

文章编号:1001-9081(2010)12-3366-05

## 多重粗糙模糊集模型

黄光球, 王伟

(西安建筑科技大学 管理学院, 西安 710055)

(huangnan93@sohu.com)

**摘要:**为了充分揭示知识颗粒间的重叠性、对象的重要度差别及其多态性,基于多重集合,对Dubois粗糙模糊集意义下的粗糙模糊集模型的论域进行了扩展,提出了基于多重集的粗糙模糊集模型,给出了该模型的完整定义、相关定理和重要性质,其中包括多重粗糙模糊近似集、近似精度和可定义集的定义及其各种性质的证明、多重集意义下的粗糙模糊近似算子之间的关系及其与Dubois意义下的粗糙模糊近似算子之间的关系等。多重粗糙模糊集可用于从具有一对多依赖性关系的且具有模糊特性的数据中挖掘知识。

**关键词:**粗糙集;模糊粗糙集;粗糙模糊集;多重粗糙集;多重粗糙模糊集;多重集

**中图分类号:** TP182 **文献标志码:** A

## Multiple rough fuzzy set model

HUANG Guang-qiu, WANG Wei

(School of Management, Xi'an University of Architecture and Technology, Xi'an Shaanxi 710055, China)

**Abstract:** To fully describe the overlap among knowledge particles, significance difference among objects and polymorphism of objects, based on multi-set, an expansion was made on the domain of rough fuzzy set model in the sense of Dubois rough fuzzy set, multiple rough fuzzy set model was put forward, their corresponding definitions, theorems and properties were fully described, which included the definitions of multiple rough fuzzy approximate sets, approximation accuracy and definable sets, proofs of their important properties, relations among rough approximation operators in multiple rough sets and relations between Dubois rough fuzzy sets and multiple rough fuzzy sets. Multiple rough fuzzy sets can conveniently find associated knowledge from data with one-to-many dependency and fuzzy properties.

**Key words:** rough set; fuzzy rough set; rough fuzzy set; multiple rough set; multiple rough fuzzy set; multi-set

## 0 引言

模糊粗糙集理论的建立和发展,成为粗糙集理论推广的重要方向之一。从提出模糊粗糙集理论<sup>[1-2]</sup>以来,模糊粗糙集理论的研究得到了长足发展,各种广义模糊粗糙集理论、公理化的模糊粗糙集理论相继提出<sup>[3-5]</sup>,其中文献[3]中提出的模型、特别是文献[5]的模型,可以说在一个论域的框架下,已经使该理论的发展达到了一个相对完善的状态。另一方面,文献[6-8]的作者们在双论域的范畴下进行了探索,将模糊粗糙集理论的研究推到了一个新的阶段。然而,目前所见的关于模糊粗糙集应用的讨论,绝大多数是基于Dubois模型中的粗糙模糊集和模糊粗糙集概念<sup>[8-13]</sup>。

然而,与粗糙集<sup>[14]</sup>一样,迄今为止各类模糊粗糙集模型所涉及到的集合是简单集,即集合中的元素不允许重复,这类模糊粗糙集模型仅能解决对象与其属性值之间为一对一关系的问题。然而,现实世界中,对象与其属性值之间大量存在着对象与其属性值之间为一对多关系的问题,因此,为了解决对象与其属性值之间为一对多关系的问题,有必要对模糊粗糙集的论域进行扩展,使之适合多重集<sup>[15]</sup>情形。文献[16]将多重集引入到粗糙集中,提出了多重粗糙集模型。本文将多重集引入到粗糙模糊集模型中,提出了基于多重集的粗糙模糊集模型(下称多重粗糙模糊集模型)。与粗糙模糊集模型相比,多重粗糙模糊集模型具有如下不同的特征。

1) 除属性集外,所有的集合(包含论域)都是多重集。

2) 可以解决对象与其属性值之间为一对多关系的问题,此类问题在现实中非常普遍。

3) 不管在模糊集意义下还是在普通集意义下,同一个论域元素(又称对象)均可以属于不同的等价类,这一现象符合现实情况。例如,交叉学科就是不同学科知识相互交叉的结果。若一个对象属于不同的等价类的次数越多,表明该对象应特别要引起注意。

4) 对象在集合中的重复次数,称为该对象的变异度,也就是允许该对象在不同情形下的变异次数。例如,数学知识与物理知识间的重叠部分可理解为数学知识在物理知识中的一次变异,反之亦然。

5) 非此即彼的概念并不总是成立。若 $x \in \sim X$ ,但可能仍有 $x \in X$ ,也即 $(\sim X) \cap X = \emptyset$ 、 $(\sim X) \cup X = U$ 并不总是成立。

由于粗糙模糊集是模糊粗糙集理论的一部分,本文的主要工作是对粗糙模糊集的定义进行扩展,将多重集引入到粗糙模糊集中,形成多重粗糙模糊集模型,为进一步研究将多重集引入到模糊粗糙集中打下基础。

## 1 多重粗糙模糊集模型

### 1.1 多重集合运算算子

多重集合为一般定义的普通集合的扩展。因此,多重集合

收稿日期:2010-05-05;修回日期:2010-07-25。 基金项目:国家重点学科培育项目(200808265);陕西省教育厅科技计划项目(09JK524)。

作者简介:黄光球(1964-),男,湖南桃源人,教授,博士,主要研究方向:知识挖掘、不确定决策、数据库理论;王伟(1985-),男,陕西柞水人,硕士研究生,主要研究方向:知识挖掘、不确定决策。

的相关概念与运算应在元素重复度为 0 或 1 的特殊情形下兼容普通集合相应的概念与运算。为论述方便,本文将重复度改称为变异度。多重集合运算算子  $\in, \subseteq, =, \parallel, \cup, \cap, -, +, U, \sim$  的定义可参见文献[16] 中的定义 1 ~ 10, 这些定义的重要注记可参见文献[16] 中的相应注记(1) ~ (8)。

## 1.2 多重粗糙模糊集的基本框架定义

文献[16] 给出了多重粗糙集的基本框架定义,如多重论域、多重等价类、对象状态等,其详细定义可参加文献[16] 中的定义 11 ~ 15。关于多重论域  $U$  中对象  $x$  的若干重要性质,文献[16] 也作了介绍,本文不再赘述。下面重点介绍多重粗糙模糊集的基本框架定义。

