

文章编号:1001-9081(2005)04-0769-03

基于复数小波变换和 H-Curve 准则对图像的去噪

杨蒙召, 李朝峰, 许 磊

(江南大学 信息工程学院, 江苏 无锡 214122)

(thecalled@163.com)

摘 要:复数小波变换在某些方面比实数小波变换具有更多的优点,如:平移不变性、更好的方向性和精确的相空间信息等,可提高图像的去噪能力。采用二树复数小波变换,在基于 H-Curve 准则确定阈值的基础上进行图像去噪。此准则不需要提前知道噪声标准偏差,在实际应用中适用于不同类型的噪声,并且和目前多数方法去噪后的图像过于平滑相比,它还能产生较好的视觉效果。典型去噪试验表明,该方法在去噪能力、取得的视觉效果和确定阈值的广泛性方面都优于目前多数方法。

关键词:二树复数小波变换; H-Curve 准则; 噪声标准偏差; 去噪

中图分类号: TP391.41 **文献标识码:** A

Image denosing based on complex wavelet transform and H-Curve criterion

YANG Meng-zhao, LI Chao-feng, XU Lei

(School of Information Technology, Southern Yangtze University, Wuxi Jiangsu 214122, China)

Abstract: According to more merits in some aspects over real wavelet transform such as shift invariability, more directions and precise information in phase space, complex wavelet transform can improve the ability to image denosing. In this paper combined with H-Curve criterion Dual-Tree complex wavelet transform was applied to image denosing. The H-Curve criterion does not need know the noise standard deviation firstly, and it can dispose many kinds of noise practically and produce a better effect in vision over smooth image brought up by many methods presently. The typical denosing test shows that the method produces a better effect over multitudinous methods presently in many aspects such as the ability to denosing, the effect in vision and universality in choosing a threshold.

Key words: dual-tree complex wavelet transform; H-Curve criterion; noise standard deviation; denoising

0 引言

小波去噪方法主要有^[1]:小波分解与重构法、小波阈值萎缩法、投影法和相关方法。在整个去噪过程中阈值的选取极其重要,它直接影响到计算的速度、去噪的质量和产生的视觉效果,近年来在阈值及阈值函数的选取方面不断有新的方法提出,如:隐马尔科夫模型、GCV 准则、贝叶斯模型、ANN 模型、L-Curve 准则和 H-Curve 准则等。其中隐马尔科夫模型虽能产生一个较合理的阈值,但是相对于其他方法,处理时间较长;L-Curve 准则是 GCV 方法更普遍更能有效计算的替代,而 H-Curve 准则又是 L-Curve 准则的一种新近的演变;对比 GCV 方法要求噪声类型的假设是白噪声, H-Curve 准则则对不同类型的噪声如:图像中含有带状高斯白噪声和椒盐噪声等一些特殊噪声,都能产生一个合理的萎缩阈值。

尽管离散小波变换功能强大,但它具有下面的缺点:变化敏感性、方向性差和没有相空间信息等。文献[2]中提出的 A Trous 算法由于去除了 DWT 的下采样具有平移不变性,但计算量很大,且随之产生的存储量也增大,不实用。文献[3、4]提出了二树小波变换 Dual-Tree Wavelet Transform (DTWT),它是一对滤波器组同时作用在输入信号上,产生两组小波分解,因而它是冗余的。小波滤波器组是一对 Hilbert,因此它具有平移不变性,较好的方向性和精确的相空间信息。

1 二树复数小波变换原理

1.1 一维二树小波变换原理

Kingsbury 提出用两个独立的小波变换平行作用于同一个信号,进而实现复数小波的变换,用下面公式可简要表示^[3-5]:

$$\Psi(t) = \Psi_h(t) + j\Psi_g(t)$$

其中 $\Psi_h(t)$, $\Psi_g(t)$ 是两个实数值的小波,代表两个独立平行的滤波器组。与滤波器对 $h_0(n)$, $h_1(n)$ 相对应的实数值尺度函数 $\varphi_h(t)$ 和小波函数 $\Psi_h(t)$ 用方程(1)、(2)定义:

$$\varphi_h(t) = \sqrt{2} \sum_n h_0(n) \varphi_h(2t - n) \quad (1)$$

$$\Psi_h(t) = \sqrt{2} \sum_n h_1(n) \varphi_h(2t - n) \quad (2)$$

与滤波器对 $(g_0(n), g_1(n))$ 相对应的实数值尺度函数 $\varphi_g(t)$ 和小波函数 $\Psi_g(t)$ 用方程(3)(4)定义:

$$\varphi_g(t) = \sqrt{2} \sum_n g_0(n) \varphi_g(2t - n) \quad (3)$$

$$\Psi_g(t) = \sqrt{2} \sum_n g_1(n) \varphi_g(2t - n) \quad (4)$$

其中: $h_0(n)$, $h_1(n)$ 和 $g_0(n)$, $g_1(n)$ 是两组共轭积分滤波器对^[11],用它们可以来完成一个一维二树小波变换。

因为 $h_0(n)$ 和 $h_1(n)$ 是一组共轭积分滤波器对,故两者关系可表示如式(5),它们作为复数小波变换的实部:

$$h_1(n) = (-1)^n h_0(N - n) \quad N \text{ 是一奇整数} \quad (5)$$

收稿日期:2004-09-26;修订日期:2004-12-07

作者简介:杨蒙召(1980-),男,河南鲁山人,硕士研究生,主要研究方向:模式识别与图像处理;李朝峰(1972-),男,安徽庐江人,副教授,博士,主要研究方向:人工智能与模式识别;许磊(1979-),男,安徽六安人,硕士研究生,主要研究方向:模式识别与图像处理。

同样共轭积分滤波器对 $g_0(n)$ 和 $g_1(n)$ 的关系可类似表示如式(6), 它们作为复数小波变换的虚部:

$$g_1(n) = (-1)^n g_0(N-n) \quad N \text{ 是一奇整数} \quad (6)$$

因为复数小波函数 $\Psi(t)$ 具有频谱单边性 ($\Psi(w) < 0$, 当 $w \leq 0$), 比实数小波具有更多优点。所以小波变换 $\varphi_g(t)$ 是 $\varphi_h(t)$ 的 Hilbert 变换, 满足下式:

$$\Psi_g(w) = \begin{cases} -j\Psi_h(w) & w > 0 \\ j\Psi_h(w) & w < 0 \end{cases}$$

$$\text{记为: } \Psi_g(t) = H\{\Psi_h(t)\} \quad (7)$$

如果 $H_0(w)$ 与 $G_0(w)$ 都是低通滤波器且满足:

$$G_0(w) = H_0(w) e^{-j0.5w} \quad |w| < \pi \quad (8)$$

和这些滤波器相对应的小波就是一个 Hilbert 变换对。所以, 若知道二树小波变换的低通滤波器, 很容易由(5)、(6)推知它们相对应的高通滤波器。这里采用文献[6]提出的低通滤波器设计方法, 滤波器长度为 12 的 $h_0(n)$ 和 $g_0(n)$ 。

将 $h_0(n)$ 、 $g_0(n)$ 带入(1)~(7)式, 采用中阶谱因子分解可得到 $\Psi_h(t)$ 、 $\Psi_g(t)$ 及 $|\Psi_h(w) + j\Psi_g(w)|$, 如图 1 所示。

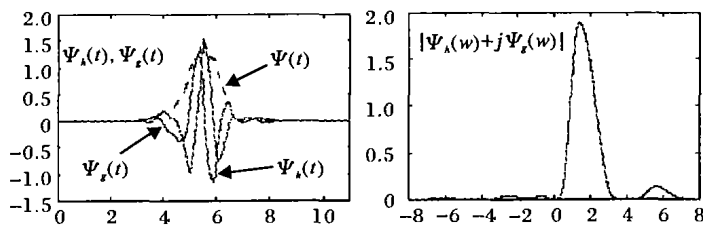


图1 $\Psi_h(t)$ 、 $\Psi_g(t)$ 及 $|\Psi_h(w) + j\Psi_g(w)|$ 示意图

1.2 二维二树小波变换原理

对于二维二树小波变换, 有 $\Psi(x, y) = \Psi(x)\Psi(y)$, 若 $\Psi(x)$ 和 $\Psi(y)$ 是复数, 则有:

$$\begin{aligned} \Psi(x, y) &= [\Psi_h(x) + j\Psi_g(x)][\Psi_h(y) + j\Psi_g(y)] = \\ &= \Psi_h(x)\Psi_h(y) - \Psi_g(x)\Psi_g(y) + \\ &+ j[\Psi_g(x)\Psi_h(y) + \Psi_h(x)\Psi_g(y)] \end{aligned}$$

