

三次插值样条曲线拟合多核并行算法

苗莎, 郑晓薇

(辽宁师范大学 计算机与信息技术学院, 辽宁 大连 116081)

(xiaoniao9898@yahoo.com.cn)

摘要:充分利用多核技术提升多核处理器的资源利用率,缩短执行时间,发挥多核系统的优异性能。在多核计算机上设计了解三对角方程组的奇偶约化多线程并行程序,实现了三次样条曲线拟合的快速计算。通过实验结果的加速比对比,可以看出并行后缩短了求解方程组的时间,多核资源得到充分利用。结果表明,奇偶约化多核并行算法在三次样条曲线拟合中的应用是有效及可行的。

关键词:多核;三对角方程组;并行算法;样条曲线;加速比

中图分类号: TP316 **文献标志码:** A

Multi-core parallel algorithm for cubic spline curve fitting

MIAO Sha, ZHENG Xiao-wei

(School of Computer and Information Technology, Liaoning Normal University, Dalian Liaoning 116081, China)

Abstract: In order to take full use of multi-core technology to enhance the resource utilization of multi-core processors, shorten the execution time and show multi-core system remarkable performance, a multi-threaded parallel program was designed to resolve the tridiagonal equations of odd-even reduction, and the calculation speed of cubic spline curve fitting was increased in multi-core computer. Through comparing the speedup ratio of experimental results, it can be seen that parallel program shortens the time of solving equations and multi-core resources are fully utilized. The results indicate that multi-core parallel algorithm of odd-even reduction used in cubic spline curve fitting is effective and feasible and the research results have good practical significance.

Key words: multi-core; tridiagonal equations; parallel algorithm; spline curve; speed-up ratio

0 引言

多核计算机已成为主流,多核的意义在于其超高的多任务处理能力。在单核时代,大多数程序都是串行执行的,而在多核环境下,如果程序仍然是串行执行的,将只有一个CPU核在运行,其他CPU核都处于空闲状态,多核CPU将无法发挥作用,所以开发程序就必须考虑多核并行处理,以有效利用多个处理核。利用多核并行的数据分配是隐式的,不用考虑数据在内存中的位置;进程管理、消息传递、处理器间通信及同步操作由系统完成,消息传递通信开销小,不需要显式通信,通信时间要少于多机之间的通信,而且不需要对线程的同步操作进行详细编程。因此多核并行的工作量较小,使用简单^[1]。

人们在计算机辅助几何设计、计算机图形学和科学计算等领域中常常碰到一些将离散点用曲线拟合的问题,样条函数以其构造简单、易于计算又有很好的力学背景等特点而在这些领域中得到了广泛应用,成为最重要的曲线拟合方法之一^[2]。对样条函数算法的研究已有大量文献,其中许多算法都是为了力求在计算机上快速产生曲线而设计的,例如三次样条曲线插值中解三对角方程组的追赶法等是十分有效的算法。在求解三次样条函数时,最后都要归结为解三对角方程组,样条函数的求解速度很大程度上取决于求解三对角方程组,而追赶法被认为是目前串行机上求解三对角方程组的最优算法。为了在多核计算机上实现三次插值样条曲线拟合的

快速计算,可以采取并行求解三对角方程组的方法。解三对角方程组的并行算法主要有递推耦合法、循环约化法、矩阵分解法的并行算法等,但对于多核计算机来说不一定都适用,因此需要对算法加以选择和改进^[3-6]。本文着重考虑多核计算机的优势,提出了三对角方程组奇偶约化多核并行算法,并与串行追赶算法进行分析对比,实验结果表明本算法充分利用了多核处理器带来的性能提升,可提高三对角线性方程组的求解效率,大大地节省了计算时间,从而实现样条曲线的快速计算与生成。

1 问题的提出

在图形学应用中,图形(图像)数据的样条曲线拟合问题在理论研究和实际应用中常常遇到,三次样条插值具有收敛性、稳定性、光滑性好的特点,可以用于拟合物体运动路径或实体表示和绘画,也可以用于设计物体形状等其他图形应用。

