文章编号:1001 - 9081(2005)04 - 0757 - 03

基于图像分解的多核非线性扩散去噪方法

谢美华,王正明
(国防科学技术大学 数学与系统科学系,湖南 长沙 410073)
(Xmhdjh@163.com)

摘 要:研究了一种基于图像分解的多核非线性扩散去噪方法,利用两个非线性扩散模型分别提取图像的主信号和细节信息。先建立一个基于边缘定向的非线性扩散模型,实现对图像的主信号的提取。然后利用 P-M 扩散方程提取残余图像中的高频信号。将两步处理得到的信号进行合成,得到最后的处理结果。该方法能充分利用各个不同模型的优势,在整幅图像上均具有较好的处理效果。仿真计算结果表明,经该方法处理后的图像与现有的非线性扩散去噪方法相比,其噪声抑制更充分、边缘更清晰、峰值信噪比更高。

关键词:非线性扩散;图像分解;多核;去噪
中图分类号: TP391.41 **文献标识码**:A

Multi-kernel nonlinear diffusion model for denoising based on image decomposition

XIE Mei-hua, WANG Zheng-ming
(*Department of Mathematics and System Sciences, National University of Defense Technology, Changsha Hunan* 410073, *China*)

Abstract: A multi-kernel nonlinear diffusion model for image denoising based on image decomposition was studied, which got the major signal and the minutiae through different models. First, a edge-directed nonlinear diffusion model was put forward, which was used to get the major signal of image. Then P-M diffusion equation was used to get the high frequency signal of image from the remnant image. At last, the major signal and the minutiae were added to get the denoised image. The method can exert the merits of different models to get good results on the whole image. Simulation results show that, compared with the known methods, the model can remove noise more efficiently, keep edges more clearly, and it also has higher peak signal to noise ratio.

Key words: nonlinear diffusion; image decomposition; multi-kernel; denoising

0 引言

在大多数图像处理中,常用零均值高斯白噪声作为图像的噪声模型,据此,本文只考虑加性的零均值高斯白噪声。传统的图像去噪方法,如高斯滤波、中值滤波等,主要将图像的高频成分滤除。由于图像的细节如边缘纹理等也分布在高频区域,所以总是在滤除噪声的同时模糊了图像的边缘。近年来,偏微分扩散方程已大量应用于图像去噪,取得了较好的效果[1-8]。此类方法将去噪过程用一个随时间演化的扩散方程描述,通过调整扩散系数来解决边缘模糊和噪声去除之间的矛盾,包括各向同性和各向异性扩散[1-3],低阶扩散与高阶扩散等。但是,非线性扩散模型应用于图像去噪时,常存在模型对信号特征的适应性问题,如均曲率运动模型适用于平坦图像,而 P-M 扩散则能较好的处理含较多边缘的图像,但须在边缘区域与平坦区域的处理之间取折中,这种折中常导致图像的整体质量下降,使图像的边缘不够清晰,噪声抑制不充分。

1 图像去噪的非线性扩散模型

令 $u_0(x,y)$ 表示一个含噪的灰值图,一种对 u_0 去噪的方法是求解式(1)能量函数的极小值:

$$E(g) = \frac{\lambda}{2}\iint_{\Omega}(u-u_0)^2\mathrm{d}x\mathrm{d}y + \iint_{\Omega}\rho(|u_x^2+u_y^2|^2)\mathrm{d}x\mathrm{d}y \quad (1)$$

其中 λ 为正则化参数,Ω 为图像的支撑域。(1)式中的前一项用以约束去噪图像与原图像的逼近程度,后一项用以约束图像的光滑程度,若考虑图像的二阶导数,则可将(1)扩展为:

$$E(g) = \frac{\lambda}{2}\iint_{\Omega}(u-u_0)^2\mathrm{d}x\mathrm{d}y + \iint_{\Omega}\rho_1(|u_x^2+u_y^2|)\mathrm{d}x\mathrm{d}y + \iint_{\Omega}\rho_2(|u_{xx}+u_{yy}|)\mathrm{d}x\mathrm{d}y \quad (2)$$