**定义 1** 设  $U$  为有限多重论域,  $U$  上的一个多重模糊集合  $A$  可以表示为:

$$A = \sum_{x \in V_{\text{obj}}(U)} \frac{a(x)x}{A(x)}$$

其中:  $a(x)$  为对象  $x$  的变异度,  $1 \leq a(x) \leq v(x)$ ,  $A(x)$  为对象  $x$  的隶属度,  $V_{\text{obj}}()$  为对象名称提取算子<sup>[16]</sup>。

**定义 2** 设  $U$  为有限多重论域,  $U$  上的一个多重模糊集合为:

$$A = \sum_{x \in V_{\text{obj}}(U)} \frac{a(x)x}{A(x)}$$

算子  $F_{\text{vd}}(A)$  用于提取多重模糊集合  $A$  中所有对象的变异度,即  $F_{\text{vd}}(A) = \{a(x) \mid x \in V_{\text{obj}}(U), \text{且在 } A \text{ 中对象 } x \text{ 的变异度 } a(x) > 0\}$ ; 而算子  $F_{\text{obj}}(A)$  用于提取多重模糊集合  $A$  中所有对象的名称,即  $F_{\text{obj}}(A) = \{x \mid x \in V_{\text{obj}}(U), \text{且在 } A \text{ 中对象 } x \text{ 的变异度 } a(x) > 0\}$ ; 算子  $F(A)$  用于提取多重模糊集合  $A$  中所有对象的名称及其变异度,即  $F(A) = \{a(x)x \mid x \in V_{\text{obj}}(U), \text{且在 } A \text{ 中对象 } x \text{ 的变异度为 } a(x), \text{且 } a(x) > 0\}$ 。

**定义 3** 设  $U$  为有限多重论域,  $A, B$  是  $U$  上的多重模糊子集,  $A = \sum_{x \in V_{\text{obj}}(U)} \frac{a(x)x}{A(x)}, B = \sum_{x \in V_{\text{obj}}(U)} \frac{b(x)x}{B(x)}$ , 则:

1) 若  $\forall x \in V_{\text{obj}}(U)$ , 有  $A(x) \leq B(x), a(x) \leq b(x)$ , 则  $A$  包含于  $B$ , 记为  $A \subseteq B$ ;

2) 若  $A \subseteq B, B \subseteq A$ , 则称  $A$  与  $B$  相等, 记为  $A = B$ ;

3)  $(A \cup B)(x) = \frac{\max\{a(x), b(x)\}x}{A(x) \vee B(x)} = \frac{\max\{a(x), b(x)\}x}{\max\{A(x), B(x)\}}$ ;

4)  $(A \cap B)(x) = \frac{\min\{a(x), b(x)\}x}{A(x) \wedge B(x)} = \frac{\min\{a(x), b(x)\}x}{\min\{A(x), B(x)\}}$ ;

5)  $A^c(x) = \sim A(x) = \frac{[v(x) - a(x)]x}{1 - A(x)}$ ;

6)  $(A - B)(x) = \begin{cases} \frac{(a(x) - b(x))x}{A(x) \wedge (1 - B(x))}, & a(x) > b(x) \\ \emptyset, & a(x) \leq b(x) \end{cases}$ 。

**定义 4** 设  $U$  为有限多重论域,  $R$  是  $U$  上的一个等价关系, 包含对象  $x$  的等价类仍记为  $[e(x)x]_R, [e(x)x]_R \in U/R$ , 其中  $1 \leq e(x) \leq v(x)$ 。  $A$  是  $U$  上的多重模糊子集,  $A = \sum_{x \in V_{\text{obj}}(U)} \frac{a(x)x}{A(x)}$ , 则  $A$  关于多重近似空间  $(U, R)$  中的一对  $\Sigma$  型多重模糊

下近似集  $A_R^{\Sigma}$  和多重模糊上近似集  $\bar{A}_R^{\Sigma}$  分别为:

$$\begin{cases} A_R^{\Sigma} = \sum_{x \in V_{\text{obj}}(U)} \frac{x \sum_{[e(x)x] \in U/R, [e(x)x]_R \subseteq F_{\text{vd}}(A)} e(x)}{\inf_{[e(x)x]_R \in U/R, [e(x)x]_R \subseteq F_{\text{vd}}(A)} \{A(y) \mid y \in V_{\text{obj}}([e(x)x]_R)\}} \\ \bar{A}_R^{\Sigma} = \sum_{x \in V_{\text{obj}}(U)} \frac{x \sum_{[e(x)x]_R \in U/R, [e(x)x]_R \cap F_{\text{vd}}(A) \neq \emptyset} e(x)}{\sup_{[e(x)x]_R \in U/R, [e(x)x]_R \cap F_{\text{vd}}(A) \neq \emptyset} \{A(y) \mid y \in V_{\text{obj}}([e(x)x]_R)\}} \end{cases}$$

而一对  $\cup$  型多重模糊下近似集  $A_R^{\cup}$  和多重模糊上近似集  $\bar{A}_R^{\cup}$  分别为:

$$\begin{cases} A_R^{\cup} = \sum_{x \in V_{\text{obj}}(U)} \frac{x \sum_{[e(x)x]_R \in U/R, [e(x)x]_R \subseteq F_{\text{vd}}(A)} \{e(x)\}}{\inf_{[e(x)x]_R \in U/R, [e(x)x]_R \subseteq F_{\text{vd}}(A)} \{A(y) \mid y \in V_{\text{obj}}([e(x)x]_R)\}} \\ \bar{A}_R^{\cup} = \sum_{x \in V_{\text{obj}}(U)} \frac{x \sum_{[e(x)x]_R \in U/R, [e(x)x]_R \cap F_{\text{vd}}(A) \neq \emptyset} \{e(x)\}}{\sup_{[e(x)x]_R \in U/R, [e(x)x]_R \cap F_{\text{vd}}(A) \neq \emptyset} \{A(y) \mid y \in V_{\text{obj}}([e(x)x]_R)\}} \end{cases}$$