二维二树复数小波变换的分解步骤如图2所示。从图2可以看出, 每一级可以分解出两个低频部分, 分别记做 $A_{(j+1,1)}$ 、 $A_{(j+1,2)}$; 并得到六个高频细节部分 $D_{(j+1,i)}$, $i = 1, \dots, 6$ 。无论二维二树复数小波变换进行多少层的分解, 其总的冗余为 4:1。因此, 每一层分解中的六个高频细节部分对应了图像中六个不同方向的信息, 比二维实数小波变换多了三个方向, 可提高图像的分解与合成的精度。

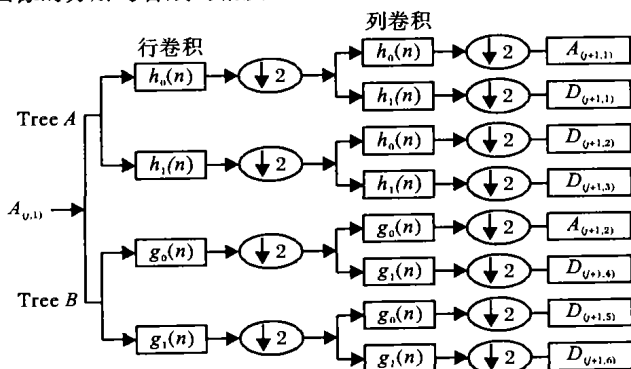


图2 二维二树复数小波变换的分解

2 采用 H-Curve 准则选取阈值

假定函数 $\bar{f}(x, y)$ ($(x, y) \in I$) 表示一个含噪图像, $f \in L_2(R)$ 表示一个不含任何噪声的原始图像, 图像的去噪过程也就是如何找到一个近似值 g 使它最平滑接近 f , 这个问题

可以转化为如何找到一个函数 g_λ^* , 使式(9) 的值最小^[7]:

$$\|\bar{f} - g\|_{L_2(I)}^2 + 2\lambda \|g\|_{B_1^1(L_1(I))} \quad (9)$$

$$\text{其中: 范数 } \|\bar{f} - g\|_{L_2(I)} := \left(\int_I |\bar{f}(x, y) - g(x, y)|^2 dx dy \right)^{1/2}$$

表征了 \bar{f} 和 g 之间的误差, 范数 $\|g\|_{B_1^1(L_1(I))}$ 表示函数 g 在 Besov 空间^[8,9] $B_1^1(L_1(I))$ 中的光滑度, 它表征了能平滑模拟原始图像 f 的程度; λ 是一个可变的正的阈值参数, λ 的变化决定了为获得一个最佳的近似值 g 而要去噪的数量。H-Curve 准则就是要选择一个合适的 λ 使得(9) 式值最小, 用此阈值进行图像去噪。

设 $\bar{f} \in L_2(R)$, $\{\Psi_{j,k}\}_{j,k \in \mathbb{Z}}$ 是 $L_2(R)$ 中的一个正交小波基, 则 \bar{f} 和 g 的小波变换可表示为:

$$\bar{f} = \sum_{j,k} \bar{c}_{j,k} \Psi_{j,k} \quad g = \sum_{j,k} d_{j,k} \Psi_{j,k} \quad (10)$$

相对应于它们的 $\|\cdot\|$ 范数可表示为:

$$\|\bar{f}\| = \sum_{j,k} \bar{c}_{j,k} \quad \|g\| = \sum_{j,k} d_{j,k} \quad (11)$$

$$\text{式(9) 小波变换结果可由 } g_\lambda^* = \sum_{j,k} d_{j,k}^* \Psi_{j,k} = \sum_{j,k} S_\lambda(\bar{c}_{j,k}) \Psi_{j,k} \text{ 给出, 其中阈值函数采用软阈值:}$$

$$d_{j,k}^* = S_\lambda(\bar{c}_{j,k}) = \begin{cases} \bar{c}_{j,k} - \lambda & |\bar{c}_{j,k}| > \lambda \\ 0 & |\bar{c}_{j,k}| \leq \lambda \end{cases}$$

则要使(9) 式值最小, 由(10)、(11), 等价于使(12) 式值最小:

$$\sum_{j,k} |\bar{c}_{j,k} - d_{j,k}|^2 + 2\lambda \sum_{j,k} |d_{j,k}| \quad (12)$$

为了便于计算, 令:

$$S_\lambda(\bar{c}_{j,k}) = f_{j,k}(\lambda) \bar{c}_{j,k} \quad (13)$$

其中:

$$f_{j,k}(\lambda) = \frac{(|\bar{c}_{j,k}| - \lambda)_+}{|\bar{c}_{j,k}|} = \begin{cases} 1 - \frac{\lambda}{|\bar{c}_{j,k}|} & |\bar{c}_{j,k}| > \lambda \\ 0 & |\bar{c}_{j,k}| \leq \lambda \end{cases}$$

