

一类非线性周期时间序列模型

王会战

(陕西理工学院 数学系, 陕西 汉中 723001)

(wanghuiizhan@gmail.com)

摘要:为了描述周期时间序列中的偏倚和多峰等非线性特征,结合有限混合模型方法,提出混合周期自回归滑动平均时间序列模型(MPARMA),给出了MPARMA模型的平稳性条件,讨论了期望最大化(EM)算法的应用,通过PM10浓度序列分析,评估了MPARMA模型的表现。

关键词:周期时间序列;周期自回归滑动平均;平稳性;EM算法;条件异方差

中图分类号: TP391 **文献标志码:** A

Nonlinear periodic time series model

WANG Hui-zhan

(Department of Mathematics, Shaanxi University of Technology, Hanzhong Shaanxi 723001, China)

Abstract: In combination with finite mixture modeling, mixture periodical autoregressive moving average (MPARMA) models were introduced to fit periodic time series with asymmetric and multimodal distributions, the stationary condition of such series was derived, and the application of Expectation Maximization (EM) algorithm was discussed. The new model was evaluated by analyzing the PM10 concentrations.

Key words: periodic correlated time series; Periodical Autoregressive Moving-Average (PARMA); stationary; Expectation Maximization (EM) algorithm; heteroskedasticity

0 引言

由于自然活动的周期性,在气象学,水文学,经济学等方面广泛存在着具有周期统计结构的时间序列,即周期相关时间序列(Periodically Correlated Time Series)。周期时间序列 $\{X_n\}$ 的基本特征是一阶矩和二阶矩具有周期平稳性:

$$E(X_{s+T}) = E(X_s), \text{Cov}(X_{s+T}, X_{t+T}) = \text{Cov}(X_s, X_t) \quad (1)$$

其中: s, t 为正整数; T 为满足式的最小正整数,称为周期。

周期时间序列分析的常用模型是周期自回归滑动平均(Periodical Autoregressive Moving-Average, PARMA)模型^[1-2]:

$$X_{nT+v} - \sum_{i=1}^p \varphi_i(v) X_{nT+v-i} = \varepsilon_{nT+v} + \sum_{j=1}^q \theta_j(v) \varepsilon_{nT+v-j} \quad (2)$$

其中:记号 X_{nT+v} 表示 $\{X_n\}$ 处于第 $n(0 \leq n \leq N-1)$ 个周期的第 $v(1 \leq v \leq T)$ 个季节; $\varphi_1(v), \varphi_2(v), \dots, \varphi_p(v)$ 和 $\theta_1(v), \theta_2(v), \dots, \theta_q(v)$ 分别是第 v 个季节的自回归和滑动平均系数;在第 v 个季节, p 和 q 均为常数;白噪声序列 $\{\varepsilon_{nT+v}\}$ 是不相关的,且 $E(\varepsilon_{nT+v}) = 0, \text{Var}(\varepsilon_{nT+v}) = \sigma_v^2 > 0$ 。

由于正态性假设,PARMA模型并不能反映周期时间序列中的偏倚和多峰现象。考虑到混合模型建模的灵活性,本文结合有限混合模型方法^[3-5],提出混合周期自回归滑动平均时间序列模型,为非线性时间序列的建模提供一种解决思路。

1 MPARMA模型的定义及平稳性

定义1 设 $\{Y_{nT+v}; n=0, 1, 2, \dots, 1 \leq v \leq T\}$ 是具有有限二阶矩的周期相关时间序列,由 c 个混合元组成的混合周期自回归滑动平均模型定义如下:

$$F(Y_{nT+v} | \mathcal{F}_{t-1}) = \sum_{k=1}^c \pi(v, k) \Phi\left(\frac{\varepsilon_{v,k}}{\sigma(v, k)}\right);$$

$$\varepsilon_{v,k} = Y_{nT+v} - \sum_{i=1}^{p_k} \varphi_i(v, k) Y_{nT+v-i} - \sum_{j=1}^{q_k} \theta_j(v, k) \varepsilon_{nT+v-j} \quad (3)$$

