

文章编号:1001-9081(2011)02-0386-04

doi:10.3724/SP.J.1087.2011.00386

## 基于邻域 Mean-Shift 的彩色图像滤波算法

何希平

(重庆工商大学 计算机科学与信息工程学院, 重庆 400067)

(jsjhxp@ctbu.edu.cn)

**摘要:**在空间域与色彩域中分别给定移动窗口半径的适当值,把空间位置处于当前数据点的圆邻域内的色彩数据作为算法的样本数据,利用窗口半径固定且独立于空间位置的核函数对色彩数据进行均值偏移(Mean-Shift)聚类,用聚类中心更新当前位置的图像数据,克服了空间域与色彩域结合的Mean-Shift图像滤波模型窗口半径难于恰当选取以适应图像尺寸变化的困难。实验证明了该算法的有效性。

**关键词:**彩色图像滤波; Mean-Shift 算法; 空间域; 色彩域; 窗口半径

中图分类号: TP301.6;TP391.41 文献标志码:A

## Color image filtering algorithm based on neighborhood Mean-Shift

HE Xi-ping

(College of Computer Science and Information Engineering, Chongqing Technology and Business University, Chongqing 400067, China)

**Abstract:** Given proper values of shift windows in spatial domain and color domain respectively, the color data were filtered by means of Mean-Shift clustering, during which the color data in the r-circular neighboring domain of current data point were used as the clustering samples. Then image data at current position were updated with the cluster center newly obtained. This algorithm overcomes the difficulty to choose proper window radius for the model of Mean-Shift filtering combining spatial domain and color domain to adopt the possible variation of image size. Finally, the experimental results verify the validity of Mean-Shift filtering.

**Key words:** color image filtering; Mean-Shift algorithm; spatial domain; color domain; window radius

### 0 引言

特征数据滤波一直是计算机视觉领域的重要研究课题之一,而统计建模方法是其最常见的实用技术。其中,无参数概率密度估计相对于用含参数函数对特征数据建模具有明显的优越性:不必事先知道特征空间数据服从的概率分布函数的形式,能较好地适应实际的计算机视觉问题所涉及的密度分布函数多变量、多峰的特点;以特征数据统计分布为匹配依据,估计结果收敛于数据,不会出现大偏差。常见的无参数估计技术有直方图法、最近邻域法和核密度估计法。核密度估计和直方图技术类似,相对于直方图法,多了一个用于平滑数据的核函数。

Mean-Shift 算法是一种计算机视觉领域优秀的密度梯度的无参数估计方法,由 Fukunaga 和 Hostetler 于 1975 年提出<sup>[1]</sup>,但直到 1995 年 Cheng 将它引入计算机视觉领域才引起国内外学者们的广泛兴趣。在文献[2]中,Cheng 对基本的 Mean-Shift 算法做了推广:首先,Cheng 定义了一族核函数,使得随着样本与被偏移点的距离不同,偏移量对均值偏移向量的贡献也不同;其次,Cheng 还设定了一个权重系数,使得不同的样本点重要性不一样,扩大了 Mean-Shift 的适用范围。

Comaniciu 和 Meer 等人<sup>[3-5]</sup>对 Mean-Shift 算法在图像滤波、分割和跟踪中的应用都做了较早的研究。近年来,Mean-Shift 算法作为一种快速收敛的统计迭代算法,已广泛应用于

计算机视觉领域,如模式识别与聚类分析<sup>[2]</sup>、特征空间分析<sup>[5]</sup>、图像分割<sup>[8-10]</sup>、滤波<sup>[11]</sup>、信息融合<sup>[12]</sup>等。对 Mean-Shift 的应用研究,在目标跟踪领域国内外研究者<sup>[3-7]</sup>最多,而跟踪目标大小随时间发生变化时核函数窗口半径的自适应技术是目前的研究热点<sup>[7,13-14]</sup>。