定义: $\rho(\lambda) := \|\bar{f} - g_\lambda^*\|$, $\eta(\lambda) := \|g_\lambda^*\|$, 则:

$$\rho(\lambda) = \sum_{j,k} [(1 - f_{j,k}(\lambda)) \bar{c}_{j,k}]^2 \quad (14)$$

$$\eta(\lambda) = \sum_{j,k} |f_{j,k}(\lambda) \bar{c}_{j,k}|$$

$$\rho'(\lambda) := \frac{d\rho(\lambda)}{d\lambda} = -2 \sum_{j,k} (1 - f_{j,k}(\lambda)) \frac{df_{j,k}(\lambda)}{d\lambda} \bar{c}_{j,k}^2 \quad (15)$$

$$\eta'(\lambda) := \frac{d\eta(\lambda)}{d\lambda} = \sum_{j,k} \frac{df_{j,k}(\lambda)}{d\lambda} |\bar{c}_{j,k}| \quad (16)$$

$$\rho'(\lambda) = -2\lambda \eta'(\lambda) \quad (17)$$

由(17) 可推得 $\frac{d\eta}{d\rho} = -\frac{1}{2\lambda} < 0$, 说明 $\rho(\lambda)$ 和 $\eta(\lambda)$ 的增减是相反的, 故必定存在一个 λ 使得 $\rho(\lambda) + \eta(\lambda)$ 最小, 即(9) 式值最小, 下面定义参数曲线 $(\hat{\rho}(\lambda), \hat{\eta}(\lambda))$ 的曲率值就间接反映了 $\rho(\lambda) + \eta(\lambda)$ 值的变化。

$$\text{定义: } \hat{\rho}(\lambda) = \log \rho(\lambda) \quad \hat{\eta}(\lambda) = \log \eta(\lambda)$$

则参数曲线($\hat{\rho}(\lambda)$, $\hat{\eta}(\lambda)$)的曲率:

$$K(\lambda) = \frac{\hat{\rho}' \hat{\eta}'' - \hat{\rho}'' \hat{\eta}'}{[(\hat{\rho}')^2 + (\hat{\eta}')^2]^{3/2}} \quad (18)$$

由(13)~(17)可得:

$$\begin{aligned} \hat{\eta}' &= \frac{\eta'}{\eta} & \hat{\rho}' &= \frac{\rho'}{\rho} = \frac{-2\lambda\eta'}{\rho} \\ \hat{\eta}'' &= \frac{d}{d\lambda} \frac{\eta'}{\eta} = \frac{-(\eta')^2}{\eta^2} \\ \hat{\rho}'' &= \frac{d}{d\lambda} \frac{\rho'}{\rho} = \frac{\rho''\rho - (\rho')^2}{\rho^2} = \frac{-2\eta'\rho - 4\lambda^2(\eta')^2}{\rho^2} \end{aligned}$$

代入(18)化简得:

$$K(\lambda) = \frac{2\rho\eta(\lambda\rho\eta' + \eta\rho + 2\lambda^2\eta\eta')}{|\eta'| (4\lambda^2\eta'^2 + \rho^2)^{3/2}} \quad (19)$$

很显然,当 $K(\lambda)$ 取得最小值时,式(9)值最小,此时对应的 λ 即为由 H-Curve 准则确定的最佳阈值。

3 试验结果

为了科学地分析不同方法对图像的去噪效果,这里定义了两个参数:相对均方误差(RMSE)和功率信噪比(PSNR),计算分析结果,公式如下:

$$RMSE = \sqrt{\frac{\|f - g\|_{l_2}^2}{N}}$$

$$PSNR = 20\log_{10}\left(\frac{255}{RMSE}\right)$$

其中: N 是图像中像素点的总个数,255是图像中像素点(占8位)的最大像素值。

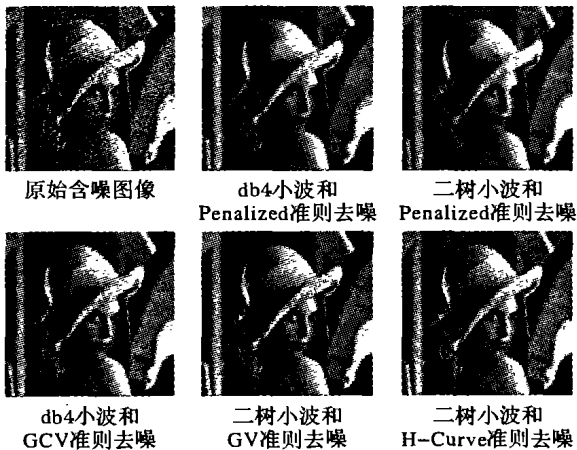


图3 采用不同小波和准则对图像去噪结果

3.1 对带有高斯白噪声的图像去噪

为了验证本文基于复数小波变换和 H-Curve 准则对图像去噪的优越性,首先以一个典型的图像 Lena 为例,加入高斯白噪声,分别采用 db4 小波和 Penalized 准则、二树小波和 Penalized 准则去噪方法、db4 小波和 GCV 准则、二树小波和 GCV 准则去噪方法、基于二树小波和 H-Curve 准则对此噪声图像去噪,去噪结果如图3所示,不同小波变换的 GCV 函数和 H-Curve 函数曲线如图4所示,去噪效果的客观评价指标如下:原始含噪图像, $RMSE = 20.06$, $PSNR = 20.09$; db4 小波和 Penalized 准则, $RMSE = 13.27$, $PSNR = 25.67$; 二树小波和 Penalized 准则去噪, $RMSE = 12.32$, $PSNR = 26.32$; db4 小波和 GCV 准则去噪, $RMSE = 11.03$, $PSNR = 27.28$; 二树小波和 GCV 准则去噪, $RMSE = 10.32$, $PSNR = 27.86$; 基于二树小波和 H-Curve 准则去噪, $RMSE = 10.29$, $PSNR = 27.88$ 。

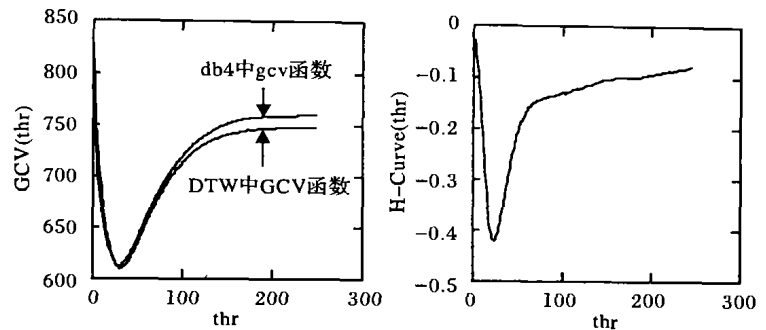


图4 不同小波变换中的 GCV 函数和 H-Curve 函数曲线

从 RMSE 和 PSNR 这两个客观评价指标可以直接看出,复数小波变换提高了图像分解与合成的精度,去噪效果总体上要比实数小波变换好,这一点也可以从图4视觉效果上有一个直观的印象。另外由图4中 GCV 函数和 H-Curve 函数的曲线可以看出,这两种准则都能选取一个较合理的阈值,用于对含有高斯白噪声的图像去噪。虽然从客观评价指标上相差不大,但是 H-Curve 准则却比 GCV 准则产生了一个更好的视觉效果,如图5所示。另外 H-Curve 准则比 GCV 准则明显优越之处在于它的应用范围更广泛,适合对含有不同类型的噪声图像去噪,在3.2节给以验证。