模型简记为MPARMA($c; p_1, p_2, \dots, p_c; q_1, q_2, \dots, q_c$)。其中: Y_{nT+v} 表示 $\{Y_t\}$ 在第 $n(0 \leq n \leq N-1)$ 个循环的第 $v(1 \leq v \leq T)$ 个季节, $0 \leq \pi(v, k) \leq 1$ 且 $\sum_{k=1}^c \pi(v, k) = 1(1 \leq v \leq T)$, $\mathcal{F}_{t-1} = \sigma(Y_{nT+v-1}, Y_{nT+v-2}, \dots)$ 是由 $\{Y_{nT+v-1}, Y_{nT+v-2}, \dots\}$ 生成的 σ -域, $F(Y_{nT+v} | \mathcal{F}_{t-1})$ 表示 Y_{nT+v} 的条件分布函数, $\Phi(\cdot)$ 是标准正态分布函数。

由定义1可知,MPARMA模型实际是由 c 个残量服从Gauss分布的线性PARMA模型混合得到。当 $c=1$ 时,MPARMA模型是一般的PARMA模型。当 $\theta(v, k)=0, k=1, 2, \dots, c$ 时,MPARMA模型表示一个混合周期自回归(Mixture Periodical Autoregression, MPAR)模型^[6]。

定理1^[3] 设 $\{Y_{nT+v}\}$ 是一个MPARMA($c; p_1, p_2, \dots, p_c; q_1, q_2, \dots, q_c$)过程,则有:

$$E(Y_{nT+v} | \mathcal{F}_{t-1}) = \sum_{k=1}^c \pi(v, k) \left(\sum_{i=1}^{p_k} \varphi_i(v, k) Y_{nT+v-i} + \sum_{j=1}^{q_k} \theta_j(v, k) \varepsilon_{nT+v-j} \right) \quad (4)$$

$$\text{Var}(Y_{nT+v} | \mathcal{F}_{t-1}) = \sum_{k=1}^c \pi(v, k) \sigma^2(v, k) + \sum_{k=1}^c \pi(v, k) H^2(v, k) - \left(\sum_{k=1}^c \pi(v, k) H(v, k) \right)^2 \quad (5)$$

其中 $H(v, k) = \sum_{i=1}^{p_k} \varphi_i(v, k) Y_{nT+v-i} + \sum_{j=1}^{q_k} \theta_j(v, k) \varepsilon_{nT+v-j}$ 。

由式(4)可知,条件期望依赖于序列的过去值,因此,序

列的条件分布随时间变化,MPARMA 序列的条件分布可能呈现多峰,从而 Y_{nT+v} 的条件期望可能不是对未来值的最佳预报。式(5)表明 Y_{nT+v} 的条件方差依赖于条件期望。如果 $H(v,k)$ ($1 \leq k \leq c$) 相差较大,则此时条件分布是多峰的;当 $H(v,k)$ 都相等时,条件方差具有最小值。表明 MPARMA 模型能灵活地描述条件异方差。定理 1 也反映出 MPARMA 模型可以描述条件均值和条件方差中的周期性。

下面的定理 2 给出了 MPARMA ($c; p_1, p_2, \dots, p_c; q_1, q_2, \dots, q_c$) 序列的一阶平稳性条件,对于一般的 MPARMA 序列,二阶平稳性的讨论过于复杂,因此定理 4 只讨论了 MPARMA ($c; 1, 1, \dots, 1; q_1, q_2, \dots, q_c$) 序列的二阶平稳性条件,定理 2~4 的证明见参考文献[3]。

定理 2^[3] 设 $\{Y_{nT+v}\}$ 是一个 MPARMA ($c; p_1, p_2, \dots, p_c; q_1, q_2, \dots, q_c$) 过程,则 $\{Y_{nT+v}\}$ 为一阶平稳的充分必要条件是方程:

$$\det(A_0 - \sum_{m=1}^{p^*} A_m z^m) \neq 0; |z| \leq 1 \quad (6)$$

成立。其中,矩阵 A_i ($i = 0, 1, 2, \dots, p^*$) 定义如下:

$$(A_0)_{ij} = \begin{cases} -\sum_{k=1}^c \pi(i, k) \varphi_{i-j}(i, k), & i > j \\ 1, & i = j \\ 0, & i < j \end{cases} \quad (7)$$

$$(A_m)_{ij} = \sum_{k=1}^c \pi(i, k) \varphi_{mT+i-j}(i, k); \quad 1 \leq m \leq p^*, p^* = \left\lceil \frac{P}{T} \right\rceil \quad (8)$$

