

文章编号:1001-9081(2010)06-1556-03

## 基于非下采样 Contourlet 变换和图正则化去噪

刘国金,曾孝平,刘 刘

(重庆大学 通信工程学院,重庆 400044)

(liuguoqing@126.com)

**摘 要:**用非下采样 Contourlet 变换提取图像的边缘、轮廓和纹理等具有高维奇异性的特征,并将提取的特征用来构造图的权重函数,用建立在图上的正则化方程实现图像的去噪处理。仿真实验结果表明:该方法能有效地去除图像中的噪声,在去噪性能上优于其他的偏微分方程方法。

**关键词:**图像去噪;非下采样 Contourlet 变换;图正则化;偏微分方程

**中图分类号:**TP391 **文献标志码:**A

### Image denoising based on graph regularization and nonsubsamped Contourlet transform

LIU Guo-jin, ZENG Xiao-ping, LIU Yi

(College of Communication Engineering, Chongqing University, Chongqing 400044, China)

**Abstract:** The nonsubsamped Contourlet transform was used to capture the features such as edge, contour and texture. After that, a weighting function was generated by using the features. Finally, graph regularization equation was used to filter the noisy image. The simulation results show that the proposed method can effectively remove the noise and is superior to other partial differential equation methods.

**Key words:** image denoising; NonSubsamped Contourlet Transform (NSCT); graph regularization; partial differential equation

## 0 引言

偏微分方程近年来大量地应用于图像的去噪和复原<sup>[1-4]</sup>。文献[2]在 PM 方程的扩散系数中引入高斯平滑算子,改进了 PM 模型的病态性;文献[3]对图像只在垂直于梯度的方向上进行扩散,在梯度方向上不进行扩散,使得边缘保持特性得到了改善;文献[4]提出了“各向异性”扩散模型,在滤除噪声的同时,增强、锐化边缘。目前,大多数基于偏微分方程(Partial Differential Equation, PDE)的图像去噪算法都假设图像是  $R^2$  空间中的一个二维函数,用离散化的方法来求解 PDE,从而实现图像的去噪。2007 年,Oliver 等人提出了图正则化理论<sup>[5]</sup>,将建立在  $R^2$  空间的正则化理论扩充到图上,但 Oliver 方法用两点之间像素值差异的倒数来计算图的权重函数,不能很好地描述两点之间的相似性,造成算法的去噪效果较差。文献[6]采用 Non-local Means 算法<sup>[7]</sup>来计算两点之间的权重,提出了基于谱图理论的热扩散方程算法。

本文利用谱图理论<sup>[8]</sup>,将图像看成一个嵌入在高维流形空间的子图,将图像的去噪问题转化为在图论上的正则化扩散问题;在去噪前将图像转化成一个无向赋权图,用图像像素之间的关系来生成无向图的权矩阵,通过正则化扩散实现图像的去噪。图的权重函数对算法的性能有严重的影响,传统的两点之间像素值差异的倒数不能有效地捕捉轮廓信息。在二维图像中,由于边缘、轮廓和纹理等具有高维奇异性的几何特征包含了大部分信息。因此,本文拟采用非下采样 Contourlet 变换<sup>[9]</sup>来提取图像的几何正则特征,构造权重函数。之后,利用图上的正则化方程进行去噪。仿真实验表明,

同部分偏微分方程去噪算法相比,该方法能够有效去除高斯噪声,较完整地保持图像中的边缘等细节信息,取得了良好的视觉效果。

## 1 图的权重和拓扑结构

Contourlet 变换是一种多分辨率多方向的图像表示方法,其基函数支撑区间具有长宽比随尺度变化而变化的长条形结构,能以接近最优的方式描述图像边缘,但 Contourlet 变换不满足平移不变性且 Contourlet 变换后,每个像素点所得到的特征的数量各不相同,因此不能用来构造图的权重函数。非下采样 Contourlet 变换 (NonSubsamped Contourlet Transform, NSCT) 将原 Contourlet 变换中对图像采样的步骤去掉,构造相应的分级和各种方向滤波器,克服了 Contourlet 变换因下采样而不满足平移不变性和频谱泄露及频谱混叠等缺陷,在图像表示上能更好地表现图像的细节特征。NSCT 分为两个步骤来实现:

- 1) 采用非下采样金字塔结构以实现多尺度分解;
- 2) 采用非下采样方向滤波器组结构以实现多方向分解。

图 1 为非下采样 Contourlet 变换示意图。

对图像进行非下采样 Contourlet 变换后,得到了低通和带通子带,这些子带系数代表了图上每一个顶点在不同方向、不同尺度上的特征。通过计算相关的两顶点特征之间的几何量度  $\rho(x, y)$ , 可以进一步构造两顶点之间的权重。权重矩阵中的元素的大小表示两点之间的相似程度的强弱。如果将研究的图像  $f$  映射到  $d$  维实数空间  $R^d$  上,那么,根据下面的公式计算权重矩阵中的元素:

收稿日期:2009-11-19;修回日期:2010-01-22。

基金项目:国家自然科学基金资助项目(60971016);重庆市自然科学基金资助项目(2009BB2358)。

作者简介:刘国金(1974-),男,河南信阳人,讲师,博士,主要研究方向:信号与信息处理;曾孝平(1956-),男,四川广安人,教授,博士生导师,博士,主要研究方向:信号与信息处理;刘刘(1984-),男,重庆人,硕士研究生,主要研究方向:图像处理。

$$W(x, y) = e^{-\rho(x, y)/\sigma} \quad (1)$$

$$\rho(x, y) = \|F(f)(x) - F(f)(y)\|_2 \quad (2)$$

$$F(I): x \rightarrow (feature_1, \dots, feature_d) \quad (3)$$

其中:  $\rho(x, y)$  代表  $x, y$  两顶点特征之间的距离,  $feature$  代表映射的特征。公式说明了特征值比较近的两点具有大的相似程度。

得到图的权重函数后,图的拓扑结构可以选择普通的4邻接或8邻接图,由于4邻接图的直径较大,造成扩散方程迭代的速度较慢,可以选择8邻接图来减小图的直径,提高迭代速度。

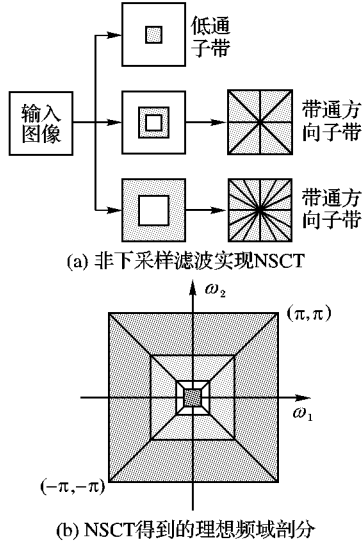


图1 非下采样 Contourlet 变换示意图

## 2 图的正则化的去噪

传统的正则化模型可以表述成最小化能量泛函

$$\min_{u \in BV(\Omega)} \left\{ E(u) = \int_{\Omega} |\nabla u|^p dx dy + \lambda \int_{\Omega} (u - u_0)^2 dx dy \right\} \quad (4)$$

其中:  $u_0$  为观测图像,  $\lambda \int_{\Omega} (u - u_0)^2 dx dy$  表示去噪前后图像的接近程度, 作为保真项以保证解不会偏离真解太大, 而  $\int_{\Omega} |\nabla u|^p dx dy$  作为平滑项,  $\lambda$  作为正则化参数。文献[5]指出: 该正则化的变分模型的离散化数值实现方案要求数据集(图像)必须以网格拓扑结构进行组织, 不能适应以任意拓扑组织的数据集。

基于上述思想, 将正则化方程定义在任意拓扑结构上的无向赋权图上的离散域中, 与式(4)类似的离散域中的最小化问题可表示为[5]:

$$\min_{f \in H(V)} \left\{ E_p(f, f^0, \lambda) = \int_V (\|\nabla f(v)\|)^p + \lambda \|f - f^0\|_{H(V)}^2 \right\}; p = 1 \text{ 或 } 2 \quad (5)$$

其中:  $V$  是顶点集,  $H(V)$  是定义在图的顶点集  $V$  上的一个希尔伯特空间,  $\|\nabla f(v)\|$  是一个给定的离散梯度的范数。结合图论中的微分几何理论, 并将图像的像素点作为图的顶点, 任意两个顶点之间的权重记作  $w(u, v)$ , 求出上式的最小值, 可以得到迭代表示的各向异性扩散公式:

$$\left. \frac{\partial E(f, f^0, \lambda)}{\partial f} \right|_v = 0; \forall v \in V \quad (6)$$

经过化简后, 式(6)可以表示成:

$$(\Delta_p f^*)(v) + 2\lambda(f^*(v) - f^0(v)) = 0; \forall v \in V \quad (7)$$

经过整理后, 得到:

$$\left( 2\lambda + \sum_{u \sim v} \gamma_{uv} \right) f^*(v) - \sum_{u \sim v} \gamma(u, v) f^*(u) = 2\lambda f^0(v); \quad \forall v \in V \quad (8)$$

