文章编号:1001-9081(2011)01-0104-03　　doi:10.3724/SP.J.1087.2011.00104

基于等量效果的Vague集转化为Fuzzy集的方法

罗　军,钟　毓
(重庆大学 计算机学院,重庆 400044)
(zhongyu85@163.com)

摘　要:当前Vague集转化为Fuzzy集的方法更多是根据直观,而没能详细阐述所基于的原理。为能更好理解Vague集转化为Fuzzy集的过程,考虑将Vague集转化为Fuzzy集模拟为一个最终无弃权票的多轮投票过程,从而构造了一种效果函数的定义,用以表示支持力度。并结合积分第一中值定理的意义提出了一种新的基于等量效果的转化方法,以保证在转化过程中,所关心的总效果没有发生变化。最后结合实例,严格分析了该方法的良好性质以及合理性。

关键词:Fuzzy集;Vague集;效果函数;真/假隶属函数;转化方法
中图分类号: TP18　　**文献标志码**:A

Equivalent effect based method for transforming Vague sets into Fuzzy sets

LUO Jun, ZHONG Yu
(*College of Computer, Chongqing University, Chongqing* 400044, *China*)

Abstract: Current methods about transforming Vague sets into Fuzzy sets are usually based on intuition, and they do not elaborate theory. In order to better understand the transforming process of Vague sets into Fuzzy sets, the process was simulated to be a multi-vote with no abstention at last, so as to put forward a kind of effect function definition to indicate the degree of support. To ensure that the overall effect of interest has not changed in the transformation process, a new method based on conversion of equivalent effect was proposed in view of the first mean value theorem for the integrals. Finally, the good nature and rationality of the method were rigorously analyzed according to the data.

Key words: Fuzzy set; Vague set; effect function; true/false membership function; transformation method

0　引言

Fuzzy集[1]的隶属度函数是一个单一值,不能同时表示支持和反对的证据。为此,Gau等人[2]于1993年提出了Vague集理论。在这一理论中,论域中元素与论域上的集合之间的关系不再是Fuzzy集中的"一定程度上属于"的关系,而是"在一定程度范围内属于"的关系。这种对论域中元素与论域上集合之间关系的新界定,可以描述人们对未知事物的未知性而表现出的思维的不确定性,比模糊集有更强的表达不确定性的能力,进一步加强了对客观世界描述的真实程度。例如$[t_A(u),1-f_A(u)]=[0.4,0.8]$,则$t_A(u)=0.4$,$f_A(u)=0.2$,在投票模型中可解释为10人中,4人赞成,2人反对,4人弃权。

Vague集理论的提出得到许多研究者的关注,Vague集作为Fuzzy集的扩展[3],在处理不确定信息[9]方面具有明显的优势[4],目前该理论在模糊控制、决策、故障诊断、近似推理和医疗诊断等方面取得了较好的应用。但是Vague集在理论上不成熟且存在一定的困难,如Vague集的模糊熵。然而相对于Vague集,Fuzzy集理论发展的相对成熟[5],故考虑将Vague集转化为Fuzzy集不失为一种较好的方法。

本文对当前Vague集转化为Fuzzy集的几种方法进行分析[6-8],说明不足,进而提出一种新的方法,并说明其合理性,再通过实例验证它的有效性。

1　预备知识

定义1　论域U上的一个Fuzzy集A是U上的一个隶属函数$A:U\to[0,1]$,其中$A(x)$表示元素隶属于Fuzzy集A的程度。

定义2　设U是一论域,其中$\forall u\in U$,U中的一个Vague集A用一个真隶属函数$t_A(u)$和一个假隶属函数$f_A(u)$表示,$t_A(u)$是从支持u的证据所导出的u的隶属度下界,$f_A(u)$则是从反对u的证据所导出的u的反对隶属度下界,$t_A(u)$和$f_A(u)$将区间$[0,1]$中一个实数与U中的一个点联系起来,即$t_A:U\to[0,1]$,$f_A:U\to[0,1]$,其中,$t_A(u)+f_A(u)\leq 1$。设为一Vague集,当U是连续时,有$A=\int_U[t_A(u),1-f_A(u)]/u$,$u\in U$;当$U$为离散时,有$A=\sum_{i=1}^{n}[t_A(u_i),1-f_A(u_i)]/u_i$,$u_i\in U$。