**定义 5** 若  $A_R^{\Sigma} = \bar{A}_R^{\Sigma}$  (或  $A_R^{\cup} = \bar{A}_R^{\cup}$ ), 则称  $A$  是可定义的, 否则称  $A$  是多重粗糙模糊集; 称  $pos A_R^{\Sigma} = A_R^{\Sigma}$  (或  $pos A_R^{\cup} = A_R^{\cup}$ ) 为  $A$  关于多重近似空间  $(U, R)$  的正域; 称  $neg A_R^{\Sigma} = \sim \bar{A}_R^{\Sigma}$  (或  $neg A_R^{\cup}(A) = \sim \bar{A}_R^{\cup}$ ) 为  $A$  关于多重近似空间  $(U, R)$  的负域;  $bn A_R^{\Sigma}(A) = \bar{A}_R^{\Sigma} - A_R^{\Sigma}$  (或  $bn A_R^{\cup}(A) = \bar{A}_R^{\cup} - A_R^{\cup}$ ) 为  $A$  关于多重近似空间  $(U, R)$  的边界。

**定理 1** 设  $U$  为多重论域,  $R$  是  $U$  上的一个等价关系,  $A, B$  是  $U$  上的多重模糊子集, 则由定义 4 给出的  $\Sigma$  型多重模糊下近似集  $A_R^{\Sigma}$  和多重模糊上近似集  $\bar{A}_R^{\Sigma}$  满足下列对偶性质:

- 1)  $A^{\Sigma} \subseteq \bar{A}^{\Sigma}$ ;
- 2)  $(A \cup B)^{\Sigma} = \bar{A}^{\Sigma} \cup \bar{B}^{\Sigma}, (A \cap B)^{\Sigma} = A^{\Sigma} \cap B^{\Sigma}$ ;
- 3)  $A^{\Sigma} \cup B^{\Sigma} \subseteq (A \cup B)^{\Sigma}, (A \cap B)^{\Sigma} \subseteq A^{\Sigma} \cap B^{\Sigma}$ ;
- 4)  $(A^{\Sigma})^{\Sigma} \supseteq \bar{A}^{\Sigma} \supseteq (A^{\Sigma})^{\Sigma}, (A^{\Sigma})^{\Sigma} \subseteq A^{\Sigma} \subseteq (A^{\Sigma})^{\Sigma}$ ;
- 5)  $U^{\Sigma} = U, \emptyset^{\Sigma} = \emptyset$ ;
- 6) 若  $A \subseteq B$ , 则  $A^{\Sigma} \subseteq B^{\Sigma}, \bar{A}^{\Sigma} \subseteq \bar{B}^{\Sigma}$ 。

**证明** 设  $A = \sum_{x \in V_{\text{obj}}(U)} \frac{a(x)x}{A(x)}, B = \sum_{x \in V_{\text{obj}}(U)} \frac{b(x)x}{B(x)}$ , 则:

1)  $\forall x \in V_{\text{obj}}(U)$ , 有:

$$\begin{aligned} \sum_{[e(x)x] \in U/R, [e(x)x]_R \subseteq F_{\text{vd}}(A)} e(x) &\leq \sum_{[e(x)x]_R \in U/R, [e(x)x]_R \cap F_{\text{vd}}(A) \neq \emptyset} e(x) \\ \inf_{[e(x)x]_R \in U/R, [e(x)x]_R \subseteq F_{\text{vd}}(A)} \{A(y) \mid y \in V_{\text{obj}}([e(x)x]_R)\} &\leq \\ \sup_{[e(x)x]_R \in U/R, [e(x)x]_R \cap F_{\text{vd}}(A) \neq \emptyset} \{A(y) \mid y \in V_{\text{obj}}([e(x)x]_R)\} & \end{aligned}$$

故有:

$$\begin{aligned} A_R^{\Sigma}(x) &= \frac{x \sum_{[e(x)x] \in U/R, [e(x)x]_R \subseteq F_{\text{vd}}(A)} e(x)}{\inf_{[e(x)x]_R \in U/R, [e(x)x]_R \subseteq F_{\text{vd}}(A)} \{A(y) \mid y \in V_{\text{obj}}([e(x)x]_R)\}} \leq \\ &= \frac{x \sum_{[e(x)x]_R \in U/R, [e(x)x]_R \cap F_{\text{vd}}(A) \neq \emptyset} e(x)}{\sup_{[e(x)x]_R \in U/R, [e(x)x]_R \cap F_{\text{vd}}(A) \neq \emptyset} \{A(y) \mid y \in V_{\text{obj}}([e(x)x]_R)\}} = \bar{A}_R^{\Sigma}(x) \end{aligned}$$

因此  $A^{\Sigma} \subseteq \bar{A}^{\Sigma}$ 。

2) 对于性质 2), 证明如下。

a) 性质 2) 中的第一项,  $\forall x \in V_{\text{obj}}(U)$ , 有:

$$\begin{aligned} \sum_{[e(x)x]_R \in U/R, [e(x)x]_R \cap F_{\text{vd}}(A \cup B) \neq \emptyset} e(x) &= \\ \left[ \sum_{[e(x)x]_R \in U/R, [e(x)x]_R \cap F_{\text{vd}}(A) \neq \emptyset} e(x) \right] \cup \left[ \sum_{[e(x)x]_R \in U/R, [e(x)x]_R \cap F_{\text{vd}}(B) \neq \emptyset} e(x) \right] &= \\ \sup_{[e(x)x]_R \in U/R, [e(x)x]_R \cap F_{\text{vd}}(A \cup B) \neq \emptyset} \{A \cup B(y) \mid y \in V_{\text{obj}}([e(x)x]_R)\} &= \\ \left[ \sup_{[e(x)x]_R \in U/R, [e(x)x]_R \cap F_{\text{vd}}(A) \neq \emptyset} \{A(y) \mid y \in V_{\text{obj}}([e(x)x]_R)\} \right] \vee & \\ \left[ \sup_{[e(x)x]_R \in U/R, [e(x)x]_R \cap F_{\text{vd}}(B) \neq \emptyset} \{B(y) \mid y \in V_{\text{obj}}([e(x)x]_R)\} \right] & \end{aligned}$$