对于三次插值样条函数定义如下^[7-8]。

设区间 $[a, b]$ 上的一组节点 $a = x_0 < x_1 < x_2 < \cdots < x_n = b$,对应值为 $y_0, y_1, y_2, \cdots, y_n$,若函数 $s(x)$ 满足:

- 1) 二阶连续,即 $s(x) \in C^2[a, b]$;
- 2) 三次分段,即在每一个小区间 $[x_{i-1}, x_i]$ ($i = 1, 2, \cdots, n$)上是三次多项式;

则称 $s(x)$ 是节点 $x_0, x_1, x_2, \cdots, x_n$ 上的三次样条函数。

若 $s(x)$ 在节点上还满足插值条件:

收稿日期:2010-06-28;修回日期:2010-07-30。

基金项目:国家自然科学基金资助项目(60603047);辽宁省教育厅高等学校科研基金资助项目(051209)。

作者简介:苗莎(1982-),女,辽宁调兵山人,硕士研究生,主要研究方向:并行计算、多核计算机系统;郑晓薇(1957-),女,辽宁大连人,教授,CCF高级会员,主要研究方向:并行计算、多核计算机系统。

3) 一致通过 $n+1$ 个插值点 (x_i, y_i) , 即 $s(x_i) = y_i (i = 0, 1, 2, \dots, n)$;

则称 $s(x)$ 为函数 $[a, b]$ 上的三次插值样条函数。在构造三次插值样条函数时, 为确定 $s(x)$ 应根据 $n+1$ 个插值条件, $3n-3$ 个连续条件以及给定的边界条件, 再利用节点处的一阶导数或二阶导数就可构造出三次插值样条函数。

且设 $m_i = s''(x_i)$, $h_i = x_{i+1} - x_i$, $\lambda_i = \frac{h_{i+1}}{h_i + h_{i+1}}$, $\mu_i = 1 - \lambda_i$, 那么可以得到:

$$\begin{bmatrix} 2 & \lambda_1 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ \mu_2 & 2 & \lambda_2 & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \mu_{n-1} & \cdots & 2 & \lambda_{n-1} \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & \mu_n & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} m_1 \\ m_2 \\ \vdots \\ m_{n-1} \\ m_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} d_1 \\ d_2 \\ \vdots \\ d_{n-1} \\ d_n \end{bmatrix} \quad (1)$$

它是关于 $m_0, m_1, \dots, m_{n-1}, m_n$ 的三对角方程组, 可以看出, 该方程组的系数矩阵是三对角的, 矩阵中所有非零元素都集中在主对角线及其相邻的两条对角线上, 除了这三条对角线上的元素外, 其余元素全为零, 它是一种严格对角占优的稀疏矩阵。

三对角方程组的结构具有特殊性, 因此用一般方法求解过程中, 一次消元或一次回代, 只涉及相邻的一个方程。由图1可以看出每个后续操作严格依赖于前一个操作, 该计算过程难以直接进行并行化。

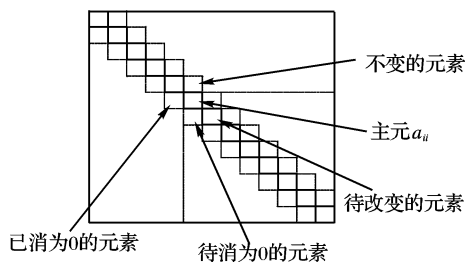


图1 三对角的方程组的求解

2 算法设计与分析

样条函数的关键在于解三对角方程组, 本文设计了在多核计算机上求解三对角线性方程组并行算法, 其主要的设计目的是实现三次样条曲线拟合的多核并行算法。

2.1 串行算法

在三次样条曲线拟合中解三对角方程组时, 一般采用追赶法进行求解, 其被认为是目前串行机上求解三对角方程组的最优算法, 可以较快速地得到函数曲线各节点处的二阶导数值 m_i , 以便进一步建立样条函数的分段表达式, 即得到拟合曲线。