对极值问题(1)和(2),应用 Eluer 方程,用最速下降法求解,可得如下偏微分发展方程:

$$\partial_t u = F[u(x,y,t)] \quad (3)$$

其中 $u(x,y,t)$ 是随时间演化的图像,F 表示一个特定算法所对应的算子。根据 F 定义的不同可分为线性扩散、非线性扩散、各向异性扩散等。其中,二阶线性扩散方程的模型为[3]:

$$\begin{cases}\partial_t u = C\Delta u \\ u(x,y,0) = u_0(x,y)\end{cases} \quad (4)$$

收稿日期:2004 - 08 - 31;**修订日期**:2004 - 11 - 06
基金项目:国家自然科学基金资助项目(60272013);全国优秀博士论文作者专项基金资助项目(200140)
作者简介:谢美华 (1976 -),女,湖南宁乡人,博士研究生,主要研究方向:图像处理; 王正明 (1962 -),男,湖南长沙人,教授,博士生导师,主要研究方向:图像处理.

这里扩散系数 C 为常数。利用线性方程去噪等价于图像的高斯光滑。二阶非线性扩散方程模型为[4]：

$$\begin{cases}\partial_t u = \mathrm{div}(C(|\nabla u|)\nabla u) \\ u(x,y,0) = u_0(x,y)\end{cases} \tag{5}$$

此时，扩散系数 C 是关于梯度 $|\nabla u|$ 的减函数，P-M 扩散方程中 C 定义为：

$$C(x) = l^2/(l^2 + x^2) \tag{6}$$

使用类似(4)、(5)的二阶扩散方程去噪常常出现“块状”效果，影响图像的视觉质量。为此有人定义了如下四阶扩散方程：

$$\partial_t u = \Delta[g(|\Delta u|)\Delta u] \tag{7}$$

式(7)能较好地解决“块状”效应的问题，但在平坦区域的噪声抑制能力较差，且收敛速度慢。

2 基于图像分解的多核非线性扩散模型

2.1 基于边缘定向的非线性扩散模型

边缘是图像中最重要的特征，图像的细节信息通常体现在图像的边缘区域上，图像去噪中最棘手的问题就是去噪过程中对边缘的保持问题。事实上，在边缘区域和非边缘区域的交接部分存在一个梯度场，因此，如果从边缘区域穿到非边缘区域中去，其灰度值会出现显著的落差和振荡。从而，在去噪过程中，若沿高频方向(穿越边缘)进行去噪，则会在一定程度上平滑掉这些边缘和纹理特征，而沿低频方向(沿边缘方向)进行去噪就不会平滑掉这些高频信息。因此，要较好的保持边缘就必须做到在图像的边缘区域沿边缘方向去噪。

令 $\xi = \dfrac{\nabla u}{|\nabla u|}$ 是梯度方向的单位向量，η 是与 ξ 垂直的单位向量，即：

$$\xi = \frac{1}{\sqrt{u_x^2 + u_y^2}}\begin{pmatrix}u_x \\ u_y\end{pmatrix} \qquad \eta = \frac{1}{\sqrt{u_x^2 + u_y^2}}\begin{pmatrix}-u_y \\ u_x\end{pmatrix} \tag{8}$$

容易推出：

$$u_{\xi\xi} = \frac{u_{xx}u_x^2 + 2u_x u_y u_{xy} + u_{yy}u_y^2}{u_x^2 + u_y^2}$$
$$u_{\eta\eta} = \frac{u_{xx}u_y^2 - 2u_x u_y u_{xy} + u_{yy}u_x^2}{u_x^2 + u_y^2} \tag{9}$$

且有：

$$u_{\xi\xi} + u_{\eta\eta} = u_{xx} + u_{yy}$$

于是二阶线性扩散模型(4)就可表示为：

$$\begin{cases}\partial_t u = C(u_{\xi\xi} + u_{\eta\eta}) \\ u(x,y,0) = u_0(x,y)\end{cases} \tag{10}$$