于是:

$$\begin{aligned} \overline{(A \cup B)}^{\Sigma}(x) &= \frac{\sum_{[e(x)x]_R \in U/R, [e(x)x]_R \cap F_{\text{vd}}(A \cup B) \neq \emptyset} e(x)}{\sup_{[e(x)x]_R \in U/R, [e(x)x]_R \cap F_{\text{vd}}(A \cup B) \neq \emptyset} \{ (A \cup B)(y) \mid y \in V_{\text{obj}}([e(x)x]_R) \}} = \\ &= \frac{\left[ \sum_{[e(x)x]_R \in U/R, [e(x)x]_R \cap F_{\text{vd}}(A) \neq \emptyset} e(x) \right] \cup \left[ \sum_{[e(x)x]_R \in U/R, [e(x)x]_R \cap F_{\text{vd}}(B) \neq \emptyset} e(x) \right]}{\left[ \sup_{[e(x)x]_R \in U/R, [e(x)x]_R \cap F_{\text{vd}}(A) \neq \emptyset} \{ A(y) \mid y \in V_{\text{obj}}([e(x)x]_R) \} \right] \vee \left[ \sup_{[e(x)x]_R \in U/R, [e(x)x]_R \cap F_{\text{vd}}(B) \neq \emptyset} \{ B(y) \mid y \in V_{\text{obj}}([e(x)x]_R) \} \right]} = \\ &= \frac{\left[ \sum_{[e(x)x]_R \in U/R, [e(x)x]_R \cap F_{\text{vd}}(A) \neq \emptyset} e(x) \right]}{\sup_{[e(x)x]_R \in U/R, [e(x)x]_R \cap F_{\text{vd}}(A) \neq \emptyset} \{ A(y) \mid y \in V_{\text{obj}}([e(x)x]_R) \}} \cup \frac{\left[ \sum_{[e(x)x]_R \in U/R, [e(x)x]_R \cap F_{\text{vd}}(B) \neq \emptyset} e(x) \right]}{\sup_{[e(x)x]_R \in U/R, [e(x)x]_R \cap F_{\text{vd}}(B) \neq \emptyset} \{ B(y) \mid y \in V_{\text{obj}}([e(x)x]_R) \}} = \\ \overline{A}^{\Sigma}(x) \cup \overline{B}^{\Sigma}(x) &= (\overline{A}^{\Sigma} \cup \overline{B}^{\Sigma})(x) \\ \text{因此, } \overline{(A \cup B)}^{\Sigma} &= \overline{A}^{\Sigma} \cup \overline{B}^{\Sigma}. \end{aligned}$$

b) 性质2) 中的第二项,  $\forall x \in V_{\text{obj}}(U)$ , 有:

$$\begin{aligned} \sum_{[e(x)x] \in U/R, [e(x)x]_R \subseteq F_{\text{vd}}(A \cap B)} e(x) &= \left[ \sum_{[e(x)x] \in U/R, [e(x)x]_R \subseteq F_{\text{vd}}(A)} e(x) \right] \cap \left[ \sum_{[e(x)x] \in U/R, [e(x)x]_R \subseteq F_{\text{vd}}(B)} e(x) \right] \inf_{[e(x)x]_R \in U/R, [e(x)x]_R \subseteq F_{\text{vd}}(A \cap B)} \{ (A \cap B)(y) \mid \\ y \in V_{\text{obj}}([e(x)x]_R) \} &= \left[ \inf_{[e(x)x]_R \in U/R, [e(x)x]_R \subseteq F_{\text{vd}}(A)} \{ A(y) \mid y \in V_{\text{obj}}([e(x)x]_R) \} \right] \wedge \\ \left[ \inf_{[e(x)x]_R \in U/R, [e(x)x]_R \subseteq F_{\text{vd}}(B)} \{ B(y) \mid y \in V_{\text{obj}}([e(x)x]_R) \} \right] \end{aligned}$$

于是:

$$\begin{aligned} \overline{(A \cap B)}^{\Sigma}(x) &= \frac{\sum_{[e(x)x] \in U/R, [e(x)x]_R \subseteq F_{\text{vd}}(A \cap B)} e(x)}{\inf_{[e(x)x]_R \in U/R, [e(x)x]_R \subseteq F_{\text{vd}}(A \cap B)} \{ (A \cap B)(y) \mid y \in V_{\text{obj}}([e(x)x]_R) \}} = \\ &= \frac{\left[ \sum_{[e(x)x] \in U/R, [e(x)x]_R \subseteq F_{\text{vd}}(A)} e(x) \right] \cap \left[ \sum_{[e(x)x] \in U/R, [e(x)x]_R \subseteq F_{\text{vd}}(B)} e(x) \right]}{\left[ \inf_{[e(x)x]_R \in U/R, [e(x)x]_R \subseteq F_{\text{vd}}(A)} \{ A(y) \mid y \in V_{\text{obj}}([e(x)x]_R) \} \right] \wedge \left[ \inf_{[e(x)x]_R \in U/R, [e(x)x]_R \subseteq F_{\text{vd}}(B)} \{ B(y) \mid y \in V_{\text{obj}}([e(x)x]_R) \} \right]} = \\ &= \frac{\sum_{[e(x)x] \in U/R, [e(x)x]_R \subseteq F_{\text{vd}}(A)} e(x)}{\inf_{[e(x)x]_R \in U/R, [e(x)x]_R \subseteq F_{\text{vd}}(A)} \{ A(y) \mid y \in V_{\text{obj}}([e(x)x]_R) \}} \cap \frac{\sum_{[e(x)x] \in U/R, [e(x)x]_R \subseteq F_{\text{vd}}(B)} e(x)}{\inf_{[e(x)x]_R \in U/R, [e(x)x]_R \subseteq F_{\text{vd}}(B)} \{ B(y) \mid y \in V_{\text{obj}}([e(x)x]_R) \}} = \\ \overline{A}^{\Sigma}(x) \cap \overline{B}^{\Sigma}(x) &= (\overline{A}^{\Sigma} \cap \overline{B}^{\Sigma})(x) \\ \text{因此, } \overline{(A \cap B)}^{\Sigma} &= \overline{A}^{\Sigma} \cap \overline{B}^{\Sigma}. \end{aligned}$$

性质3) ~ 6) 的证明方法与上述类似, 这里不再赘述。特别注意,  $\sim \underline{A}^{\Sigma} = \sim \overline{A}^{\Sigma}$ ,  $\sim \underline{A}^{\Sigma} = \sim \overline{A}^{\Sigma}$  不成立。

