19(2): 233–236.