显然模型(10)作为一种各向同性扩散没有反映出沿边缘方向与沿梯度方向扩散系数的差别。而传统的均曲率运动模型定义的模型为：

$$\partial_t u = u_{\eta\eta} \tag{11}$$

这一模型在整幅图像上均沿边缘方向扩散，反映出了沿不同方向扩散系数不同的思想，但是它的设计仍存在问题。事实上，按(8)式，在图像的每个像素点处总存在一个边缘方向和一个梯度方向，但是一般而言，在图像的平坦区域得到的边缘方向并不真实存在，此时仍仅沿边缘方向扩散无疑会导致在平坦区域的噪声抑制不充分，甚至出现虚假边缘。正确的做法应该在图像的平坦区域沿边缘方向和梯度方向的扩散系数均应取得大，而在图像的边缘区域则沿边缘方向应当具有较大的扩散系数，而垂直边缘方向应当具有很小的扩散系数，因此，可建立如下基于边缘定向的非线性扩散模型：

$$u_t = \alpha(|\nabla u_\sigma|)u_{\xi\xi} + \beta(|\nabla u_\sigma|)u_{\eta\eta} \quad u|_{t=0} = u_0(x,y) \tag{12}$$

其中：

$$\alpha(s) = e^{-s^2/r^2} \qquad \beta(s) = \frac{k^2}{k^2 + s^2} \qquad S = |\nabla u_\sigma|$$
$$u_\sigma = K_\zeta * u \qquad K_\sigma(\cdot) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma}\cdot\exp\left(-\frac{|\cdot|^2}{2\sigma^2}\right) \tag{13}$$

$\alpha(s)$ 决定了模型沿梯度方向的扩散速度，$\beta(s)$ 决定了模型沿边缘方向的扩散速度。

从(13)式的定义可以看出 $\alpha(s)$ 随梯度值增强而下降的速度较 $\beta(s)$ 的下降速度要大得多，这正表明了扩散主要沿边缘方向进行的思想。这里采用 $s = |\nabla u_\sigma|$ 作为边缘区域与平坦区域的判别条件是为了抑制噪声的存在对边缘检测的影响。

2.2 图像分解方法

模型(11)在理论上能够实现沿边缘方向的扩散，因而具有最佳的扩散效果。但是在实际应用中由于噪声的存在，$u_{\xi\xi}$ 和 $u_{\eta\eta}$ 并不能准确知道，尤其在相对较弱的边缘附近，模型(11)常常不能正确地识别边缘方向，这就决定了模型(11)仍只适合处理较平坦的区域和边缘特征非常明显的区域，这也正是(12)式中 $\beta(s)$ 取成梯度值的减函数的原因。为了在整幅图像上具有较好的去噪效果，需要结合 P-M 扩散方程来处理那些相对较弱的边缘。为此，可设计如下算法流程：

步骤 1：利用模型(11)对图像 $u_0(x,y)$ 进行光滑，实现对主信号 $v(x,y)$ 的提取；

步骤 2：残余图像 $u_0(x,y) - v(x,y)$ 中一般含较多的高频信号，而低频信号主要包含在 $v(x,y)$ 中。为此，采用 P-M 扩散方程对 $u_0(x,y) - v(x,y)$ 进行处理提取其中包含的高频信号 $w(x,y)$；

步骤 3：令 $U(x,y) = v(x,y) + w(x,y)$，则 $U(x,y)$ 为去噪后的图像。

详细的算法流程可用图 1 表示。

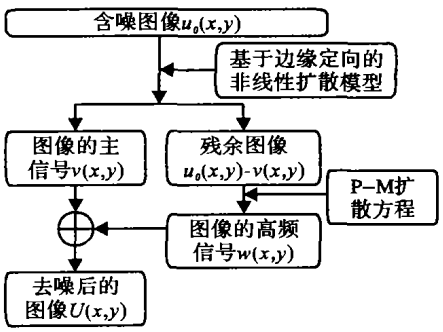


图 1 基于图像分解的多核扩散模型处理流程

注 1：为保护图像中的弱小边缘，在提取主信号时，垂直边缘方向的扩散系数 $\alpha(s)$ 随梯度增大的下降速度应该很快，一般而言，对一幅待处理的图像而言，可以事先设定其边缘在图像中所占的比例 *ratio*，根据此比例获得平坦区域 Ω_1，则 $r = \mathrm{mean}(|\nabla u_\sigma(x,y)|, (x,y) \in \Omega_1)$。而沿边缘方向的扩散系数 $\beta(s)$ 随梯度增大而下降的速度则较慢，一般而言，当待处理的图像越平坦时，k 的取值越大，$\beta(s)$ 越接近 1，反之 k 的