**定理2** 设  $U$  为多重论域,  $R$  是  $U$  上的一个等价关系,  $A, B$  是  $U$  上的多重模糊子集, 则由定义4 给出的  $\cup$  型多重模糊下近似  $\underline{A}_R^U$  和多重模糊上近似  $\overline{A}_R^U$  满足下列对偶性质:

- 1)  $\underline{A}^U \subseteq \overline{A}^U$ ;
- 2)  $(\underline{A} \cup \underline{B})^U = \underline{A}^U \cup \underline{B}^U$ ,  $(\overline{A} \cap \overline{B})^U = \overline{A}^U \cap \overline{B}^U$ ;
- 3)  $\underline{A}^U \cup \underline{B}^U \subseteq (\underline{A} \cup \underline{B})^U$ ,  $(\overline{A} \cap \overline{B})^U \subseteq \overline{A}^U \cap \overline{B}^U$ ;
- 4)  $(\overline{A}^U)^U \supseteq \overline{A}^U \supseteq (\underline{A}^U)^U$ ,  $(\underline{A}^U)^U \subseteq \underline{A}^U \subseteq (\overline{A}^U)^U$ ;
- 5)  $\underline{U}^U = U$ ,  $\overline{\emptyset}^U = \emptyset$ ;
- 6) 若  $A \subseteq B$ , 则  $\underline{A}^U \subseteq \underline{B}^U$ ,  $\overline{A}^U \subseteq \overline{B}^U$ 。

**证明** 证明过程与定理1 类似。

特别注意,  $\sim \underline{A}^U = \sim \overline{A}^U$ ,  $\sim \underline{A}^U = \sim \overline{A}^U$  不成立。

由于多重模糊近似集  $\Sigma$  型和  $\cup$  型基本性质类似, 下面的内容我们将省略近似集的上标  $\Sigma$  和  $\cup$  符号, 亦即对不标明上标  $\Sigma$  和  $\cup$  的性质, 则表明该性质对  $\Sigma$  型和  $\cup$  型多重模糊近似集均成立; 否则, 仍保留上标  $\Sigma$  和  $\cup$  以指明该性质对  $\Sigma$  型和  $\cup$  型多重模糊近似集有差别。

**定义6** 设  $(U, R)$  是多重近似空间,  $A, B$  是  $U$  上的多重模糊集合, 称  $A$  与  $B$  是多重模糊粗下相等的, 若  $\underline{A} = \underline{B}$ , 记做  $A \approx B$ ; 称  $A$  与  $B$  是模糊粗上相等的, 若  $\overline{A} = \overline{B}$ , 记做  $A \approx B$ ; 称

$A$  与  $B$  是模糊粗相等的, 若  $\underline{A} = \underline{B}$  且  $\overline{A} = \overline{B}$ , 记作  $A \approx B$ 。

**定理3** 设  $(U, R)$  是多重近似空间,  $A, B$  是  $U$  上的多重模糊集合, 则:

- 1)  $A \approx B$  当且仅当  $A \cap B \approx A$ , 且  $A \cap B \approx B$ ;
- 2)  $A \approx B$  当且仅当  $A \cup B \approx A$ ,  $A \cup B \approx B$ ;
- 3) 若  $A \approx A'$ , 且  $B \approx B'$ , 则  $A \cup B \approx A' \cup B'$ ;
- 4) 若  $A \approx A'$ , 且  $B \approx B'$ , 则  $A \cap B \approx A' \cap B'$ ;
- 5) 若  $A \subseteq B$ , 且  $B \approx \emptyset$ , 则  $A \approx \emptyset$ ;
- 6) 若  $A \subseteq B$ , 且  $A \approx U$ , 则  $B \approx U$ ;
- 7) 若  $A \approx \emptyset$ , 或  $B \approx \emptyset$ , 则  $A \cap B \approx \emptyset$ ;
- 8) 若  $A \approx U$ , 或  $B \approx U$ , 则  $A \cup B \approx U$ ;
- 9)  $A \approx U$  当且仅当  $A = U$ ;
- 10)  $A \approx \emptyset$  当且仅当  $A = \emptyset$ 。

**证明** 由定义6 和定理1 和定理2 直接可得。

**定理4** 设  $(U, R)$  是多重近似空间, 多重模糊集合  $A, B \in F(U)$ , 则:

- 1)  $\underline{A} = \cap \{ B \in F(U) \mid B \approx A \}$ ;
- 2)  $\overline{A} = \cup \{ B \in F(U) \mid B \approx A \}$ 。

**证明** 由定义4、定义6 和定理3 即证。

**定义7** 设  $(U, R)$  是多重近似空间,  $A$  是  $U$  上的多重模糊集合, 则  $A$  关于  $(U, R)$  的粗糙度  $\rho_R(A)$  为:

$$\rho_R(A) = \begin{cases} 1 - \frac{|A|}{|\bar{A}|}, & |\bar{A}| \neq 0 \\ 0, & |\bar{A}| = 0 \end{cases}$$

$A$  关于  $(U, R)$  的近似精度为:

$$\eta_R(A) = 1 - \rho_R(A)$$

显然,  $0 \leq \rho_R(A) \leq 1, 0 \leq \eta_R(A) \leq 1$ 。若  $A$  是可定义的, 则  $\rho_R(A) = 0, \eta_R(A) = 1$ 。

**定理 5** 设  $U$  为有限多重论域, 设  $S, R$  分别为  $U$  上两种等价关系,  $S \subseteq R, A \in F(U)$ , 则:

$$1) \bar{A}_S^\Sigma \subseteq \bar{A}_R^\Sigma, \bar{A}_S^\cup \subseteq \bar{A}_R^\cup;$$

$$2) \underline{A}_R^\Sigma \subseteq \underline{A}_S^\Sigma, \underline{A}_R^\cup \subseteq \underline{A}_S^\cup \text{ 不成立。}$$

**证明** 由于  $S \subseteq R$  当且仅当  $\forall x \in V_{\text{obj}}(U)$ , 有  $[e(x)x]_S \subseteq [e(x)x]_R, 1 \leq e(x) \leq v(x)$ , 于是