对 Mean-Shift 图像滤波的研究不多,仅文献[11]在空间位置与色彩数据组合形成的高维图像数据空间利用均匀核函数对图像滤波做了研究,但对于高维特征空间,该方法计算量相当大,且因图像尺寸的差异,要合理平衡空间位置与色彩值对均值偏移向量的计算结果的影响权重,也不宜用统一的核函数窗口半径及收敛容差进行迭代计算,对空间位置与色彩值使用统一的密度估计核函数也是不太恰当的。文献[15]对空间位置与色彩分别选择核函数,但大大增加了计算时间复杂性。

本文给出一种基于邻域 Mean-Shift 聚类的彩色图像滤波算法,在空间域与色彩域中分别给定移动窗口半径的适当值,把空间位置处于当前数据点的圆邻域内的色彩数据作为算法的样本数据,利用窗口半径固定且独立于空间位置的核函数对色彩数据进行 Mean-Shift 聚类,用聚类中心更新当前位置的图像数据,克服了空间域与色彩域结合的 Mean-Shift 图像滤波模型中窗口半径难于恰当选取以适应图像尺寸变化的困难,算法对目标旋转和缩放都有了一定的适应能力;同时也由于只用了一个核函数,致使迭代计算的时间复杂性大大降低。

收稿日期:2010-08-16。 基金项目:重庆市教育委员会科学技术研究项目(KJ090728)。

作者简介:何希平(1968-),男,四川射洪人,教授,博士,主要研究方向:计算机视觉、模式识别、信息安全。

## 1 滤波与特征数据处理

在 Mean-Shift 滤波迭代计算中,邻域空间信息与邻域像素色彩分布信息是判识像素是否噪声的重要依据,也是决定 Mean-Shift 向量收敛方向的重要信息。针对彩色图像滤波问题,特征数据不仅要包含目标像素的色彩数据,而且必须包含与目标像素的色彩数据耦合的空间信息数据。

### 1.1 图像数据空间

彩色图像数据空间可表示为  $I = \{x_i = (s_i, c_i) \mid s_i \in S \subset N^2, c_i \in C^3, C = \{0, 1, 2, \dots, 255\}, i=1, 2, 3, \dots, n\}$ 。其中,  $s_i$  表示第  $i$  像素的空间坐标,  $c_i$  表示第  $i$  像素的色彩数据,  $C^3$  表示算法选择的色彩空间(如 RGB, YCbCr, HSV, L\* a\* b\* 等)。特别地,对于灰度图像,  $C^3 = L$ , 图像函数  $g(s)$  可表示为:

$$\begin{cases} \forall s \in S \\ g(s) = c \in C^3 \end{cases} \quad (1)$$

其中  $S$  与  $C^3$  分别表示图像数据空间域与色彩域。

### 1.2 滤波与数据邻域

由于图像  $g(s)$  在有限邻域内的连续性,滤波算法只需在数据空间中目标数据的一个有限邻域内对色彩数据进行统计分析。因此首先应综合权衡统计分布的客观性要求和计算复杂性适当降低要求,选择大小适当的空间邻域半径  $r$ ,  $r$  可以不受制于图像大小,而是一个相对客观的常量;其次,要在目标邻域  $I_{s,r}$  内根据色彩密度分布对目标按式(3)进行估计。

$$I_{s,r} = \{(s, c) \mid (s, c) \in I, s \in U(s, r) \subset S\} \quad (2)$$

$$(\hat{s}, \hat{c}) = f(I_{s,r}) \quad (3)$$

其中:  $U(s, r)$  表示以空间位置  $s$  为中心  $r$  为半径的圆邻域,  $f$  为特定滤波算法。

设  $C_{s,r} = \{c \mid (s, c) \in I_{s,r}\}$ , 本文滤波算法是按式(4)基于 Mean-Shift 的邻域色彩的聚类算法估算的。