取值越小。

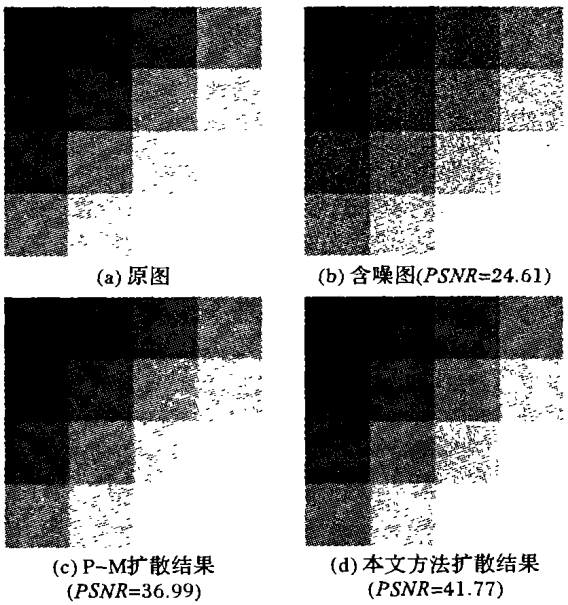
注 2:在采用 P-M 扩散方程对残余图像的处理中,由于残余图像中包含的主要是高频信号,低频成分很少,所以其参数 l 相比于直接用 P-M 扩散方程处理 $u_0(x,y)$ 而言的参数要小得多,一般取 $l = 1 \sim 2$。

3　试验结果

为检验上述算法的有效性,先构造一个仿真的 16 色图见图 2(a),在图片上叠加标准方差为 15 的高斯白噪声,见图 2(b)。分别应用中值滤波、维纳滤波、P-M 扩散方程、四阶扩散方程以及本文的方法对图像进行 20 次仿真滤波,得到的峰值信噪比见表 1 第 1 行。其中 P-M 扩散后的图像以及本文方法处理后的图像分别见图 2(c)、(d)。比较图 2(c)、(d)可发现,经过本文方法处理后的图像充分滤除了图像中所含的噪声,图 2(d)中几乎看不见噪声点,而图 2(c)中仍存在较明显的噪声电。且图 2(d)的边缘较 P-M 扩散方程滤波后的图 2(c)更清晰。同时,比较表 1 中峰值信噪比的结果可发现,新方法的峰值信噪比 P-M 扩散方法提高了将近 5dB,较四阶扩散方程提高了将近 6dB,这种提高是非常明显的。从 16 色图的处理结果看,上述理论分析与处理结果是相符的。

表 1　不同方法处理不同图片时的峰值信噪比

图片	含噪图	中值滤波	维纳滤波	P-M 扩散滤波	四阶扩散滤波	本文方法滤波
16 色图	24.61	31.64	32.64	36.99	35.85	41.77
Rice	24.60	30.84	31.45	33.35	33.47	34.93
Bloodl	24.63	29.62	30.51	31.44	31.84	32.44
Pepper	24.57	29.30	30.76	31.58	31.04	32.28
Cymbidium	24.60	29.09	31.10	31.86	31.55	32.62
Lena	24.62	29.90	31.01	32.03	31.90	32.53



(a) 原图　(b) 含噪图(*PSNR*=24.61)

(c) P-M扩散结果 (*PSNR*=36.99)　(d) 本文方法扩散结果 (*PSNR*=41.77)

图 2　不同去噪方法对 16 色图的处理结果

同时,为验证本文方法应用于实测图像的可能性,本文还对几幅典型的光学图片进行了处理,得到的峰值信噪比见表 1,其中所叠加的噪声均为标准方差为 15 的高斯白噪声,每个图像仿真 20 次。其中 Rice 图的处理结果见图 3。比较图 3(c)、(d)同样可发现,本文方法在处理实测图片时,同样比 P-M扩散方程具有更高的去噪能力和边缘保持能力,同时峰值信噪比也更高。因此,本文方法可以应用于实测图像。