1)  $\forall x \in V_{\text{obj}}(U)$ , 有:

$$\begin{aligned} \sum_{[e(x)x]_S \in U/S, [e(x)x]_S \cap F_{\text{vd}}(A) \neq \emptyset} e(x) &\leq \sum_{[e(x)x]_R \in U/R, [e(x)x]_R \cap F_{\text{vd}}(A) \neq \emptyset} e(x) \\ \sup_{[e(x)x]_S \in U/S, [e(x)x]_S \cap F_{\text{vd}}(A) \neq \emptyset} \{A(y) \mid y \in V_{\text{obj}}([e(x)x]_S)\} &\leq \\ \sup_{[e(x)x]_R \in U/R, [e(x)x]_R \cap F_{\text{vd}}(A) \neq \emptyset} \{A(y) \mid y \in V_{\text{obj}}([e(x)x]_R)\} & \\ \underline{A}_S^\Sigma(x) &= \end{aligned}$$

$$\frac{x \sum_{[e(x)x]_S \in U/S, [e(x)x]_S \cap F_{\text{vd}}(A) \neq \emptyset} e(x)}{\sup_{[e(x)x]_S \in U/S, [e(x)x]_S \cap F_{\text{vd}}(A) \neq \emptyset} \{A(y) \mid y \in V_{\text{obj}}([e(x)x]_S)\}} \leq$$

$$\frac{x \sum_{[e(x)x]_R \in U/R, [e(x)x]_R \cap F_{\text{vd}}(A) \neq \emptyset} e(x)}{\sup_{[e(x)x]_R \in U/R, [e(x)x]_R \cap F_{\text{vd}}(A) \neq \emptyset} \{A(y) \mid y \in V_{\text{obj}}([e(x)x]_R)\}} = \underline{A}_R^\Sigma(x)$$

从而  $\bar{A}_S^\Sigma \subseteq \bar{A}_R^\Sigma$ 。同理可证  $\bar{A}_S^\cup \subseteq \bar{A}_R^\cup$ 。

2) 反证法, 假设  $\underline{A}_R^\Sigma \subseteq \underline{A}_S^\Sigma$  成立, 则  $\forall x \in V_{\text{obj}}(U)$ , 有

$$\begin{aligned} \underline{A}_R^\Sigma(x) &= \frac{x \sum_{[e(x)x]_R \in U/R, [e(x)x]_R \subseteq F_{\text{vd}}(A)} e(x)}{\inf_{[e(x)x]_R \in U/R, [e(x)x]_R \subseteq F_{\text{vd}}(A)} \{A(y) \mid y \in V_{\text{obj}}([e(x)x]_R)\}} \leq \\ \frac{x \sum_{[e(x)x]_S \in U/S, [e(x)x]_S \subseteq F_{\text{vd}}(A)} e(x)}{\inf_{[e(x)x]_S \in U/R, [e(x)x]_S \subseteq F_{\text{vd}}(A)} \{A(y) \mid y \in V_{\text{obj}}([e(x)x]_S)\}} &= \underline{A}_S^\Sigma(x) \end{aligned}$$

此表明:

$$\begin{aligned} \text{a)} \quad \inf_{[e(x)x]_R \in U/R, [e(x)x]_R \cap F_{\text{vd}}(A) \neq \emptyset} \{A(y) \mid y \in V_{\text{obj}}([e(x)x]_R)\} &\leq \\ \inf_{[e(x)x]_S \in U/S, [e(x)x]_S \cap F_{\text{vd}}(A) \neq \emptyset} \{A(y) \mid y \in V_{\text{obj}}([e(x)x]_S)\} & \end{aligned}$$

$$\text{b)} \quad \sum_{[e(x)x]_R \in U/R, [e(x)x]_R \subseteq F_{\text{vd}}(A)} e(x) \leq \sum_{[e(x)x]_S \in U/S, [e(x)x]_S \subseteq F_{\text{vd}}(A)} e(x)$$

但事实上:

$$\sum_{[e(x)x]_R \in U/R, [e(x)x]_R \subseteq F_{\text{vd}}(A)} e(x) \geq \sum_{[e(x)x]_S \in U/S, [e(x)x]_S \subseteq F_{\text{vd}}(A)} e(x)$$

此与 b) 矛盾! 从而  $\underline{A}_R^\Sigma \subseteq \underline{A}_S^\Sigma$  不成立。同理可证  $\underline{A}_R^\cup \subseteq \underline{A}_S^\cup$  不成立。

**定理 6** 设  $U$  为有限多重论域,  $S, R$  分别为  $U$  上两种等价关系,  $S \subseteq R, A \in F(U)$ , 则  $\rho_S^\Sigma(A) \subseteq \rho_R^\Sigma(A), \rho_S^\cup(A) \subseteq \rho_R^\cup(A)$  不成立。

**证明** 由定义 7 和定理 5 即证。

## 2 粗糙模糊近似算子之间

1) 多重粗糙模糊近似算子与多重粗糙近似算子之间的关系。

**定理 7** 设  $U$  为有限多重论域,  $R$  是  $U$  上的等价关系, 当  $A$  是  $U$  上的经典多重集时, 即  $\forall x \in V_{\text{obj}}(U), A(x) = 1$ , 则  $\Sigma$  多重模糊近似集为:

$$\begin{cases} \underline{A}_R^\Sigma = \sum \{Y \in U/R \mid Y \subseteq X\} = \sum_{x \in V_{\text{obj}}(U)} \{[a(x)x]_R \subseteq X\} = \underline{R}^\Sigma(A) \\ \bar{A}_R^\Sigma = \sum \{Y \in U/R \mid Y \cap X \neq \emptyset\} = \\ \sum_{x \in V_{\text{obj}}(U)} \{[a(x)x]_R \cap X \neq \emptyset\} = \bar{R}^\Sigma(A) \\ bnA_R^\Sigma = bnR^\Sigma(X) \\ negA_R^\Sigma = negR^\Sigma(X) \end{cases}$$

而一对  $\cup$  型多重模糊下近似  $\underline{A}_R^\cup$  和多重模糊上近似  $\bar{A}_R^\cup$  分别为:

$$\begin{cases} \underline{A}_R^\cup = \bigcup_{x \in V_{\text{obj}}(U)} \{Y \in U/R \mid Y \subseteq X\} = \\ \bigcup_{x \in V_{\text{obj}}(U)} \{[a(x)x]_R \subseteq X\} = \underline{R}^\cup(A) \\ \bar{A}_R^\cup = \bigcup_{x \in V_{\text{obj}}(U)} \{Y \in U/R \mid Y \cap X \neq \emptyset\} = \\ \bigcup_{x \in V_{\text{obj}}(U)} \{[a(x)x]_R \cap X \neq \emptyset\} = \bar{R}^\cup(A) \end{cases}$$