定理 3^[3] 设 $\{Y_{nT+v}\}$ 是一个 MPARMA ($c; 1, 1, \dots, 1; q_1, q_2, \dots, q_c$) 过程,则 $\{Y_{nT+v}\}$ 为一阶平稳的充分必要条件是:

$$\left| \prod_{v=1}^T \left\{ \sum_{k=1}^c \pi(v, k) \varphi_1(v, k) \right\} \right| < 1 \quad (9)$$

定理 4^[3] PARMA ($c; 1, 1, \dots, 1; q_1, q_2, \dots, q_c$) 过程 $\{Y_{nT+v}\}$ 是一阶平稳的,则其二阶平稳的充分必要条件是:

$$\prod_{v=1}^T \left(\sum_{k=1}^c \pi(v, k) \varphi_1^2(v, k) \right) < 1 \quad (10)$$

2 MPARMA 模型的参数估计

由于包含了季节参数,MPARMA 模型的参数估计比一般的模型要复杂,下面通过混合模型中常用的 EM 算法^[7-9]估计 MPARMA 模型的参数。

设 $Y' = \{Y_1, Y_2, \dots, Y_{NT}\}$ 是 MPARMA ($c; p_1, p_2, \dots, p_c; q_1, q_2, \dots, q_c$) 时间序列的一个现实, $y' = \{y_1, y_2, \dots, y_{NT}\}$ 是其观测值,其中 N 是周期数。 $\alpha' = \{\varphi', \theta', \pi', \sigma'\} \in \Theta$, 其中 Θ 为紧参数空间。

$$\begin{aligned} \varphi' &= \{\varphi_1(1, 1), \dots, \varphi_1(1, c), \dots, \varphi_1(T, 1), \dots, \varphi_1(T, c), \\ &\dots, \varphi_{p_c}(1, 1), \dots, \varphi_{p_c}(1, c), \dots, \varphi_{p_c}(T, 1), \dots, \varphi_{p_c}(T, c)\} \\ \theta' &= \{\theta_1(1, 1), \dots, \theta_1(1, c), \dots, \theta_1(T, 1), \dots, \theta_1(T, c), \\ &\dots, \theta_{p_c}(1, 1), \dots, \theta_{p_c}(1, c), \dots, \theta_{p_c}(T, 1), \dots, \theta_{p_c}(T, c)\} \\ \pi' &= \{\pi(1, 1), \dots, \pi(1, c-1), \dots, \pi(T, 1), \dots, \pi(T, c-1)\} \\ \sigma' &= \{\sigma(1, 1), \dots, \sigma(1, c), \dots, \sigma(T, 1), \dots, \sigma(T, c)\} \end{aligned}$$

设 $\{A_{nT+v}; n = 0, \dots, N-1, 1 \leq v \leq T\}$ 是独立同分布的待观测随机变量,且 $P\{A_{nT+v} = k\} = \pi(v, k)$ ($k = 1, \dots, c$), 令:

$$I_{nT+v, k} = \begin{cases} 1, & A_{nT+v} = k \\ 0, & \text{其他} \end{cases}; k = 1, \dots, c$$

完全对数似然函数为:

$$\begin{aligned} l_c(y_{NT}, \alpha) &= \log L_c(y_{NT}, \alpha) = \sum_{n=0}^{N-1} l_c(y_{nT}, \alpha) = \\ &= \sum_{n=0}^{N-1} \sum_{v=1}^T \sum_{k=1}^c \left\{ I_{nT+v, k} \left[\log \pi(v, k) - \frac{1}{2} \log 2\pi - \log \sigma^2(v, k) - W^2 \right] \right\} \end{aligned} \quad (11)$$

其中:

$$W^2 = \frac{\left(y_{nT+v} - \sum_{i=1}^{p_k} \varphi_i(v, k) y_{nT+v-i} - \sum_{j=1}^{q_k} \theta_j(v, k) \varepsilon_{nT+v-j} \right)^2}{2\sigma^2(v, k)}$$