定义3　称$u_A(x)$为元素x对Vague集A的精确隶属度。由于人们对事物存在一定的未知性,故$u_A(x)$一般不能被精确认识。

定义4　称$A(x)=[t_A(x),1-f_A(x)]$($A(x)\subseteq[0,1]$)为精确隶属度$u_A(x)$在已有证据下所能确定的最小隶属度范围,又称为元素x对于Vague集A的Vague值。其中$t_A(x)$为元素x对Vague集A的赞成度,$f_A(x)$为元素x对Vague集A的反对度。

定义5　称$\Delta_A(x)=1-t_A(x)-f_A(x)$($0\leq\Delta_A(x)\leq 1$)

收稿日期:2010-06-18;**修回日期**:2010-08-10。
作者简介:罗军(1961-),男,重庆人,副教授,硕士,主要研究方向:数据库、办公系统自动化、语义网、知识管理系统;　钟毓(1985-),男,四川内江人,硕士研究生,主要研究方向:语义网、模糊描述逻辑。

为元素 x 对于 Vague 集 A 的未知度,它表征人们对精确隶属度 $u_A(x)$ 认识的精度,未知度越大,认识的精度越低。

2 当前 Vague 集向 Fuzzy 集转化的方法

2.1 均值法

$\forall A \in V(U)$(其中 $V(U)$ 表示论域 U 上 Vague 集的全体),论域中的任意一个元素 u 的隶属度在区间$[t_A(u),1-f_A(u)]$内,则 u 对 A^F 的隶属度可以记为:

$$u_A^F = t_A(u) + [1 - t_A(u) - f_A(u)]/2 \tag{1}$$

这里 A^F 表示 Vague 集 A 所对应的 Fuzzy 集。

这种方法的特点在于处理问题时显得很简单,但是,在对具体问题的描述时可能会丢掉一些信息。原因是对弃权的人的支持度与反对度的权简单地赋值为 0.5,而忽视了其他支持度与反对度的影响。为此,文献[6]又提出了根据支持度与反对度的比例来确定未知度的倾向。

2.2 比例法

$\forall A \in V(U)$(其中 $V(U)$ 表示论域 U 上 Vague 集的全体),论域中的任意一个元素 u 的隶属度在区间$[t_A(u),1-f_A(u)]$内,则 u 对 A^F 的隶属度可以记为:

$$u_A^F = t_A(u) + [1 - t_A(u) - f_A(u)] \cdot t_A(u)/[t_A(u) + f_A(u)] \tag{2}$$

这里 A^F 表示 Vague 集 A 所对应的 Fuzzy 集。式(2)中的 $1-t_A(u)-f_A(u)$ 为未知度,$t_A(u)/[t_A(u)+f_A(u)]$ 为未知度倾向于支持度的权,且大小被支持度($t_A(u)$)在确定度($t_A(u)+f_A(u)$)中的比例所决定。

在这里可以对式(2)进行化简,得:

$$u_A^F = \frac{t_A(u)}{t_A(u) + f_A(u)} \tag{3}$$

比例法在表达未知度的意义上更合理一些,但在 $t_A(u)=0$ 或 $f_A(u)=0$ 两种情况下却存在问题:当 $t_A(u)=0$ 时,此时 $u_A^F=0$,表明只要支持度为零,无论反对度与未知度为多少,未知度都完全倾向于支持度,即对应 Fuzzy 集的隶属度为0。当 $f_A(u)=0$ 时,此时 $u_A^F=1$,表明只要反对度为0,无论支持度与未知度为多少,未知度都完全倾向于支持度,即对应 Fuzzy 集的隶属度为 1。显然这两种情况都不符合人的直观,此时人的直觉应当是倾向于某种,而非完全倾向。为此,文献[7]提出了分段函数的转化形式。

2.3 分段函数法

$\forall A \in V(U)$,论域 U 中的任意一个元素 u 的隶属度在区间$[t_A(u),1-f_A(u)]$内,则 u 对 A^F 的隶属度为:

$$u_A^F = \begin{cases} t_A(u) + [1 - t_A(u) - f_A(u)] \cdot \dfrac{1 - f_A(u)}{t_A(u) + f_A(u)}, & t_A(u) = 0 \\ t_A(u) + [1 - t_A(u) - f_A(u)] \cdot \dfrac{t_A(u)}{t_A(u) + f_A(u)}, & 0 < t_A(u) \leqslant 0.5 \\ t_A(u) + [1 - t_A(u) - f_A(u)] \cdot \left(0.5 + \dfrac{t_A(u) - 0.5}{t_A(u) + f_A(u)}\right), & 0.5 < t_A(u) \leqslant 1 \end{cases} \tag{4}$$