其中:  $\underline{R}^\Sigma(X), \bar{R}^\Sigma(X), bnR^\Sigma(X), negR^\Sigma(X), \underline{R}^\cup(X), \bar{R}^\cup(X), bnR^\cup(X), negR^\cup(X)$  分别为文献[16]中的多重粗糙集  $\Sigma$  型和  $\cup$  型意义下的多重下近似、多重上近似、多重边界、多重负域。

**证明** 由定义 4 直接得到。

**定理 8** 设  $U$  为有限多重论域,  $R$  是  $U$  上的等价关系, 当  $A$  是  $U$  上的多重模糊集时, 则对于任意多重集  $X \subseteq U$ , 有:

$$\begin{cases} \underline{R}^\Sigma(F(A)) \supseteq \underline{A}_R^\Sigma & \underline{R}^\cup(F(A)) \supseteq \underline{A}_R^\cup \\ \bar{R}^\Sigma(F(A)) \supseteq \bar{A}_R^\Sigma & \bar{R}^\cup(F(A)) \supseteq \bar{A}_R^\cup \\ bnR^\Sigma(F(A)) \supseteq bnA_R^\Sigma & bnR^\cup(F(A)) \supseteq bnA_R^\cup \\ negR^\Sigma(F(A)) \supseteq negA_R^\Sigma & negR^\cup(F(A)) \supseteq negA_R^\cup \end{cases}$$

**证明** 在经典多重集意义下,  $\underline{R}^\Sigma(X), \bar{R}^\Sigma(X), bnR^\Sigma(X), negR^\Sigma(X), \underline{R}^\cup(X), \bar{R}^\cup(X), bnR^\cup(X), negR^\cup(X)$  中的任意对象  $x$  的隶属度  $A(x) = 1$ , 由定义 4 和文献[16]中的定义 18、19、20 直接得到。

2) 多重粗糙模糊近似算子与 Dubois 意义下的粗糙模糊近似算子之间的关系。

**定理 9** 设  $U$  为有限多重论域,  $U_Z$  为 Dubois 粗糙模糊集意义下的论域,  $U = D_{St}(U_Z)^{[16]}$ ;  $R$  是  $U$  和  $U_Z$  上的等价关系<sup>[16]</sup>;  $A$  是  $U$  上的多重模糊集合,  $A_Z$  是  $U_Z$  上的模糊集合,  $F(A) = D_{St}(F(A_Z))^{[16]}$ ;  $\underline{R}_Z(A_Z), \bar{R}_Z(A_Z), bnR_Z(A_Z), negR_Z(A_Z)$  分别为对相应的 Dubois 粗糙模糊集意义下的下近似集、上近似集、边界、负域, 则有:

$$\begin{cases} D_{St}(\underline{R}_Z(A_Z)) = \underline{A}_R^\Sigma & D_{St}(\underline{R}_Z(A_Z)) \supseteq \underline{A}_R^\cup \\ D_{St}(\bar{R}_Z(A_Z)) = \bar{A}_R^\Sigma & D_{St}(\bar{R}_Z(A_Z)) \supseteq \bar{A}_R^\cup \\ D_{St}(bnR_Z(A_Z)) = bnA_R^\Sigma & D_{St}(bnR_Z(A_Z)) \supseteq bnA_R^\cup \\ D_{St}(negR_Z(A_Z)) = negA_R^\Sigma & D_{St}(negR_Z(A_Z)) \subseteq negA_R^\cup \end{cases}$$

**证明** 证明方法与文献[16]的定理 5 类似。

3) 多重粗糙模糊近似算子与 Pawlak 意义下的粗糙近似算子之间的关系。

**定理 10** 设  $U$  为有限多重论域,  $U_Z$  为 Pawlak 粗糙集意义下的论域, 且  $U = D_{St}(U_Z)$ ;  $R$  是  $U$  和  $U_Z$  上的等价关系<sup>[16]</sup>;  $A$  是  $U$  上的多重模糊集合,  $A_Z$  是  $U_Z$  上的模糊集合, 且  $F(A) =$

$D_{SI}(F(A_Z))^{[16]}$ ;  $\underline{R}_Z(A_Z)$ ,  $\overline{R}_Z(A_Z)$ ,  $bnR_Z(A_Z)$ ,  $negR_Z(A_Z)$  分别为对相应的 Pawlak 粗糙集意义下的下近似集、上近似集、边界、负域,则有:

$$\begin{cases} D_{SI}(\underline{R}_Z(A_Z)) \subseteq \underline{A}_R^U \\ D_{SI}(\overline{R}_Z(A_Z)) \supseteq \overline{A}_R^U \\ D_{SI}(bnR_Z(A_Z)) \supseteq bnA_R^U \\ D_{SI}(negR_Z(A_Z)) \subseteq negA_R^U \end{cases}, \begin{cases} D_{SI}(\underline{R}_Z(A_Z)) \subseteq \underline{A}_R^S \\ D_{SI}(\overline{R}_Z(A_Z)) \supseteq \overline{A}_R^S \\ D_{SI}(bnR_Z(A_Z)) \supseteq bnA_R^S \\ D_{SI}(negR_Z(A_Z)) \subseteq negA_R^S \end{cases}$$

证明 根据定义4和文献[16]的定理5即可得证。

4) 多重粗糙模糊近似算子  $\Sigma$  型与  $\cup$  型之间的关系。

**定理 11** 设  $U$  为有限多重论域,  $R$  是  $U$  上的等价关系,  $A$  是  $U$  上的多重模糊集合, 则有

$$\underline{A}_R^U \subseteq \underline{A}_R^S, \overline{A}_R^U \subseteq \overline{A}_R^S, posA_R^U \subseteq posA_R^S, bnA_R^U \subseteq bnA_R^S, negA_R^U \supseteq negA_R^S$$

证明 根据定义4直接得到。

### 3 结语

本文在多重集意义下定义了多重粗糙模糊集模型, 它们是 Dubois 模糊粗糙集意义下的粗糙模糊集模型的推广形式, 具有不同的知识发现能力。在实际的数据处理中, 它比 Dubois 模糊粗糙集意义的粗糙模糊集具有更广阔的应用前景。

#### 参考文献:

- [1] DUBOIS D, PRADE H. Rough fuzzy sets and fuzzy rough sets [J]. International Journal of General Systems, 1990, 126(17): 191 - 209.
- [2] DUBOIS D, PRADE H. Putting rough sets and fuzzy sets together [M]. Dordrecht, Netherlands: Kluwer Academic Publishers, 1992: 203 - 222.
- [3] GRECO S, MATARAZZO B, SLOWINSKI R. Fuzzy similarity rela-

tion as a basis for rough approximations [C]// Proceedings of RSCTC'98. Heidelberg: Springer-Verlag, 1998: 283 - 289.