对数似然函数关于参数 α 的一阶偏导数为:

$$\frac{\partial l_c(y_{NT}, \alpha)}{\partial \varphi_i(v, k)} = \sum_{n=0}^{N-1} \frac{I_{nT+v, k} y_{nT+v-i}}{\sigma^2(v, k)} \varepsilon_{v, k}; k = 1, 2, \dots, c \quad (12)$$

$$\frac{\partial l_c(y_{NT}, \alpha)}{\partial \theta_m(v, k)} = \sum_{n=0}^{N-1} \frac{I_{nT+v, k} \varepsilon_{nT+v-m}}{\sigma^2(v, k)} \varepsilon_{v, k}; k = 1, 2, \dots, c \quad (13)$$

$$\frac{\partial l_c(y_{NT}, \alpha)}{\partial \pi(v, k)} = \sum_{n=0}^{N-1} \left[\frac{I_{nT+v, k}}{\pi(v, k)} - \frac{I_{nT+v, c}}{1 - \sum_{d=1}^{c-1} \pi(v, d)} \right];$$

$$k = 1, 2, \dots, c-1 \quad (14)$$

$$\frac{\partial l_c(y_{NT}, \alpha)}{\partial \sigma(v, k)} = \sum_{n=0}^{N-1} \left[-\frac{I_{nT+v, k}}{\sigma(v, k)} + \frac{\varepsilon_{v, k}^2}{\sigma^3(v, k)} \right];$$

$$k = 1, 2, \dots, c \quad (15)$$

其中: $v = 1, 2, \dots, T; k = 1, \dots, p_c; m = 1, \dots, q_c$ 。

EM 算法通过迭代极大化式(11)表示的对数似然函数,求得参数估计。在 MPARMA 模型的参数估计中,EM 算法的具体步骤如下。

E 步: 将待观测数据 $I_{nT+v, k}$ 看作是缺损数据。假设参数 α 已知,不妨设为 α^0 , 计算完全对数似然函数的期望。在第 $(s+1)$ 步,需要计算 $Q(\alpha, \alpha^s)$:

$$\begin{aligned} Q(\alpha, \alpha^s) &= = \\ &= \sum_{n=0}^{N-1} \sum_{v=1}^T \sum_{k=1}^c \left\{ \delta_{nT+v, k} \left[\log \pi(v, k) - \frac{1}{2} \log 2\pi - \log \sigma^2(v, k) - W^2 \right] \right\} \end{aligned} \quad (16)$$

M 步: M 步即是要在参数空间 Θ 上寻找一个点 α^{s+1} 将 $Q(\alpha, \alpha^s)$ 极大化,这可以通过令式(12)~(15)为 0 求得。

将 E 步和 M 步反复迭代直至收敛,即可得到参数的估计值。EM 算法的标准差通过下式计算^[10]:

$$I = I_c - I_m = E \left(\frac{\partial^2 l_c}{\partial \theta^2} \middle| \hat{\theta}, Y \right) - \text{Var} \left(\frac{\partial l_c}{\partial \theta} \middle| \hat{\theta}, Y \right) \quad (17)$$

其中: I 为观测信息阵; I_c 为完全信息阵; I_m 缺损信息阵; l_c 由式(11)定义。关于 I_c 和 I_m 的详细推导见文献[11]。

MPARMA 模型在每一季的混合元个数 c 和阶数可由使用如下 BIC 值达到最小而得到:

$$BIC_v = -2l^* + (3c - 1 + \sum_{k=1}^c p_k + \sum_{k=1}^c q_k) \log(n - p) \quad (18)$$

$$\text{其中 } l^* = \sum_{i=1}^n \log \{f(y_i | \mathcal{F}_{i-1})\} = \sum_{i=1}^n \log \left\{ \frac{d}{dy_i} F(y_i | \mathcal{F}_{i-1}) \right\}.$$

3 仿真及实例分析

3.1 仿真分析

进行 1000 次的 Monte Carlo 仿真,仿真的样本大小 (NS) 分别为 200 和 600。表 1 是周期为 2 的 MPARMA ($2; 1, 1; 1, 1$) 模型参数的真值、EM 估计和相应的标准差,可以看出,EM 估计产生的误差较小,基本接近参数真值,表明 EM 算法是一种有效可行的参数估计方法。

3.2 实例分析

在空气污染物中,通常把粒径在 10 μm 以下的颗粒物称为 PM10,又称为可吸入颗粒物或飘尘。可吸入颗粒物(PM10)在环境空气中持续的时间很长,对人体健康和大气能见度影响都很大,是空气质量的主要指标之一。

图 1(a)是美国俄亥俄州克利夫兰市(Cleveland)从 1999 年4月到1999年10月间监测的PM10浓度(μg/m³)的散点

图,其中每天两组数据,分别是上午(1:00~12:00)12个监测数据的平均值和下午(13:00~00:00)12个监测数据的平均值,共428个数据^[6]。可以看出,序列在季节内存在着明显的多峰(图1(b))和偏倚及非对称的尾部特征(图1(c)、(d))。