$$(s, \hat{c}) = ms(I_{s,r}) = Cluster(C_{s,r}) \quad (4)$$

## 2 Mean-Shift 滤波算法

### 2.1 Mean-Shift 算法原理

给定  $d$  维空间  $\mathbf{R}^d$  上  $n$  个数据点的集合  $X = \{\mathbf{x}_i\}_{i=1, 2, \dots, n}$ , 其未知概率密度函数为  $p(\mathbf{x})$ ,  $K(\mathbf{x})$  为多元核密度估计函数简称核函数, 窗口半径(也称为带宽)为  $h$ , 则在  $\mathbf{x}$  点的概率密度估计(又名 Pazen 窗估计)可表示为:

$$\hat{P}(\mathbf{x}) = \frac{1}{nh^d} \sum_{i=1}^n K\left(\frac{\mathbf{x} - \mathbf{x}_i}{h}\right) \quad (5)$$

核函数  $K(\mathbf{x})$  是对称、单峰和有限局部支撑的。所谓单峰的是指从中心向边缘其值迅速衰减为 0; 而有限局部支撑指超过一定窗口的点其值为 0。核函数都遵循以下的基本性质。

- 1) 非负性:  $\forall \mathbf{x} \in \mathbf{R}^d, K(\mathbf{x}) \geq 0$ 。
- 2) 规范性:  $\int_{\mathbf{R}^d} K(\mathbf{x}) d\mathbf{x} = 1$ 。
- 3) 对称性:  $\int_{\mathbf{R}^d} \mathbf{x} K(\mathbf{x}) d\mathbf{x} = 0$ 。
- 4) 指数权衰减性:  $\lim_{\|\mathbf{x}\| \rightarrow \infty} \|\mathbf{x}\|^d K(\mathbf{x}) = 0$ 。

利用核函数的可微性,由密度梯度估计恒等于核密度估计的梯度,对式(5)取梯度,令  $g(\mathbf{x}) = -k'(\mathbf{x})$ (称为  $k(\mathbf{x})$  的影子)有:

$$\begin{aligned} \nabla \hat{P}_{h,g}(\mathbf{x}) &= \frac{2c_{k,d}}{nh^{d+2}} \sum_{i=1}^n (\mathbf{x} - \mathbf{x}_i) k'\left(\left\|\frac{\mathbf{x} - \mathbf{x}_i}{h}\right\|^2\right) = \\ &\frac{2c_{k,d}}{nh^{d+2}} \left[ \sum_{i=1}^n g\left(\left\|\frac{\mathbf{x} - \mathbf{x}_i}{h}\right\|^2\right) \right] \left[ \frac{\sum_{i=1}^n \mathbf{x}_i g\left(\left\|\frac{\mathbf{x} - \mathbf{x}_i}{h}\right\|^2\right)}{\sum_{i=1}^n g\left(\left\|\frac{\mathbf{x} - \mathbf{x}_i}{h}\right\|^2\right)} - \mathbf{x} \right] \quad (6) \end{aligned}$$

式(6)暗示了 Mean-Shift 核密度估计算法,令

$$\hat{P}_{h,g}(\mathbf{x}) = \frac{c_{g,d}}{nh^d} \sum_{i=1}^n g\left(\left\|\frac{\mathbf{x} - \mathbf{x}_i}{h}\right\|^2\right) \quad (7)$$

$$\begin{aligned} m_{h,g}(\mathbf{x}) &= \frac{\sum_{i=1}^n \mathbf{x}_i g\left(\left\|\frac{\mathbf{x} - \mathbf{x}_i}{h}\right\|^2\right)}{\sum_{i=1}^n g\left(\left\|\frac{\mathbf{x} - \mathbf{x}_i}{h}\right\|^2\right)} - \mathbf{x} = \\ &\frac{1}{2} h^2 c \frac{\nabla \hat{P}_{h,g}(\mathbf{x})}{\hat{P}_{h,g}(\mathbf{x})} \quad (8) \end{aligned}$$