式(8)相应的高斯-雅可比迭代式可表示为:

$$\begin{cases} f^{(i+1)}(v) = \frac{2\lambda}{2\lambda + \sum_{u \sim v} \gamma^{(i)}(u, v)} f^0(v) + \frac{\sum_{u \sim v} \gamma^{(i)}(u, v) f^{(i)}(u)}{2\lambda + \sum_{u \sim v} \gamma^{(i)}(u, v)}, \forall v \in V \\ \gamma(u, v) = w(u, v) (\|\nabla f(v)\| + \|\nabla f(u)\|) \end{cases} \quad (9)$$

其中: 式(9)第一式等式右侧, 第一项是一个平滑项, 第二项是一个保真项, 表示不能偏离太远。当  $p = 1$  时, 上述的迭代公式变成

$$\begin{cases} f^{(i+1)}(v) = \frac{2\lambda}{2\lambda + \sum_{u \sim v} \gamma^{(i)}(u, v)} f^0(v) + \frac{\sum_{u \sim v} \gamma^{(i)}(u, v) f^{(i)}(u)}{2\lambda + \sum_{u \sim v} \gamma^{(i)}(u, v)}, \forall v \in V \\ \gamma^{(i+1)}(u, v) = w(u, v) \left( \frac{1}{\varepsilon + \|\nabla f^{(i+1)}(v)\|} + \frac{1}{\varepsilon + \|\nabla f^{(i+1)}(u)\|} \right), \forall (u, v) \in E \end{cases} \quad (10)$$

## 3 降噪算法的实现

基于正则化理论和非下采样 Contourlet 变换的图像降噪算法的步骤如下:

- 1) 利用图论将含噪图像表示成一个无向赋权简单图, 在图像的像素点和图的顶点之间建立一一对应关系。
- 2) 利用非下采样 Contourlet 变换对图像进行分解, 得到不同低通和带通子带信号, 利用式(2)~(3)得到每个点的特征向量, 根据特征向量利用式(1)计算图的边之间的权重。
- 3) 根据式(10)进行迭代计算。
- 4) 根据迭代准则, 停止迭代, 得到最终去噪后的图像。

## 4 实验结果和分析

为检验本文算法的正确性和有效性, 选取加有零均值高斯白噪声的 Lena, 大小为  $256 \times 256$  像素的图像, 白噪声的方差为 0.01, 分别采用本文提出的降噪算法、基于 Non local Means 的热扩散方程方法[6]、Olivier Lezoray 的图正则化算法[5]、Complex diffusion[4]进行对比实验。实验过程中, 复扩散方程中的初始角度  $\theta = \pi/1000$ , 参数  $K = 5$ 。在本文的方案中, 由于非下采样 Contourlet 具有多尺度、多方向和非下采样的特性, 非常适合进行特征的提取。使用 4 个尺度, 每个尺度的方向数分别为 1、1、16、16 的非下采样 Contourlet 变换提取图像特征, 然后根据提取的图像特征构造图的权重函数。实验中, 采用 3 个指标来描述各种算法的优劣: 最小均方误差 (RMSE)、结构相似度算子 (Structural Similarity, SSIM)[10] 和基于局部方差的质量算子 (Quality Index based On Local Variance, QILV)[11] 来衡量各种算法的去噪性能。SSIM 和 QILV 的取值范围在 0~1; 两者的取值越接近 1, 就表示重建的图像越接近原始无噪图像, 也就是去噪效果越好。实验结果如图 2~5 所示。