将序列季节零均值化,记为{y_t} ,通过游程检验法检验,序列{y_t}是非平稳的。应用条件期望估计法检验序列{y_t}为非线性序列。

表 1 EM 算法估计参数的模拟研究

参数	NS = 200						NS = 600					
	v = 1			v = 2			v = 1			v = 2		
	真值	估计值	标准差	真值	估计值	标准差	真值	估计值	标准差	真值	估计值	标准差
π(v,1)	0.6	0.6170	0.0081	0.7	0.6944	0.0317	0.6	0.6165	0.0038	0.7	0.6946	0.0087
φ ₁ (v,1)	0.7	0.6784	0.0185	0.3	0.3315	0.0105	0.7	0.6813	0.0092	0.3	0.3215	0.0095
φ ₁ (v,2)	0.4	0.4026	0.0180	1.6	1.5958	0.0213	0.4	0.3957	0.0094	1.6	1.5972	0.0013
θ ₁ (v,1)	0.5	0.5547	0.0199	0.5	0.4398	0.0165	0.5	0.5511	0.0108	0.5	0.4512	0.0112
θ ₁ (v,2)	0.8	0.7607	0.0121	0.6	0.6029	0.0014	0.8	0.7729	0.0048	0.6	0.6023	0.0013
σ(v,1)	5.0	4.9245	0.1109	4.0	3.7142	0.4061	5.0	4.9682	0.0546	4.0	3.7356	0.3182
σ(v,2)	3.0	3.1096	0.0352	1.0	1.0462	0.2304	3.0	3.1270	0.0193	1.0	1.0373	0.1041

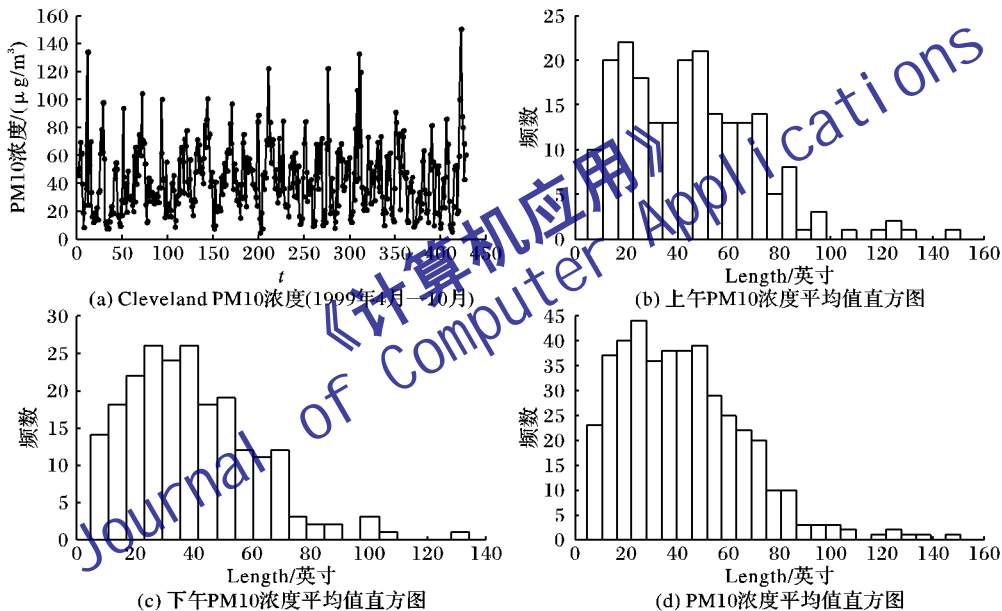


图 1 PM10 浓度序列及直方图

按照样本的性质,选用周期为 2 的 MPARMA (c;p₁,p₂,...,p_c;q₁,q₂,...,q_c) 模型对序列{y_t}建模,下面仅列出当 c = 2 和 c = 3 时按照 BIC 准则和模型简约性原则所筛选的 4 个模型:

模型 I:MPARMA(2;0,1;1,0);模型 II:MPARMA(2;1,0;1,1);模型 III:MPARMA(3;0,1,0;1,0,0);模型 IV:MPARMA(3;0,1,1;1,0,0)。