其中:  $c_{g,d}$  为归一化常数,  $c = c_{k,d}/c_{g,d}$ 。通过反复迭代:

$$y_{k+1} = y_k + m_{h,g}(y_k) \quad (9)$$

$m_{h,g}(\mathbf{x})$  构成快速收敛于 0 的局部均值偏移向量,而局部均值朝附近数据样本密集的区域移动,如图 1 所示。

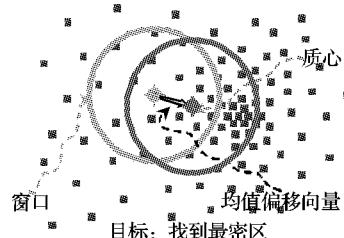


图 1 均值偏移算法的直观描述

Mean-Shift 算法用于在特征空间搜索“模式(mode)”或数据分布的最高密度点。Mean-Shift 迭代算法的一般步骤如下:

- 1) 初始化随机种子和搜索窗口;
- 2) 计算窗口质心(均值);
- 3) 平移搜索窗口到均值;
- 4) 重复第 2)、3) 步直到局部均值收敛。

### 2.2 核密度函数窗口尺度选择

核密度函数窗口尺度选择是一个非常重要的问题,选择策略非常值得考究。 $h$  过小,导致密度参差不齐; $h$  过大,导致数据的过度平滑。对于归一化数据, $h$  的最佳选择取决于样本容量  $n$ 。 $n$  越小,核函数越宽; $n$  越大,核函数越窄,  $\lim_{n \rightarrow \infty} h(n) = 0$ 。

最佳核函数与最佳窗口尺度选择可以通过最小化误差平方的积分的平均值实现——假如知道密度函数,通常可参考如下准则:

$$h_{opt} = \left(\frac{4}{3n}\right)^{\frac{1}{5}} \sigma \approx 1.06 \hat{\sigma} n^{-\frac{1}{5}} \quad (10)$$

### 2.3 图像滤波

为充分参照目标近邻像素的色彩分布对目标像素估计的影响权重,选用高斯轮廓函数:

$$k(\mathbf{x}) = e^{-\frac{1}{2}x^2}; x \geq 0 \quad (11)$$

$$\text{则: } g(x) = k'(x) = -\frac{1}{2}e^{-\frac{1}{2}x}; x \geq 0 \quad (12)$$

在目标像素  $(s, r)$  的邻域  $I_{s,r}$  中对色彩域  $C_{s,r} \subset C^3$  中数据以  $c$  为初始中心进行 Mean-Shift 聚类。用于彩色图像滤波的算法实现步骤如下。

- 1) 给定邻域半径  $r$  与核窗半径  $h$ , 令  $i=1$ 。
- 2) 对  $x_i \in I$ , 令  $x=x_i=(s, c)$  根据  $I_{s,r}$  确定  $C_{s,r}$ 。
- 3) 迭代计算。通过核函数计算窗口所覆盖的色彩域  $C_{s,r}$  的质心(均值)  $c'$ 。

$$c' = \frac{\sum_{c_k \in C_{s,r}} c_k g\left(\left\|\frac{c - c_k}{h}\right\|^2\right)}{\sum_{c_k \in C_{s,r}} g\left(\left\|\frac{c - c_k}{h}\right\|^2\right)} \quad (13)$$

当  $|c - c'| \geq \varepsilon$  时, 令  $c=c'$  反复计算式(13)。

- 4) 令  $x_i = (s, c')$ ,  $i=i+1$ 。
- 5) 当  $x_i \in I$  时, 重复 2) ~ 4), 直到遍历图像数据集  $I$ 。

### 3 实验与结果分析

对算法实验效果的分析, 可以通过对比分析图像的直观效果、峰值信噪比(Peak Signal-to-Noise Ratio, PSNR)、相似系数等实现。借助于向量夹角的余弦, 用式(14)计算两幅图像的相似度  $R$ 。

$$R = \cos \theta = \frac{I \cdot \hat{I}}{\|I\| \cdot \|\hat{I}\|} \quad (14)$$

对多幅不同尺寸的彩色图像做了多次滤波实验, 并从直观效果和定量分析两个方面验证了本文算法的有效性。

#### 3.1 实验结果

实验时, 首先对原图像添加了高斯白噪声(均值 0, 标准差 10), 然后取 Mean-Shift 滤波的邻域半径  $r$  为 5, 颜色核函数窗口半径 25, 实验统计结果见表 1。

