

文章编号:1001-9081(2010)06-1562-03

基于 Shearlet 变换的图像去噪算法

胡海智¹, 孙 辉^{1,2}, 邓承志², 陈 习², 柳枝华¹, 占惠星¹

(1. 南昌航空大学 信息工程学院, 南昌 330063; 2. 南昌工程学院 计算机科学与技术系, 南昌 330099)

(des_huhaizhi@163.com)

摘 要:针对传统变换域去噪算法的不足,提出一种基于 Shearlet 变换的图像去噪算法。该算法首先在 Shearlet 变换理论上实现了一种分解和重构的方法,然后用 Monte-Carlo 方法对高频系数进行估计,最后通过阈值函数进行收缩去噪。实验结果表明,该算法在抑噪和保持边缘的同时,取得了较好的视觉效果和更高的 PSNR 值。

关键词:Shearlet 变换;去噪;峰值信噪比;图像处理;多尺度几何分析

中图分类号:TN911.73 **文献标志码:**A

Image de-noising algorithm based on Shearlet transform

HU Hai-zhi¹, SUN Hui^{1,2}, DENG Cheng-zhi², CHEN Xi², LIU Zhi-hua¹, ZHAN Hui-xing¹

(1. School of Information Engineering, Nanchang Hangkong University, Nanchang Jiangxi 330063, China;

2. Department of Computer Science and Technology, Nanchang Institute of Technology, Nanchang Jiangxi 330099, China)

Abstract: According to the deficiency of de-noising algorithm based on the traditional transform domain, this paper proposed an image de-noising algorithm based on Shearlet transform. Firstly, a Shearlet decomposition and reconstruction implementation method was proposed in this paper. And then, the Monte-Carlo method was used to do estimation of the high-frequency coefficients. Finally the shrinkage de-noising would be done according to the threshold function. The experimental results demonstrate that the method can remove noise and remain edges, and obtain better visual effect and higher PSNR.

Key words: Shearlet transform; de-noising; Peak Signal-to-Noise Ratio (PSNR); image processing; multi-scale geometric analysis

0 引言

传统小波仅能反映信号的零维奇异性,即只能表示奇异点的位置和特征,而难以表达更高维的特征如图像。因此,小波变换并不适合图像的去噪。为了克服小波的局限性,多尺度几何分析(Multiscale Geometric Analysis, MGA)被提出,发展 MGA 的目的是为了检测、表示、处理某些高维空间数据。目前人们提出的 MGA 方法主要包括曲线波(Curvelet)^[1]、轮廓波(Contourlet)^[2]等。最近 Guo 和 Labate 通过具有合成膨胀的仿射系统构造了剪切波(Shearlet),它能够对图像进行稀疏表示且产生最优逼近^[3]。

本文提出了一种 Shearlet 变换分解和重构的实现方法,并将其运用到图像去噪中。在图像去噪中应用 Monte-Carlo 方法对子带系数进行估计,实现对子带的收缩去噪。实验结果表明,该方法能够很好地抑制和去除噪声,同时也能很好地保留图像边缘等细节特征。

1 Shearlet 变换理论

Shearlet 变换最初是由 Guo 和 Labate 根据小波理论衍生而来。当维数 $n = 2$ 时,具有合成膨胀的仿射系统为:

$$M_{AB}(\psi) = \{\psi_{j,\ell,k}(x) = |\det A|^{\nu/2} \psi(B^\ell A^{-j}x - k) \mid j, \ell \in \mathbf{Z}; k \in \mathbf{Z}^2\} \quad (1)$$

其中: $\psi \in L^2(\mathbf{R}^2)$, A 和 B 是 2×2 可逆矩阵, $|\det B| = 1$ 。如果 $M_{AB}(\psi)$ 满足 Parseval 框架(紧框架),则 $M_{AB}(\psi)$ 的元素称为合成小波,其中矩阵 A 和尺度变换相关联, B 和保持面积不变的几何尺度相关联。当 $A = A_0 = \begin{bmatrix} 4 & 0 \\ 0 & 2 \end{bmatrix}$, $B = B_0 = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$