- [4] MORSI N N, YAKOUT M M. Axiomatics for fuzzy rough sets [J]. Fuzzy Sets and Systems, 1998, 100(6): 327 - 342.
- [5] RADZIKOWSKA A M, KERRE E E. A comparative study of fuzzy rough sets [J]. Fuzzy Sets and Systems, 2002, 126(2): 137 - 155.
- [6] WU WEI-ZHI, MI JUN-SHENG, ZHANG WEN-XIU. Generalized fuzzy rough sets [J]. Information Sciences, 2003, 151(3): 263 - 282.
- [7] MI JUN-SHENG, ZHANG WEN-XIU. An axiomatic characterization of a fuzzy generalization of rough sets [J]. Information Sciences, 2004, 160(5): 235 - 249.
- [8] 吴正江, 秦克云, 乔全喜. 双论域 L 模糊粗糙集 [J]. 计算机工程与应用, 2007, 43(5): 10 - 11.
- [9] DEMIRCI M. Genuine sets, various kinds of fuzzy sets and fuzzy rough sets [J]. International Journal of Uncertainty, Fuzziness and Knowledge-based Systems, 2003, 10(11): 467 - 494.
- [10] 郭海刚, 高井贵, 张振良. 模糊相似关系下的模糊粗糙集 [J]. 辽宁师范大学学报: 自然科学版, 2006, 29(3): 289 - 291.
- [11] 何亚群, 李继军, 胡寿松. 基于模糊相容关系下的相容模糊粗糙集 [J]. 系统工程学报, 2006, 21(5): 553 - 556.
- [12] 王丽, 冯山. 变精度思想下的模糊粗糙集模型 [J]. 计算机工程与应用, 2006, 42(30): 164 - 166.
- [13] 徐忠印, 廖家奇. 基于覆盖的模糊粗糙集模型 [J]. 模糊系统与数学, 2006, 20(3): 141 - 143.
- [14] PAWLAK Z, SKOWRON A. Rudiments of rough sets [J]. Information Sciences, 2007, 177(1): 3 - 27.
- [15] 申初连. 多重集合的运算研究与应用 [J]. 中南林业科技大学学报, 2007, 27(3): 145 - 147.
- [16] 黄光球, 赵煜. 多重粗糙集模型 [J]. 计算机工程与应用, 2010, 46(14): 53 - 57.

(上接第 3365 页)

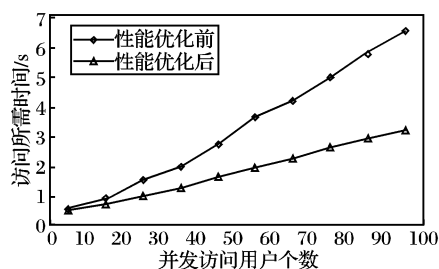


图6 系统压力测试结果

系统 Web service 服务器需要存储票据的信息, 因此使用 Web service 服务器集群时需要注意: 集群中的不同 Server 使用不同的 JVM, 因此放到一个 JVM 中的对象并不能直接被其他 JVM 访问这样的问题。对于这种问题, 解决的方法有两种:

1) 将对象放到 Session 中, 然后集群配置成 Session 复制模式;

2) 使用 Memcache, 将对象放置到 Memcache 中, 然后所有的 Server 都从 Memcache 中去取该对象。相当于开辟了一个公共的内存区域, 大家都可以访问。

### 4 结语

本文构建了一个单点登录, 与传统的单点登录模型相比, 本文提出了一个全新的基于 Web service 的混合架构的单点登录解决方案, 该方案可运用于基于多信任域的分布式环境中,

也适用于同时具有 B/S 架构与 C/S 架构应用的情形, 优化了管理员对用户信息的统一管理, 方便了用户对各应用资源的访问, 提高了用户使用应用资源的效率, 增强了用户访问各站点的安全性, 也为以后集成更多的子应用系统提供了基础。

#### 参考文献:

- [1] PAKER T A. Single sign-on systems — the technologies and the products [EB/OL]. [2010 - 05 - 01]. [http://ce.sejong.ac.kr/~shindk/031\\_gia/xml/IEEE/SSO/Single%20sign-on%20systems-the%20technologies%20and%20the%20products.pdf](http://ce.sejong.ac.kr/~shindk/031_gia/xml/IEEE/SSO/Single%20sign-on%20systems-the%20technologies%20and%20the%20products.pdf).
- [2] 张挺, 耿继. Web 环境下的 SSO 实现模式的研究 [J]. 计算机仿真, 2005, 22(8): 128 - 131.
- [3] IBM, Microsoft. Security in a Web services world: A proposed architecture and roadmap [EB/OL]. [2010 - 03 - 01]. <http://www.ibm.com/developerworks/library/ws-secmap/>, 2002 - 04 - 07.
- [4] 刘润达, 诸云强, 宋佳, 等. 一种简单跨域单点登录系统的实现 [J]. 计算机应用, 2007, 27(2): 288 - 291.
- [5] 邓响, 程小辉. 移动跨域单点登录系统设计 [J]. 计算机工程与设计, 2010, 31(8): 1667 - 1672.
- [6] 李昕, 张军. 面向 Web 服务的 XKMS 模型设计与实现 [J]. 计算机工程与设计, 2010, 31(8): 1738 - 1742.
- [7] 金伟祖, 李平新. 基于 CAS 集群的单点失效问题解决方案 [J]. 计算机工程, 2010, 36(1): 51 - 54.
- [8] 王琦. 基于反向代理的网站群单点登录 [J]. 计算机工程, 2008, 34(14): 138 - 140.