表 1 实验统计数据表

图像	大小	$PSNR_1$	$PSNR_2$	$R_0$	$R_1$
lena.bmp	$512 \times 512$	13.6847	13.8094	0.9989	0.9971
peppers.jpg	$512 \times 512$	12.4954	12.5955	0.9987	0.9966
oldmill.jpg	$512 \times 512$	12.9720	12.9974	0.9964	0.9940
car.jpg	$352 \times 288$	11.2328	11.2878	0.9988	0.9962

对应于表 1 中数据的直观图如图 2 所示。

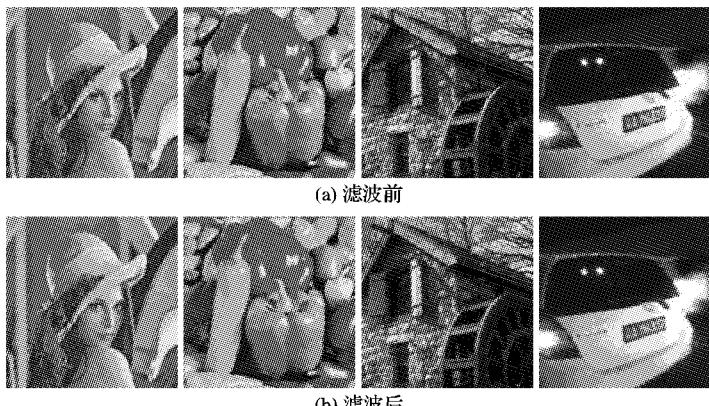


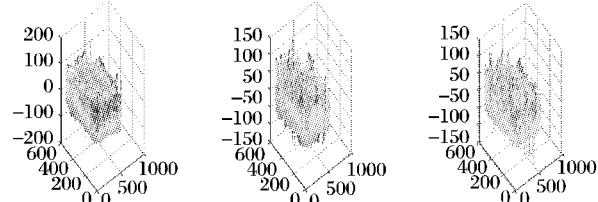
图 2 滤波前后效果对比图

表 1 中,  $PSNR_1$  与  $PSNR_2$  分别表示噪声图像与结果图像的峰值信噪比,  $R_0$  表示原图与滤波结果图像的相似性系数,  $R_1$  表示噪声图像与滤波结果图像的相似性系数。

为准确分析噪声图与滤波结果图的差别, 求了两图的差, 并在直角坐标系下做出了直观图, 如图 3 所示。

同时, 为将本文算法与其他滤波算法对比, 本文选择了与高斯低通滤波算法进行对比实验(高斯滤波器标准差也取 10), 结果如图 4 及表 2 所示。

表 2 中,  $R_0$  表示原图与滤波结果图像的相似性系数,  $R_1$  表示噪声图像与滤波结果图像的相似性系数。



(a) 红色平面颜色偏差 (b) 绿色平面颜色偏差 (c) 蓝色平面颜色偏差  
图 3 Lena 图三色平面滤波前后的差图

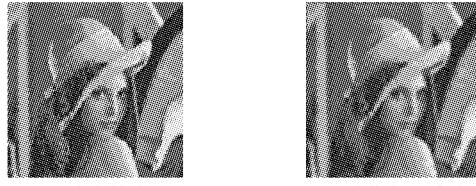


图 4 Lena 图滤波结果对比

表 2 Lena 图实验结果对比统计数据表

滤波算法	邻域半径	$PSNR$	$R_0$	$R_1$
Mean-Shift	5	13.8094	0.9989	0.9971
高斯低通	5	13.0677	0.9949	0.9924