图2 256×256 的Lena 去噪结果比较分析

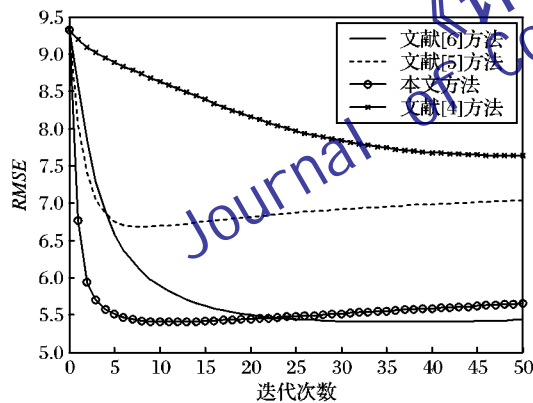


图3 各种方法得到的关于迭代次数的RMSE 曲线

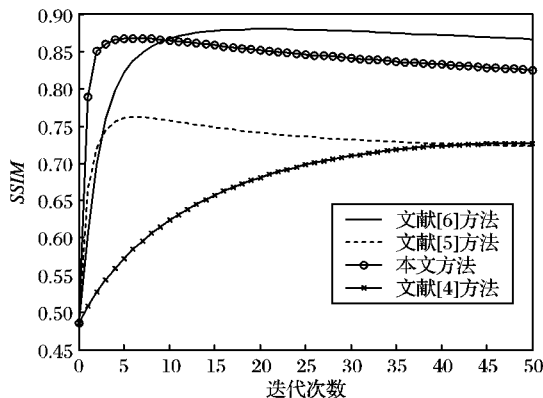


图4 各种方法得到的关于迭代次数的SSIM 曲线。

从图2~5 可以得出如下结论。

1) 本文算法所能达到的  $RMSE$  最低。根据  $RMSE$  和  $PSNR$  之间的关系, 也就说明本文算法  $PSNR$  最高。

2) 同样参数情况下, 本文的算法在达到最小  $RMSE$  时所需的迭代次数是最少的。

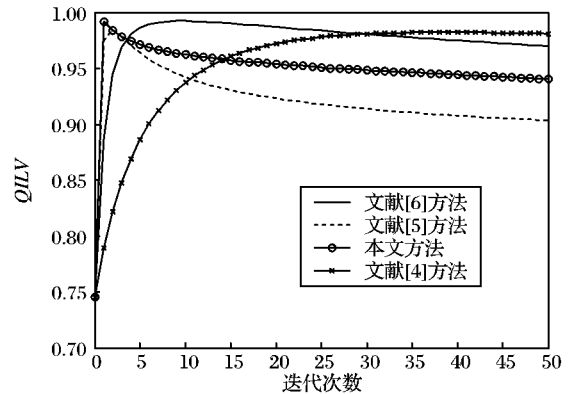


图5 各种方法得到的关于迭代次数的QILV 曲线

## 5 结语

本文提出了一种基于非下采样 Contourlet 变换的图正则化方法, 它能够有效提取图像中的各种奇异特征, 进而构造图的权重函数, 通过正则化实现图像的去噪。实验结果表明, 与部分的图正则化方法相比, 该方法具有更好的视觉效果和更低的  $RMSE$ 。但用非下采样 Contourlet 变换构造图的权重过程中, 由于没有下采样操作且变换的级数和方向数较多, 造成算法的时间和空间复杂度较大。今后, 可以通过减少非下采样 Contourlet 变换的级数和方向数和其他的权重构造方法进行改进。

## 参考文献:

- [1] FERON P, MALIK J. Scale-space and edge detection using anisotropic diffusion [J]. IEEE Transactions on Pattern Analysis and Machine Intelligence, 1990, 12(7): 629-639.
- [2] CATTE F, LIONS P, MOREL J. Image selective smoothing and edge detection by nonlinear diffusion [J]. SIAM Journal on Numerical Analysis, 1992, 29(1): 182-193.
- [3] ALVAREZ L, LIONS P, MOREL M. Image selective smoothing and edge detection by nonlinear diffusion II [J]. SIAM Journal on Numerical Analysis, 1992, 29(3): 845-866.
- [4] GILBOA G, SOCHEN N, ZEEVI Y Y. Image enhancement and denoising by complex diffusion processes [J]. IEEE Transactions on Pattern Analysis and Machine Intelligence, 2004, 26(8): 1020-1036.
- [5] LEZORAY O, ELMOATAZ A, BOUGLEUX S. Graph regularization for color image processing [J]. Computer Vision and Image Understanding, 2007, 107(1/2): 38-55.
- [6] ZHANG F, HANCOCK E R. Graph spectral image smoothing using the heat kernel [J]. Pattern Recognition, 2008, 41(11): 3328-3342.
- [7] BUADES A, COLL B, MOREL J M. A review of image denoising algorithms, with a new one [J]. Multiscale Modeling & Simulation, 2005, 4(2): 490-530.
- [8] GRAHAM F C. Spectral graph theory [M]. Fresno: American Mathematical Society, 1997.
- [9] ARTHUR L, CUNHA D, ZHOU JIAN-PING. The nonsubsampled Contourlet transform: Theory, design, and applications [J]. IEEE Transactions on Image Processing, 2006, 15(10): 3089-3101.
- [10] WANG Z, BOVIK A C, SHEIKH H R, et al. Image quality assessment: From error visibility to structural similarity [J]. IEEE Transactions on Image Processing, 2004, 13(4): 600-612.
- [11] AJA-FERNANDEZ S, ESTEPAR R S, ALBEROLA-LOPEZ C, et al. Image quality assessment based on local variance [C]// Proceedings of the 28th IEEE EMBC. Washington, DC: IEEE Computer Society, 2006: 4815-4818.