时,称为 Shearlet。对 $\forall \xi = (\xi_1, \xi_2) \in \hat{\mathbf{R}}^2, \xi_1 \neq 0$, 令

$$\hat{\psi}^{(0)}(\xi) = \hat{\psi}^{(0)}(\xi_1, \xi_2) = \hat{\psi}_1(\xi_1) \hat{\psi}_2(\xi_2/\xi_1) \quad (2)$$

其中: $\text{supp } \hat{\psi}_1 \in [-1/2, -1/16] \cup [1/16, 1/2]$, $\text{supp } \hat{\psi}_2 \in [-1, 1]$ 。假设:

$$\begin{cases} \sum_{j \geq 0} |\hat{\psi}_1(2^{-j}\omega)|^2 = 1 \\ |\omega| \geq 1/8 \end{cases} \quad (3)$$

且对 $j \geq 0$, 有

$$\sum_{\ell=-2^j}^{2^j-1} |\hat{\psi}_2(2^j\omega - \ell)|^2 = 1; |\omega| \leq 1 \quad (4)$$

可以得到,对任何 $(\xi_1, \xi_2) \in D_0$, 有

$$\sum_{j \geq 0} \sum_{\ell=-2^j}^{2^j-1} |\hat{\psi}^{(0)}(\xi A_0^{-j} B_0^{-\ell})|^2 = \sum_{j \geq 0} \sum_{\ell=-2^j}^{2^j-1} |\hat{\psi}_1(2^{-j}\xi_1)|^2 |\hat{\psi}_2(2^j\xi_2/\xi_1 - \ell)|^2 = 1 \quad (5)$$

其中: $D_0 = \{(\xi_1, \xi_2) \in \hat{\mathbf{R}}^2, |\xi_1| \geq 1/8, |\xi_2/\xi_1| \leq 1\}$ 。函数

收稿日期:2009-11-30;修回日期:2010-01-15。

基金项目:国家自然科学基金资助项目(60462003);江西省教育厅科技项目(GJJ09366;GJJ10630)。

作者简介:胡海智(1978-),男,江西赣州人,硕士研究生,主要研究方向:图像处理、多尺度几何分析;孙辉(1959-),男,江西九江人,教授,博士,主要研究方向:智能优化算法、图像处理;邓承志(1980-),男,江西赣州人,讲师,博士,主要研究方向:图像处理、多尺度几何分析;陈习(1982-),男,江西南昌人,讲师,硕士,主要研究方向:图像处理、多尺度几何分析;柳枝华(1984-),男,福建南平人,硕士研究生,主要研究方向:图像处理、多尺度几何分析;占惠星(1976-),男,江西上饶人,硕士研究生,主要研究方向:图像处理、多尺度几何分析。

$\{\hat{\psi}^{(0)}(\xi A_0^{-j} B_0^{-\ell})\}$ 形成 D_0 的一个剖分, 如图 1(a) 所示。由 $\hat{\psi}_1, \hat{\psi}_2$ 的支撑条件可以看到函数 $\psi_{j,\ell,k}$ 具有以下的频域支撑:

$$\text{supp } \hat{\psi}_{j,\ell,k}^{(0)} \subset \{(\xi_1, \xi_2) \mid \xi_1 \in [-2^{2j-1}, -2^{2j-4}] \cup [2^{2j-4}, 2^{2j-1}], |\ell 2^{-j} + \xi_2/\xi_1| \leq 2^{-j}\}$$

即每个元素 $\psi_{j,\ell,k}$ 支撑在梯形对上, 近似大小为 $2^{2j} \times 2^j$, 方向沿着斜率为 $\ell 2^{-j}$ 的直线 (见图 1(b))。由上面的讨论, 得到:

$$\{\psi_{j,\ell,k}^{(0)}(x) = 2^{3j/2} \psi^{(0)}(B_0^\ell A_0^j x - k) \mid j \geq 0, -2^j \leq \ell \leq 2^j - 1, k \in \mathbb{Z}^2\} \quad (6)$$