追赶法的计算过程步骤如下^[9]。

1) 先消去方程组中三对角矩阵 A 的下方一条对角线, 使主对角线元素变为1, 可将它化为同解方程(2):

$$\begin{bmatrix} 1 & u_1 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & 1 & u_2 & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 & u_{n-1} \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} m_1 \\ m_2 \\ \vdots \\ m_{n-1} \\ m_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} d_1 \\ d_2 \\ \vdots \\ d_{n-1} \\ d_n \end{bmatrix} \quad (2)$$

以上消元的过程称为“追”的过程(自上而下)。计算过程用公式表示为:

$$u_1 = c_1/b_1, y_1 = f_1/b_1$$

$$\begin{cases} u_i = c_i/(b_i - u_{i-1}a_i), i = 2, \dots, n-1 \\ y_i = (d_i - d_{i-1}a_i)/(b_i - u_{i-1}a_i), i = 2, \dots, n \end{cases}$$

2) 利用回代过程求出方程组的各变量。逆序求变量的回代过程, 称为赶的过程(自下而上)。公式表述如下:

$$\begin{cases} x_n = d_n \\ x_i = d_i - u_i x_{i+1}, i = n-1, n-2, \dots, 1 \end{cases}$$

由上述计算过程可以看出, 追赶算法的主要计算步骤是递归的, 每一迭代步中变量的更新是相关的, 只能步进地进行计算, 无法利用多核技术提高三对角线性方程组的求解效率。需要对算法进行重新设计, 降低相关程度, 以便能够进行并行化处理。

2.2 并行算法

考虑此方程组的特殊性质, 可以利用奇偶约化算法求解, 在并行机上它比追赶法更有效。奇偶约化法的基本思想是通过执行初等行运算, 在偶数编号的方程中消去奇数编号变元, 从而得到一个规模减半的三对角方程组。此方法非常适合在多核计算机上计算。为推导方便将式(1) 写为方程组形式:

$$\begin{cases} b_1 m_1 + c_1 m_2 = d_1 \\ a_2 m_1 + b_2 m_2 + c_2 m_3 = d_2 \\ \vdots \\ a_i m_{i-1} + b_i m_i + c_i m_{i+1} = d_i \\ \vdots \\ a_n m_{n-1} + b_n m_n = d_n \end{cases} \quad (3)$$

在三对角方程组中, 第一个和最后一个方程中只含有两个变量, 其余均为三个变量, 于是可将三对角方程组一般化为:

$$\begin{cases} a_i m_{i-1} + b_i m_i + c_i m_{i+1} = b_i, i = 1, 2, \dots, n \\ a_1 = c_n = 0 \end{cases}$$

奇偶约化并行算法的计算步骤如下^[10]。

1) 利用方程组(2) 中的三个连续方程消去偶数编号方程中具有奇下标的变量, 只剩下偶变量。

第 $i-1$ 个方程, 第 i 方程, 第 $i+1$ 个方程分别为:

$$a_{i-1} m_{i-2} + b_{i-1} m_{i-1} + c_{i-1} m_i = b_{i-1} \quad (4)$$

$$a_i m_{i-1} + b_i m_i + c_i m_{i+1} = b_i \quad (5)$$

$$a_{i+1} m_i + b_{i+1} m_{i+1} + c_{i+1} m_{i+2} = b_{i+1} \quad (6)$$

式(4) 与 $-a_i b_{i-1}^{-1}$ 相乘后加到中间的式(5), 消去式(5) 中的 $a_i m_{i-1}$ 项; 式(6) 乘以 $-c_i b_{i+1}^{-1}$ 后亦与式(5) 相加, 消去式(5) 中的 $c_i m_{i+1}$ 项, 此时中间的式(5) 变为关于 m_{i-2}, m_i, m_{i+2} 的方程:

$$\alpha_i m_{i-2} + \beta_i m_i + \gamma_i m_{i+2} = \eta_i; i = 1, 2, \dots, \lfloor n/2 \rfloor \quad (7)$$