这里 A^F 表示 Vague 集 A 所对应的 Fuzzy 集。然而此公式也有不足之处,如当 $t_A(u)=0$ 并且 $\frac{3-\sqrt{5}}{2} < f_A(u) < 1$ 时,必有 $u_A^F >1$,与隶属度的定义矛盾。故本文提出一种利用定积分平均值、基于效果的转化方法。

3 等量效果转化方法

为了更加直观地理解 Vague 集向 Fuzzy 集的转化,考虑转化过程是一个多轮投票过程,使得最终必须无弃权票,只存在赞成票与反对票,投票过程才算结束。无论什么转化方法,都是为了让弃权票更加合理地变成赞成票或反对票,但以往三种方法更多地是从直观给出的转化方法,没有详细阐述所基于的原理。现在做一个多轮投票的模拟过程如下。

假设共有 10 名投票人,为便于分析,可以将投票初始状态设为 0 票赞成(等同于赞成度),0 票反对(等同于反对度),10 票弃权(等同于未知度)。假设开始投票过程如下:

第一轮投票结果:5 票赞成,2 票反对,3 票弃权。接下来要求这 3 票弃权票决定该投赞成,还是反对,也可以弃权。既然第一轮选择投弃权票,表明持有这 3 票者本身无倾向性,为此可以认为这 3 票的第二轮选择完全受到第一轮投票结果的影响,从初始状态到第一轮结束,有 5 票赞成票,2 票反对,3 票弃权。然而在实际中,虽然每个投票人都只有一票,但投票人的地位与影响却是有差别的,某些投票人处于较高地位(由于其社会地位,专业背景等)。一个处于较高地位的投票人的支持与反对会较大程度影响到其他尚未做出选择的投票人的投票。

考虑到投票人的潜在影响力,因此赞成票不能完全表达出支持的程度,为此可以定义一种函数,暂且将它命名为效果函数 $g(x)$,从而可以这样理解:效果函数是以赞成度为自变量的函数,$g(x)$ 其值的意义在于当元素 u 的赞成度为 x 时,对 u 属于集合 A^F 的支持效果(0 为最小支持效果,1 为最大支持效果),因此必有 $1 \geqslant g(x) \geqslant x \geqslant 0$,显然,效果函数应该具有如下特征:赞成度为0,支持效果大于等于0;赞成度为1,支持效果为1;赞成度越大,支持效果越大。

另外,还有最重要的一条,当赞成度较小时,效果函数的增加量,犹如"雪中送炭",而当赞成度较大时,效果函数的增加量,犹如"锦上添花",故效果函数的变化率随着赞成度的增加而变小。

根据以上分析,定义 Vague 集的效果函数为满足如下条件的函数。

定义 6　称函数 $g(x):[0,1] \to [0,1]$ 为 Vague 集的效果函数,当其满足如下条件:

(SP_1) $x=0, g(x) \geqslant 0$,即赞成度为0,支持效果大于等于0;

(SP_2) $x=1, g(x)=1$,即赞成度为1,支持效果最大;

(SP_3) $g(x)$ 在区间$[0,1]$为严格单调递增函数,即 $g'(x)>0$,即赞成度越大,支持效果越大。

(SP_4) 在区间$[0,1]$ $g''(x)<0$,即赞成度越大,其所增加效果的变化率越来越小。

在实际情况中,应该根据具体要求,如当前的支持者(即真隶属度)与反对者(即假隶属度)的影响与作用,从而构造一个满足(SP_1)~(SP_4)的合适函数。

任何转化过程,大家关心的是最能体现其特征的量(正如本文中的效果函数)的变化。为此本文提出一种基于等量效果的 Vague 集转化为 Fuzzy 集的方法。

$\forall A \in V(U)$,论域 U 中的任意一个元素 u 的隶属度在区间$[t_A(u),1-f_A(u)]$内,则 u 对 A^F 的隶属度为 u_A^F,且 u_A^F 满足