是 $L^2(D_0)^\vee = \{f \in L^2(\mathbb{R}^2) \mid \text{supp } \hat{f} \subset D_0\}$ 的一个 Parseval 框架。同样可以构造一个 $L^2(D_1)^\vee$ 的 Parseval 框架, 其中 D_1 是垂直锥 $D_1 = \{(\xi_1, \xi_2) \in \hat{\mathbb{R}}^2 \mid |\xi_2| \geq 1/8, |\xi_1/\xi_2| \leq 1\}$, 令 $A_1 = \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 4 \end{bmatrix}, B_1 = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$, 且 $\psi^{(1)}$ 由式 (7) 给定:

$$\hat{\psi}^{(1)}(\xi) = \hat{\psi}^{(1)}(\xi_1, \xi_2) = \hat{\psi}_1(\xi_2) \hat{\psi}_2(\xi_1/\xi_2) \quad (7)$$

则集合:

$$\{\psi_{j,\ell,k}^{(1)}(x) = 2^{3j/2} \psi^{(1)}(B_1^\ell A_1^j x - k) \mid j \geq 0, -2^j \leq \ell \leq 2^j - 1, k \in \mathbb{Z}^2\} \quad (8)$$

是 $L^2(D_1)^\vee$ 的 Parseval 框架^[4]。

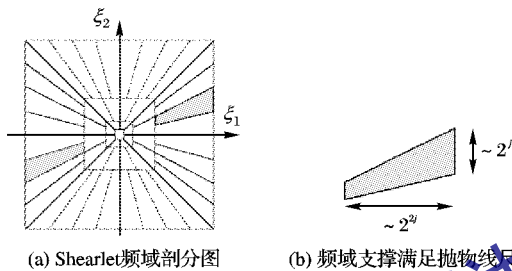


图 1 Shearlet 频域剖分和频域支撑的抛物线尺度化

2 基于 Shearlet 变换的图像去噪

Shearlet 变换的分解由以下两步构成, 多尺度剖分和方向局部化。

1) 多尺度剖分。用 Haar 小波对图像进行分解。对于图像 f , 分别得到低频系数 f_0 和各个尺度下的高频系数 f_1, f_2, \dots, f_j (j 为分解的尺度)。

2) 方向局部化。为了得到不同方向的高频分量, 对各个尺度下的高频系数采用带方向和尺度变化的窗函数进行剖分, 如图 1(a) 所示。对每个尺度上的高频系数的 D_0 和 D_1 区域分别选择 $2^{j+1} + 1$ 个窗函数 W , 使得满足

$$\sum_{d=0}^1 \sum_{\ell=-2^j}^{2^j} |W_{j,\ell}^{(d)}(\xi_1, \xi_2)|^2 = 1$$

图 2 给出了本文 $j=0$ 和 $j=1$ 尺度下两个窗函数的例子。Shearlet 变换重构算法包括以下几步。

1) 子带重构。将分解得到的 Shearlet 系数进行方向局部化的反变换, 于是不同尺度下的子带分别重构可以得到 $\Delta f_0, \Delta f_1, \Delta f_2, \dots$, 将其相加即可得到重构后的高频系数 f'_2 。

2) 图像重构。对分解后的低频系数 f'_j 与重构后的高频系数 f'_2 按位置进行合成, 从而可以得到重构后的图像 f' 。

综上所述, 本文提出的基于 Shearlet 变换的图像去噪算法如下。

1) 对含噪图像进行 Shearlet 变换分解, 得到低频系数和各个尺度的高频系数。

2) 用 Monte-Carlo^[5] 方法先估计各尺度子带的噪声方差, 然后对各尺度的高频系数进行阈值处理, 硬阈值函数定义为

(其中 $\lambda = 3\sigma$):