2) 形成缩减方程组。继续这个约化过程, 直到将所有连续的三元方程组都处理完毕, 此时原问题转变为一个规模减半的新方程组。

3) 此时方程(7) 即为新方程组的式(4), 按照1) 和2) 的策略重复约化, 则方程组的维数连续减半。

4) 由最后的方程求解出 m_n , 开始回代求出全部解。

本算法的约化过程可用一树型结构描述, 根节点表示最初的方程组, 斜线(/) 表示在约化过程中被约去的奇数编号方程组。如图2所示。

前三步的消元过程可以并行处理, 由于消去具有奇下标变量的计算过程不存在数据相关, 可以同时进行。求解三对角线性方程组的主要计算时间都消耗在消去奇下标变量的过程上, 并行处理后会大大缩短运算时间。第4) 步的回代过程

也用并行的方式将其分配到不同的线程上同时执行,以减少执行时间。本文在多核环境下利用 OpenMP 设计了求解三对角方程组的奇偶约化多线程并程序,由于巧妙地分离了方程组之间的关联,在程序的某些部分之间互不影响没有相关性,使这些方程组可被并行地进行求解,使用 sections 语句实现功能并行,运算速度得到提高。

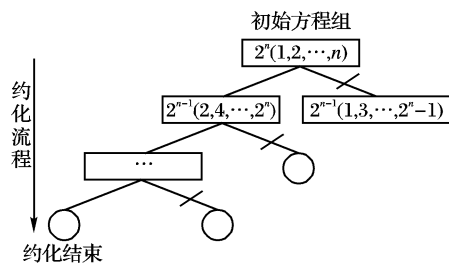


图2 三对角方程组约化过程

3 实验结果分析

本文采取并行求解三对角方程组的方法实现样条曲线拟合的并行处理,在实验中将解决三次样条函数时求解三对角方程组的奇偶约化算法与用追赶法求解相同的方程组算法进行了实验对比。本实验分别对不同阶数 n 的方程组进行了测试,实验的平台分别是单核 PC 机, Intel 双核电脑 (Intel Pentium Dual E2180 2.00 GHz, 1.00 GB 的内存) 和 Intel 四核电脑 (Intel Xeon CPU E5405 2.00 GHz, 1.99 GB 的内存), 编译器为 Microsoft Visual Studio2005, 数据类型为双精度浮点型。

实验结果取多次测试的平均值,以求得稳定值。测试过程中每次测试的时间值波动很小,说明系统环境包括软件和硬件环境对算法的影响较小,测试所得的时间是可信的。表1中的测试时间是算法的计算时间,启动的线程数为2。

表1中 T_1 为追赶法执行时间, T_2 为奇偶约化串行算法执行时间, T_p 为奇偶约化并行算法执行时间,时间单位为 ms。

表1 不同规模下各算法的运行时间

方程组规模	运行时间/ms		
	T_1	T_2	T_p
2048	238	250	234
4096	531	547	437
8192	1390	1438	984

由表1可以看出,并行算法的计算速度优于串程序。奇偶约化法是为了适合于并行处理而设计的求解方法,在计算过程中为了减少数据相关性,采取取消偶数编号的方程中奇数编号变量的方法,虽然增加了计算量,在串行机上解三对角线性方程组的执行时间比追赶法多,但是在多核环境下计算任务能够被分到多个核上并行执行,因此使计算速度加快。