模型 I~IV 对应的 BIC 值如表 2。

表 2 模型对应的 BIC 值

模型	BIC
模型 I	3449.4
模型 II	3406.9
模型 III	3843.8
模型 IV	3922.9

由表 2 可以看出,相对于 3 项的 MPARMA 模型 III、IV,2 项的模型 I、II 都能够较好地拟合数据,为讨论方便,下面仅讨论模型 I。模型 I 的 EM 估计见表 3。

表 3 模型 MPARMA(2;0,1;1,0) 参数估计

参数	v = 1		v = 2	
	估计值	标准差	估计值	标准差
π(v,1)	0.3247	0.0798	0.0944	0.0325
π(v,2)	0.6753	0.0662	0.9056	0.0686
θ ₁ (v,1)	-0.2509	0.1085	-0.7559	0.2745
φ ₁ (v,2)	0.5966	0.0854	0.3593	0.0576
σ(v,1)	20.1416	2.2655	33.6461	5.4202
σ(v,2)	23.5989	1.5991	17.3929	0.7997

对于传统的线性时间序列模型,如 ARMA、ARIMA 等,虽然可以通过适当的数据转换来描述具有周期循环结构特征的时间序列,但是也仅适用于有限的数据类型^[12]。图 2 是模型 I 的仿真,表明 MPARMA 模型都能够描述具有周期循环特征的时间序列。

由于正态性假设,PARMA 模型对于周期内潜在的多峰、偏倚等现象无法进行描述。图 3(a)是模型 I 在 v = 1 和 v = 2 时的仿真,其中左侧图是相应的季节序列,表明 MPARMA 模

型能够较好地描述季节内存在的多峰和偏倚特征。

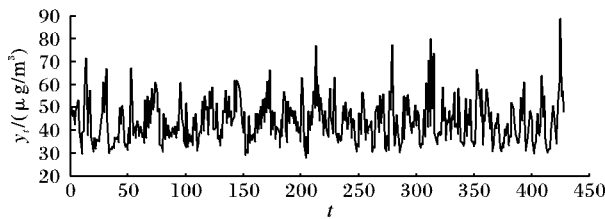
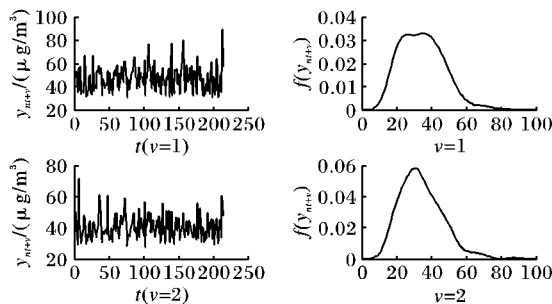
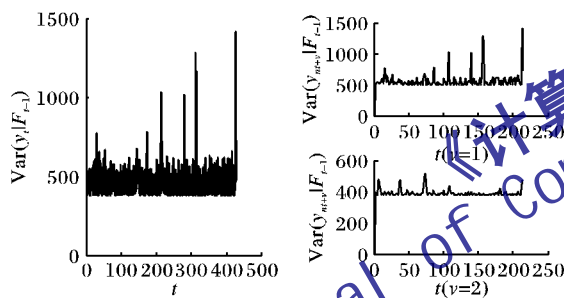


图2 模型 I 的仿真序列

图3(b)是按照式计算的模型 I 的条件方差(变异率),反映了 MPARMA 模型所计算的变异率不但和原序列的变异性相似,而且对于每一个季节,也具有相似的变异性。这表明 MPARMA 模型能够较好地描述周期时间序列中的条件异方差。



(a) 季节内的非线性特征



(b) 模型的条件方差

图3 模型 I 的周期和周期内非线性特征

相对于线性预测,预测区间或者说预测集则包含着更多的信息,关于未来的所有信息都包含在预测分布函数中,也就是基于当前状态的未来变量的条件分布函数^[13]。对于周期时间序列模型,主要是考查在每个季节内的预测能力。图4是模型 I 在第一季($v=1$) $n=156 \sim 159$ (原序列 $t=313, 315, 317, 319$)处的一步预报条件密度函数。在 $n=157, 158$ 处(原序列 $t=315, 317$)一步预报条件密度函数是双峰的,表明 PM10 浓度在这些时刻波动比较大,与原始序列的观测完全吻合(图1(a),图3(b));而在 $n=156$ 处,一步预报条件密度函数是偏倚的。这说明,MPARMA 模型具有季节内非线性预测的能力。