$$T(x) = \begin{cases} x, & |x| > \lambda \\ 0, & |x| \leq \lambda \end{cases}$$

从而得到去噪后的高频系数。

3) 将去噪后的高频系数和分解得到的低频系数进行 Shearlet 变换图像重构, 得到去噪后的图像。

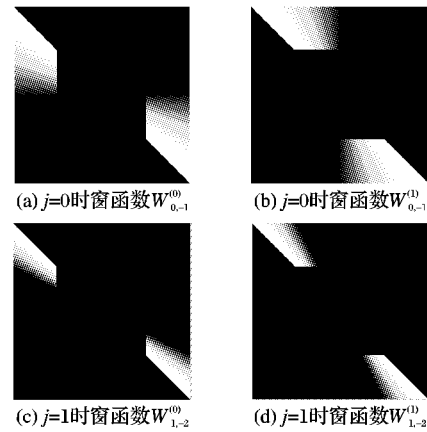


图 2 D_0 和 D_1 区域的窗函数 ($j=0$ 和 $j=1$)

3 实验仿真

实验采用 512×512 (8 位) 的 Lena、Barbara、Peppers、Goldhill 幅图像加入不同的噪声标准差 Noisy 为例进行仿真, 分别应用小波去噪 (WT)^[6]、Curvelet 去噪 (CURT)^[7]、Contourlet 去噪 (CONT)^[8], 以及本文算法进行去噪, 结果如表 1 所示。

表 1 各去噪算法的 PSNR

图像	σ_n	PSNR/dB				
		Noisy	WT	CURT	CONT	本文算法
Lena	10	28.10	32.06	33.41	31.75	34.38
	15	24.61	30.03	31.14	29.95	32.24
	20	22.09	28.60	30.09	28.68	30.55
	25	20.18	27.31	28.16	27.69	29.23
Barbara	10	28.13	29.65	29.19	29.23	32.41
	15	24.61	27.13	26.72	27.30	30.15
	20	22.11	25.51	25.46	25.96	28.45
	25	20.17	24.22	24.84	24.98	27.17
Peppers	10	28.12	31.74	32.42	30.98	33.04
	15	24.60	29.85	30.88	29.41	31.28
	20	22.11	28.45	29.80	28.19	29.90
	25	20.15	27.20	29.08	27.21	29.11
Goldhill	10	28.12	29.92	30.59	29.70	31.73
	15	24.61	28.10	29.29	28.14	29.84
	20	22.12	26.81	28.45	27.04	28.51
	25	20.16	25.85	27.44	26.21	27.47

图 3~4 为利用各算法对含噪图像进行去噪的结果。由于小波变换对图像的非稀疏表示, 使得小波域阈值收缩丢失了部分图像特征, 去噪后的图像趋于平滑 (见图 3(c))。Contourlet 变换中的 LP 分解和 DFB 都有下采样操作, 使得 Contourlet 变换不具有平移不变性, 从而在进行图像去噪时会引入伪 Gibbs 视觉误差, 虽然能较好地保持图像边缘信息, 但图像的主观质量有所下降 (见图 3(d))。Curvelet 变换进行去噪能够获得很好的去噪效果, 该方法能有效地去除噪声, 但往往会“过扼杀”Curvelet 系数, 导致在消除噪声的同时丢失

了图像的部分细节,图像出现模糊(见图 3(e))。Shearlet 变换能够对图像进行稀疏表示且产生最优逼近,因此本文算法

可以获得较好的去噪效果(见图 3(f))。从表 1 也可以看出,本文算法可以获得更高的 PSNR 增益。



图 3 各算法重建的 Lena 图像(噪声标准差为 20)

4 结语

本文在 Shearlet 变换理论基础上提出了一种 Shearlet 变换分解和重构的实现方法,并将其运用到图像去噪中。与小波域、Curvelet 域和 Contourlet 域去噪算法相比,该方法在去噪的同时保留了更多的纹理信息,具有更好的视觉效果,且 PSNR 值有很大的提高。

参考文献:

- [1] CANDES E J, DONOHO D L. Fast discrete curvelet transform [J]. Multiscale Modeling Simulation, 2005, 5(5): 861–899.
- [2] DO M N, VETTERLI M. Contourlets, beyond wavelets [M]. WELLAND G V. [S. l.]: Academic Press, 2003.
- [3] GUO K, LABATE D. Optimally Sparse multidimensional representation using Shearlets [J]. SIAM Journal on Mathematical Analysis,

图 4 各算法重建的 Goldhill 图像(噪声标准差为 20)

- 2007, 39(1): 298–318.
- [4] EASLEY C R, LABATE D. Sparse directional image representations using the discrete Shearlet transform [J]. Applied Computational Harmonic Analysis, 2008, 25(1): 25–46.
- [5] PO D D-Y, DO M N. Directional multiscale modeling of images using the Contourlet transform [J]. IEEE Transactions on Image Processing, 2006, 15(6): 1610–1620.
- [6] MALLAT S. A wavelet tour of signal processing [M]. 2nd ed. [S. l.]: Academic Press, 1999.
- [7] STARCK J L, CANDES E J, DONOHO D L. The curvelet transform for image de-noising [J]. IEEE Transactions on Image Processing, 2002, 11(6): 670–684.
- [8] DO M N, VETTERLI M. The Contourlet transform: An efficient directional multiresolution image resolution [J]. IEEE Transactions on Image Processing, 2005, 14(12): 2091–2106.

(上接第 1561 页)

参考文献:

- [1] 梁路宏, 艾海舟, 肖习攀. 基于模板匹配与支持向量机的人脸检测[J]. 计算机学报, 2002, 25(1): 22–29.
- [2] 刘锦峰. 图像模板匹配快速算法研究[D]. 长沙: 中南大学, 2007.
- [3] STEFANO L D, MATTOCCIA S. Fast template matching using bounded partial correlation [J]. Machine Vision and Applications 2003, 13(4): 213–221.
- [4] STEFANO L D, MATTOCCIA S, TOMBARI F. ZNCC-based template matching using bounded partial correlation [J]. Pattern Recognition Letters, 2005, (14): 2129–2134.
- [5] 费俊琳, 俞王新, 王志中. 一种改进的基于模板匹配眼睛特征点定位算法[J]. 计算机工程与应用, 2007, 43(32): 207–209, 213.
- [6] 崔政, 李壮. 两种改进的模板匹配识别算法[J]. 计算机工程与设计, 2006, 27(6): 1083–1085.
- [7] HARO A, FLICKNER M, ESSA I. Detecting and tracking eyes by using their physiological properties, dynamics and appearance

- [C]// Proceedings of the 4th IEEE International Conference on Automatic Face and Gesture Recognition. Washington, DC: IEEE, 2000: 332–335.
- [8] 王欣, 殷百川, 周翔翔. 一种改进的模板匹配识别算法[J]. 计算机工程与应用, 2007, 43(36): 238–240.
- [9] 栾柱晓, 唐璇, 郑群英. 一种改进的人眼模板匹配算法[J]. 计算机系统应用, 2009, 18(12): 75–78.
- [10] 宋毅, 崔平远, 居鹤华. 一种图像匹配中 SSD 和 NCC 算法的改进[J]. 计算机工程与应用, 2006, 42(2): 42–44.
- [11] 孙晓玲, 侯德文, 储凡静. 基于灰度积分投影和模板方法的人眼定位[J]. 信息技术与信息化, 2007, 32(4): 74–76.
- [12] 舒梅, 董秀成. 基于肤色和模板匹配的人眼定位[J]. 计算机工程与应用, 2009, 45(2): 237–239.
- [13] 吴小洪, 钟石明. 基于互相关边界特性和图像积分的快速模板匹配算法[J]. 计算机应用, 2009, 29(7): 1914–1917.
- [14] 李慧. H. 264 中运动估计和运动补偿算法的优化与实现[D]. 北京: 北京邮电大学, 2007.