表2为本并行算法分别在1,2,4个核数机器上,求解三种规模方程组的运行时间,时间单位为 ms。

表2 不同核数机器上并行算法的运行时间

方程组规模	运行时间/ms		
	单核	双核	4核
2048	250	234	219
4096	547	437	396
8192	1438	984	898

由表2可以看出,机器的核数越多,运行的时间越短,这是因为随着核数的增多,任务被分配到更多的 CPU 核上并行

执行。表明此多核并行算法具有很好的扩展性。

实验中以加速比作为衡量算法效率提升的指标,加速比可用式(8)求得:

$$S_p = T_s / T_p \quad (8)$$

其中: S_p 是加速比, T_s 为串行算法的执行时间。绝对加速比 $S_{p1} = T_1 / T_p$; 相对加速比 $S_{p2} = T_2 / T_p$ 。

方程组为 2048, 4096, 8192 时,不同规模下的绝对加速比分别为: 1.02、1.21、1.41; 相对加速比分别为: 1.07、1.27、1.46。如图3所示。

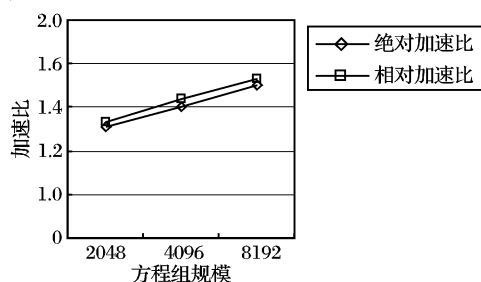


图3 加速比的对比结果

观察图3可以得出,绝对加速比和相对加速比都是问题规模的增函数。随着计算规模的增大,并行计算的优势明显表现出来,这是因为并行开销所占程序的总开销的比重越来越小。

在样条曲线的应用中,奇偶约化多核并行算法在计算过程中充分利用了多核计算机的优势,提高了三对角线性方程组的求解速度,从而加快了样条曲线的生成。

4 结语

目前,随着多核计算机的普及,使得多核计算机上的并行算法成为一个非常重要的研究方向,并已成功应用于许多领域。在样条曲线拟合问题中,三对角方程组的求解大量应用,对它并行化能够提高问题的并行效率,提高整体的计算速度。本文给出了解决三次样条函数时求解三对角方程组的并行多核算法。实验结果证明本算法节省了求解方程组的时间,从而减少了样条曲线拟合的时间。

参考文献:

- [1] 王顺绪. 多核计算机上并行计算的实现与分析[J]. 淮海工学院学报: 自然科学版, 2009, 18(3): 30-33.
- [2] 张彩明, 汪嘉业. 可调整 C^2 四次 Bézier 插值曲线的构造[J]. 计算机学报, 2004, 27(12): 1665-1671.
- [3] 骆志刚, 李晓梅. 块三对角线性方程组的一种分布式并行算法[J]. 计算机学报, 2000, 23(10): 1028-1034.
- [4] 迟利华, 刘杰, 李晓梅. 三对角线性方程组的一种有效并行算法[J]. 计算机学报, 1999, 22(2): 218-221.
- [5] RODRIGUE G H, MADSEN N K, KARUSH J I. Odd-even reduction for banded linear equations[J]. Journal of ACM, 1979, 26(1): 72-81.
- [6] SPALETTA G, EVANS D J. The parallel recursive decoupling algorithm for solving tridiagonal linear systems[J]. Parallel Computing, 1993, 19(5): 563-576.
- [7] 王会峰, 刘上乾, 汪大宝, 等. 三次样条插值在变径内腔重建中的应用[J]. 华中师范大学学报: 自然科学版, 2004, 38(4): 418-422.
- [8] 陈文略, 王子羊. 三次样条插值在工程拟合中的应用[J]. 中北大学学报: 自然科学版, 2010, 31(1): 66-70.
- [9] 张宝琳, 谷同祥, 莫则尧. 数值并行计算原理与方法[M]. 北京: 国防工业出版社, 1999.
- [10] 陈国良. 并行计算——结构、算法、编程[M]. 北京: 高等教育出版社, 1999.