式(5)：

$$\begin{cases}\int_{t_A(u)}^{1-f_A(u)} g(x)\mathrm{d}x = (1-f_A(u)-t_A(u))\cdot g(u_A^F), \\ \qquad 1-t_A(u)-f_A(u)\neq 0 \\ t_A(u), \qquad 1-t_A(u)-f_A(u)=0\end{cases} \tag{5}$$

A^F 表示 Vague 集 A 所对应的 Fuzzy 集。这里 $g(x)$ 定义为 Vague 集 A 的效果函数，由积分第一中值定理可知 $g(u_A^F)$ 为函数 $g(x)$ 在区间 $[t_A(u),1-f_A(u)]$ 上的平均值，因此式(5)中 u_A^F 表示在隶属度区间 $[t_A(u),1-f_A(u)]$ 内在效果函数意义上的平均值，前后效果未改变。例如，当 $t_A(u)=0.2$，$f_A(u)=0.6$ 时，则在区间[0.2,0.4]上的总支持效果为 $\int_{0.2}^{0.4}g(x)\mathrm{d}x$，由积分第一中值定理，在区间[0.2,0.4]上存在点 ξ，满足 $(0.4-0.2)\cdot g(\xi)=\int_{0.2}^{0.4}g(x)\mathrm{d}x$。即 ξ 具有这样的意义，它的效果是效果函数在区间[0.2,0.4]上的平均支持效果。由以上分析可知，本方法的关键在于根据具体情况，构造一个合适的效果函数。

4 与现有方法的对比分析

本部分内容先构造一个效果函数，$g(x)=2x-x^2$。

定理1 $g(x)$ 满足条件 $(SP_1)\sim(SP_4)$。

证明 (SP_1) 显然当 $x=0$ 时，$g(x)=0$；

(SP_2) 显然当 $x=1$ 时，$g(x)=1$；

(SP_3) 此时 $g'(x)=2(1-x)$，显然在[0,1]内，$g'(x)\geq 0$；

(SP_4) 此时 $g''(x)=-2$，显然 $g''(x)\leq 0$。

故函数 $g(x)=2x-x^2$ 为一个单位效果函数。

将 $g(x)=2x-x^2$ 代入式(5)中得，当一个元素 u 的隶属度在区间 $[t_A(u),1-f_A(u)]$ 内时：

$$u_A^{\mathrm{F}}=\begin{cases}1-\sqrt{1-\dfrac{(1-f_A(u)^2(2+f_A(u))-t_A^2(u)(3-t_A(u))}{3(1-t_A(u)-f_A(u))}}, \\ \qquad 1-t_A(u)-f_A(u)\neq 0 \\ t_A(u), \qquad 1-t_A(u)-f_A(u)=0\end{cases} \tag{6}$$

例1 $\forall A\in V(U)$，设论域 U 中有一个元素 u 的隶属度在区间[0,0.4]内，则 u 对 A^{F} 的隶属度：

1) 均值法求得 $u_A^{\mathrm{F}}=0+(1-0-0.6)/2=0.2$；

2) 比例法求得 $u_A^{\mathrm{F}}=0+(1-0-0.6)\times 0/(0+0.6)=0$；

3) 分段函数法求得 $u_A^{\mathrm{F}}=0+(1-0-0.6)\times 0.4/(0+0.6)=0.267$；

4) 利用等量效果法，代入式(6)中得 $u_A^{\mathrm{F}}=0.192$。

例2 $\forall A\in V(U)$，设论域 U 中有一个元素 u 的隶属度在区间[0.7,1]内，则 u 对 A^{F} 的隶属度：

1) 均值法求得 $u_A^{\mathrm{F}}=0.7+(1-0.7-0)/2=0.85$；

2) 比例法求得 $u_A^{\mathrm{F}}=0.7+(1-0.7-0)\times 0.7(0.7+0)=1$；

3) 分段函数法求得 $u_A^{\mathrm{F}}=0.7+(1-0.7-0)\times\left(0.5+\dfrac{0.7-0.5}{0.7+0}\right)=0.936$；