#### 3.2 结果分析

由直观效果图及  $PSNR$ 、相似系数的对比可见, Mean-Shift 滤波算法不仅能有效抑制噪声, 提高图像质量, 而且还能保持滤波结果图与原图的高度相似性, 与其他滤波算法相比, 能更好地保持图像细节(如不连续性)不被模糊。

此外, 本文对算法随核函数窗口半径的变化的效果也做了对比实验。结果发现, 核函数窗口半径  $h$  取值越大, 滤波结果图越模糊, 但变化不显著;  $h$  取值越小, 滤波结果图相对于噪声图的变化越不明显。邻域半径  $r$  越大, 算法耗时变化不明显, 但会引起结果稍微变模糊。

由于 Mean-Shift 滤波是基于密度梯度最大变化方向分析的统计方法, 虽然从效果角度看, 具有明显的优势, 但是其时间效率仍然不如传统的邻域均值滤波器, 这在一定程度上限制了它的实时应用推广。

### 4 结语

本文算法综合了邻域均值平滑与局部最优解的特性, 用局部收敛的最大密度数据作为滤波结果, 既平滑了尖峰噪声, 又降低了 Mean-Shift 滤波算法的时间复杂性, 克服了均值滤波器与高斯滤波器使图像变模糊

并不保持区域边缘特征的不连续性的缺陷,在高精确度的图像处理中具有明显的应用推广意义。

#### 参考文献:

- [1] FUKANAGA K, HOSTETLER L. The estimation of the gradient of a density function, with applications in pattern recognition [J]. IEEE Transactions on Information Theory, 1975, 21(1): 32–40.
- [2] CHENG YIZONG. Mean-Shift, mode seeking and clustering [J]. IEEE Transactions on Pattern Analysis and Machine Intelligence, 1995, 17(8): 790–799.
- [3] COMANICIU D, RAMESH V, MEER P. Real-time tracking of non-rigid objects using Mean-Shift [C]// Proceedings of IEEE Conference on Computer Vision and Pattern Recognition. Washington, DC: IEEE Computer Society, 2000: 142–149.
- [4] COMANICIU D, RAMESH V. Mean-Shift and optimal prediction for efficient object tracking [C]// Proceedings of the IEEE International Conference on Image Processing. Washington, DC: IEEE Computer Society, 2000: 70–73.
- [5] COMANICIU D, MEER P. Mean-Shift: A robust approach towards feature space analysis [J]. IEEE Transactions on Pattern Analysis and Machine Intelligence, 2002, 24(5): 603–619.
- [6] COLLINS R T. Mean-Shift blob tracking through scale space [C]// Proceedings of the Conference on Computer Vision and Pattern Recognition. Washington, DC: IEEE Computer Society, 2003: 18–20.
- [7] 彭宁嵩, 杨杰, 刘志, 等. Mean-Shift 跟踪算法中核函数窗宽的自动选取 [J]. 软件学报, 2005, 16(9): 1542–1550.
- [8] 陈允杰, 张建伟, 王利, 等. 基于改进的 Mean-Shift 算法虚拟人脑图像分割 [J]. 计算机辅助设计与图形学学报, 2008, 20(1): 55–60.
- [9] 汤杨, 潘志庚, 汤敏, 等. 基于分级 Mean-Shift 的图像分割算法 [J]. 计算机研究与发展, 2009, 46(9): 1424–1431.
- [10] 廖建勇, 郭斯羽, 黄梓效. 基于 Mean-Shift 聚类的最大熵图像分割方法 [J]. 计算机仿真, 2009, 26(9): 187–189.
- [11] COMANICIU D, MEER P. Mean-Shift analysis and applications [C]// Proceedings of the IEEE International Conference on Computer Vision. Washington, DC: IEEE Computer Society, 1999: 1197–1203.
- [12] COMANICIU D. Nonparametric information fusion for motion estimation [C]// Proceedings of the IEEE Conference on Computer Vision and Pattern Recognition. Washington, DC: IEEE Computer Society, 2003: 59–66.
- [13] 覃剑, 曾孝平, 李勇明. 基于边界力的 Mean-Shift 核窗宽自适应算法 [J]. 软件学报, 2009, 20(7): 1726–1734.
- [14] 耿振伟, 粟毅, 郁文贤. 一种快速自适应的均值漂移聚类算法 [J]. 信号处理, 2009, 25(1): 153–156.
- [15] SUBBARAO R, MEER P. Nonlinear Mean-Shift over riemannian manifolds [J]. International Journal of Computer Vision, 2009, 84(1): 1–20.