模型的诊断检验基于检验残差:

$$r_t = \frac{y_t - E(y_t | \mathcal{F}_{t-1})}{\sqrt{\text{Var}(y_t | \mathcal{F}_{t-1})}}; t = nT + v$$

的自相关性。图5是残差序列的 ACF 图,可以看出,MPARMA 模型 I 是合理的。

4 结语

本文提出了一类用于非线性时间序列分析的 MPARMA 模型,给出了平稳性条件和参数的 EM 估计,通过仿真及实证

分析,说明 MPARMA 模型能较好描述周期时间序列中的非线性特征。

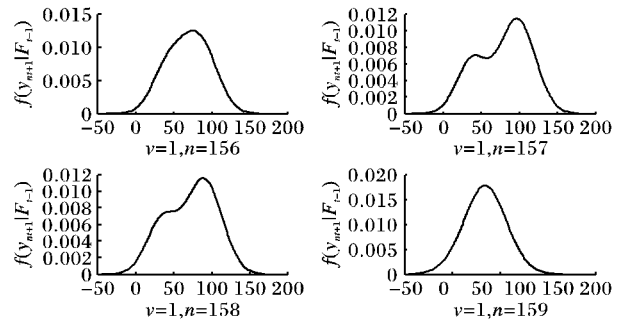


图4 在 $v=1, n=156 \sim 159$ 的一步预报条件密度函数

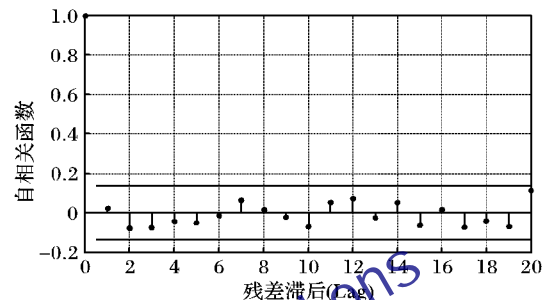


图5 模型 I 的残差 ACF

参考文献:

- [1] ANDERSON P L, KAVALLIERIS L, MEERSCHAERT M M. Innovations algorithm asymptotics for periodically stationary time series with heavy tails[J]. Journal of Multivariate Analysis, 2008, 99(1): 94-116.
- [2] TESFAYE Y G, MEERSCHAERT M M, ANDERSON P L. Identification of periodic autoregressive moving average models and their application to the modeling of river flows[J]. Water Resources Research, 2006, 42(1): 1-11.
- [3] 王会战,田铮,王红军. 混合周期自回归滑动平均时间序列的平稳性条件[J]. 陕西理工学院学报:自然科学版, 2008, 24(4): 80-84.
- [4] 王红军,田铮,王会战. 均值异方差混合转移分布模型——EH-MTD[J]. 工程数学学报, 2008, 25(6): 1051-1058.
- [5] WANG HONGJUN, TIAN ZHENG. Heteroscedastic Mixture Transition Distribution (HMTD) model[J]. Journal of Applied Mathematics and Computing, 2008, 28(1/2): 207-224.
- [6] SHAO Q. Mixture periodic autoregressive time series models[J]. Statistics & Probability Letters, 2006, 76(6): 609-618.
- [7] MCLACHLAN G J, PEEL D. Finite mixture models[M]. New York: Wiley, 2000.
- [8] FRÜHWIRTH-SCHNATTER S. Finite mixture and Markov switching models[M]. Berlin: Springer-Verlag, 2006.
- [9] DEMPSTER A P, LAIRD N M, RUBIN D B. Maximum likelihood from incomplete data via the EM algorithm[J]. Journal of the Royal Statistical Society: Series B, 1977, 39(1): 1-38.
- [10] LOUIS T A. Finding the observed information matrix when using the EM algorithm[J]. Journal of the Royal Statistical Society: Series B, 1982, 44(2): 226-233.
- [11] 王会战. MPARMA 模型 EM 估计及观测信息矩阵的计算[J]. 陕西理工学院学报:自然科学版, 2010, 26(1): 79-85.
- [12] BIBI A, FRANCQ C. Consistent and asymptotically normal estimators for cyclically time-dependent linear models[J]. Annals of the Institute of Statistical Mathematics, 2003, 55(1): 41-68.
- [13] FAN J, YAO Q. Nonlinear time series: Nonparametric and parametric methods[M]. 2nd ed. Berlin: Springer-Verlag, 2005.