4) 利用等量效果法，代入式(6)中得 $u_A^{\mathrm{F}}=0.827$。

由结果可知，此时比例法不符合直观感受，可看为投票模型，此时7票支持，0票反对，3票弃权，这三票应该是倾向于投支持票，而非完全倾向于投支持票。然而根据比例法，这三张弃权票却完全投向于支持票。故比例法不符合实际。

例3 $\forall A\in V(U)$，设论域 U 中有一个元素 u 的隶属度在区间[0,0.9]内，则 u 对 A^{F} 的隶属度：

1) 均值法求得 $u_A^{\mathrm{F}}=0+(1-0-0.1)/2=0.45$；

2) 比例法求得 $u_A^{\mathrm{F}}=0+(1-0-0.1)0/(0+0.1)=0$；

3) 分段函数法求得 $u_A^{\mathrm{F}}=0+(1-0-0.1)\times(1-0.1)/(0+0.1)=8.1$；

4) 利用等量效果法，代入式(6)中得 $u_A^{\mathrm{F}}=0.392$。

此时分段函数法显然有问题，$u_A^{\mathrm{F}}=8.1>1$，与 Fuzzy 集定义即定义1矛盾。故分段函数法此时不合理。

并且可以发现，当取 $g(x)=x$ 时，据等量效果法有：

$$u_A^{\mathrm{F}}=\begin{cases}\dfrac{1-f_A(u)+t_A(u)}{2}, & 1-t_A(u)-f_A(u)\neq 0 \\ t_A(u), & 1-t_A(u)-f_A(u)=0\end{cases} \tag{7}$$

显然式(1)与式(7)等价。不难理解，由于此时 $g(x)=x$，即效果与隶属度成完全相等关系，而此时 $g''(x)=0$，说明效果增加的变化率为0，故弃权者未受到支持票与反对票的影响，与实际相符。从另一个方面论证了等量效果法的合理性。

5 结语

本文分析了当前 Vague 集向 Fuzzy 集转化的方法，并发现这些方法都存在一定程度的不足之处：均值法未考虑当前真隶属度与假隶属度对未确定度的影响；比例法对 $t_A(u)=0$ 与 $f_A(u)=1$ 两种极端情况处理都具有完全倾向性，不符合实际；而分段函数法，当 $t_A(u)=0$，$\dfrac{3-\sqrt{5}}{2}<f_A(u)<1$ 时，此时得出必有 $u_A^{\mathrm{F}}>1$，与隶属度的定义矛盾。因此本文在结合现有方法的基础上，提出了一种基于等量效果考虑的转化方法，并建立了一种在不同实际情况下都必须遵循的效果函数的有效定义，来得到效果函数意义下隶属度区间的平均值，使得未确定度受到真隶属度与假隶属度的影响更合理。

参考文献：

[1] ZADEH L A. Fuzzy sets [J]. Information and Control, 1965, 8(3): 338 - 353.

[2] GAU W-L, BUEHRER D J. Vague sets [J]. IEEE Transactions on Systems, Man and Cybernetics, 1993, 23(2): 610 - 614.

[3] 徐久成, 安秋生, 王国胤, 等. 边界不确定信息的处理——Fuzzy集和 Vague 集[J]. 计算机工程与应用, 2002, 38(16): 24 - 26, 82.

[4] 马志锋, 刑汉承, 郑晓妹. 不完整 Vague 决策表中的近似学习方法[J]. 计算机研究与发展, 2000, 37(9): 1050 - 1057.

[5] LI D, CHENG C. New similarity measures of intuitionistic fuzzy sets and applications to pattern recognition[J]. Pattern Recognition Letters, 2002, 23(1/3): 221 - 225.

[6] 李凡, 吕泽华, 蔡立晶. 基于 Fuzzy 集的 Vague 集的模糊熵[J]. 华中科技大学学报: 自然科学版, 2003, 31(1): 1 - 3.

[7] 林志贵, 刘英平, 徐立中, 等. 模糊信息处理中 Vague 集向模糊集转化的一种方法[J]. 计算机工程与应用, 2004, 40(9): 24 - 25, 45.

[8] 李凡, 卢安, 余智. 一类 Vague 集模糊熵的构造方法[J]. 华中科技大学学报, 2001, 29(9): 1 - 2.

[9] 谢季坚, 刘承平. 模糊数学方法及其应用[M]. 武汉: 华中科技大学出版社, 2006.