(上接第 385 页)

所以不论是从图像的质量还是从保边缘平滑的结果, 改进方法比 LIP\_TV 方法都有很大程度的提高。

#### 4 结语

基于偏微分方程的图像去噪方法是近年来研究的热点, 而基于 LIP 的偏微分方程去噪方法还很少有人研究, 本文对当前优秀的 LIP\_TV 方法进行改进。该改进方法有如下优点:

1) 将 4 方向导数信息引入到 LIP 梯度算子中, 得到了一个新的 LIP 梯度算子, 对图像的信息度量更加客观全面, 从而更好地控制扩散过程;

2) 通过对保真项系数进行改进, 进一步保持了图像的边缘细节并避免了人为地估计噪声水平。理论分析和实验结果均表明, 改进方法既能充分抑制噪声, 又能更好地保持图像边缘细节特征, 在视觉效果和客观评价指标上都具有明显优势。

#### 参考文献:

- [1] PERONA P, MALIK J. Scale space and edge detection using anisotropic diffusion [J]. IEEE Transactions on Pattern Analysis and Machine Intelligence, 1990, 12(7): 629–639.
- [2] RUDIN L, OSHER S, FATEMI E. Nonlinear total variation based noise removal algorithms [J]. Physica D, 1992, 60(1/4): 259–268.
- [3] 贾迪野, 黄凤岗, 苏茜. 一种新的基于高阶非线性扩散的图像平滑方法 [J]. 计算机学报, 2005, 28(5): 882–891.
- [4] 陈波, 张立伟. 对称四阶偏微分方程去噪算法 [J]. 计算机工程, 2008, 34(13): 188–189.

- [5] 杜宏伟. 基于偏微分方程的图像去噪综合模型 [J]. 计算机工程与应用, 2008, 44(20): 198–201.
- [6] 蒋伟, 胡学刚. 一种基于 LIP 的 PDE 图像复原新模型 [J]. 计算机应用, 2008, 28(6): 1520–1522.
- [7] JOURLIN M, PHINOLI J C. A model for logarithmic image processing [J]. Mierose, 1988, 149(1): 22–35.
- [8] 谢美华. 基于四方向导数信息的图像非线性扩散去噪 [J]. 红外技术, 2004, 26(6): 51–53.
- [9] PINOLI J C. Modelisation and traitement des images logarithmiques: Theorie et applications fondamentales, Report No. 6 [R]. Saint-Etienne: University of Saint-Etienne, Department of Mathematics, 1992.
- [10] ANDERSON G L, NETRAVALI A N. Image restoration based on a subjective criterion [J]. IEEE Transactions on System, Man and Cybernetics, 1976, SMC-6: 845–853.
- [11] KARUILASEKERA S A, KINGSBURY N G. A distortion measure for blocking artifacts in images based on human visual sensitivity [J]. IEEE Transactions on Image Processing, 1995, 4(6): 713–724.
- [12] 陈一虎, 叶正麟. 一种改进的各向异性扩散图像去噪方法 [J]. 计算机工程与应用, 2008, 44(13): 170–172.
- [13] 余庆军, 谢胜利. 基于人类视觉系统的各向异性扩散图像平滑方法 [J]. 电子学报, 2004, 32(1): 17–20.
- [14] KATSAGGELOS A K, BIEMOND J, SCHAFER R W, et al. A regularized iterative image restoration algorithm [J]. IEEE Transactions on Signal Processing, 1991, 39(4): 914–929.