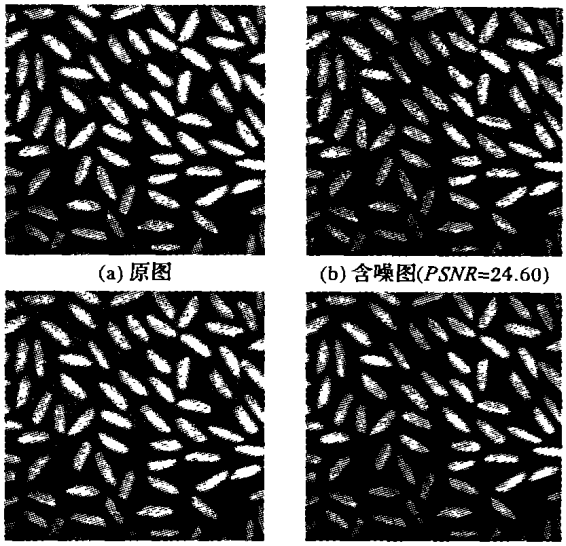
4　结语

本文构造的算法具有以下两个方面的意义:

1)构造了一个新的基于边缘定向的非线性扩散模型,能很好的处理如 16 色图这种边缘很明显的图像;

2)设计了一种基于图像分解的多核非线性扩散模型去噪方法,分别采用不同的模型提取图像的主信号和细节信号,有利于发挥不同模型的优势,在整幅图像上具有较好的去噪效果;

但是,本文方法在图像分解的阈值(即主信号的提取程度)上以及提取细节信号的模型选取上仍存在不足之处,有待于下一步继续完善。



(a) 原图　(b) 含噪图(*PSNR*=24.60)

(c) P-M扩散结果 (*PSNR*=33.35)　(d) 本文方法扩散结果 (*PSNR*=34.93)

图 3　不同去噪方法对 rice 图的处理结果

参考文献:

[1] WEICKERT J. A Review of Nonlinear Diffusion Filtering[R]. Scale-Space Theory in Computer Vision, Lecture Notes in Computer Science, Berlin: Springer, 1997. 3 - 28.

[2] PERONA P, MALIK J. Scale-space and edge detection using anisotropic diffusion[J]. IEEE Transaction on Pattern Analysis and Machine Intelligence, 1990, 12(7): 629 - 639.

[3] WEICKERT J. Coherence-enhancing diffusion filtering[J]. International Journal of Computer Vision, 1999, 31(2/3): 111 - 127.

[4] YOU YL, KAVEH M. Fourth-Order partial differential equations for noise removal[J]. IEEE Transaction on Image Processing, 2000, 9(10): 1723 - 1730.

[5] LYSAKER M, LUNDERVOLD A, TAI XC. Noise removal using fourth-order partial differential equation with applications to medical magnetic resonance images in space and time[J]. IEEE Transactions on Image Processing, 2003, 12(12): 1579 - 1590.

[6] 耿修瑞, 黎锁平. 用于图像去噪的一个四阶偏微分方程[J]. 甘肃工业大学学报, 2002; 28(4): 119 - 121.

[7] 陈朝阳, 李强, 张桂林. 一种基于变形模型的红外图像去噪新方法[J]. 红外与激光工程, 1998, 27(8).

[8] 高鑫, 刘来福, 黄海洋. 基于 PDE 与几何曲率流驱动扩散的图像分析与处理[J]. 数学进展, 2003, 32(3): 285 - 294.

[9] SHIH AC, LIAO HM, LU CS. A new iterated two-Band diffusion equation: Theory and its application[J]. IEEE Transaction on Image Processing, 2003, 12(4): 466 - 476.

[10] 许东, 袁晓辉, 夏良正, 等. 一种基于可变形模型的图像分割算法[J]. 红外与毫米波学报, 2002, 21(1): 49 - 53.