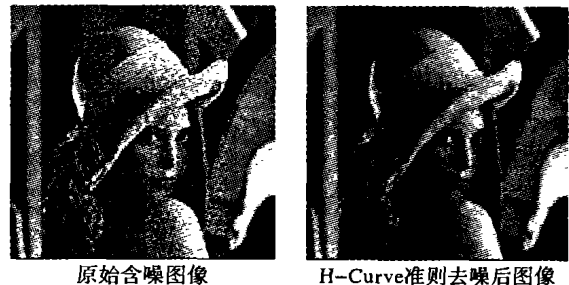


图5 对带有带状高斯噪声的图像去噪

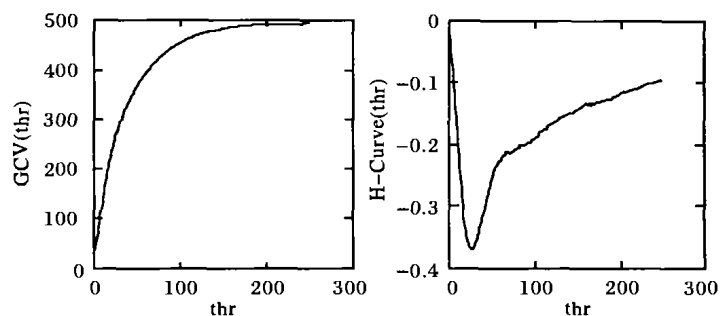


图6 二树小波变换中的 GCV 函数和 H-Curve 函数曲线

3.2 对带有带状高斯噪声和椒盐噪声等特殊噪声图像去噪

为了验证本文所采取的基于复数小波变换和 H-Curve 准则对图像去噪的广泛性和良好性,以一个典型的带有带状高斯噪声的图像为例,去噪后图像如图5所示,这里二树小波变换中的 GCV 函数和 H-Curve 函数曲线如图6所示,去噪效果的客观评价指标: $RMSE = 9.42$, $PSNR = 28.65$ 。这里主要是为了验证 H-Curve 准则的广泛性和良好性,和其他方法的比较不再赘述,从客观评价指标首先可以看出本文的去噪效果具有很好的性能,且由图5给人的视觉效果也很好;另外由图6二树小波变换中的 GCV 函数和 H-Curve 函数曲线可看出,在此特殊的噪声类型下, GCV 函数是单调递增的,不能确定一个合理的阈值,因此变得不再适用,而 H-Curve 函数仍然能给出一个合理的阈值,即存在最小值并在最小函数值处取得相应的阈值;限于篇幅,对带有椒盐噪声等另外一些典型噪

(下转第774页)

8 数据块进行计算,以验证结果的正确性及执行的速度。由于篇幅有限,此处只给出其中的 1 个 8×8 矩阵块(如表 3 所示)的处理结果(包括传统方式^[5]计算二维 DCT 的结果)。

表 3 原始的图像块(8×8)

133	132	130	129	129	128	129	129
133	132	130	129	129	128	129	129
130	128	128	128	129	128	129	129
128	127	127	127	126	126	127	129
129	128	127	126	126	127	127	128
129	129	128	127	127	127	128	128
130	130	129	127	127	127	128	132
128	128	127	127	127	128	131	136

表 4 两种不同实现方式的结果

传统方式实现的标准结果							
1028.38	1.57	7.68	-1.42	1.62	-0.8	-0.07	0.44
3.09	5.48	-2.37	2.56	-0.17	1	-0.79	0.67
7.03	-0.57	2.2	-1.02	0.39	-0.81	-0.55	0.05
-0.22	4.38	-0.62	0.93	-1.39	-0.18	-0.25	-0.03
-1.88	-2.2	1.05	-0.71	0.37	0.1	0.24	-0.67
-0.81	0.37	-0.27	-0.89	0.46	-0.16	0.36	0.12
-0.34	-1.86	-1.05	0.79	-0.03	0.61	-0.45	0.36
0.41	-0.04	0.13	0.76	0.06	-0.29	0.48	0.25
2D-DCT 的查表法结果							
1028.38	1.57	7.68	-1.42	1.62	-0.8	-0.07	0.44
3.09	5.48	-2.37	2.56	-0.17	1	-0.79	0.67
7.03	-0.57	2.2	-1.02	0.39	-0.81	-0.55	0.05
-0.22	4.38	-0.62	0.93	-1.39	-0.18	-0.25	-0.03
-1.88	-2.2	1.05	-0.71	0.37	0.1	0.24	-0.67
-0.81	0.37	-0.27	-0.89	0.46	-0.16	0.36	0.12
-0.34	-1.86	-1.05	0.79	-0.03	0.61	-0.45	0.36
0.41	-0.04	0.13	0.76	0.06	-0.29	0.48	0.25

输入如表3的原始数据(Lena 图像数据中的一个 8×8

图像块),输出结果如表 4 所示。

从以上的运算结果可以看出,采用查表法实现的结果和常规方式完全一致,这是因为我们设计的数据表本身就是通过常规方法事先生成的,故应该和原标准结果相同。

3.2 查表法二维 DCT 的执行速度

在计算运算量的基础上,将本算法所需乘法和加法运算次数与常规二维 DCT 算法进行了比较:

常规算法:385 次乘法;257 次加法;

查表法:无乘法;65 次加法;

实际测试表明,查表法计算 DCT 的速度比传统方式快一倍左右。

4 结语

本文提出了适合于嵌入式系统的二维 DCT 的查表实现算法。首先建立一个二维 DCT 算法的系数表,对其进行了简化,去除重复值;接着对系数表进行了地址映射,形成地址映射表;最后给出了比较的结果。实验表明本文给出的查表法实现的二维 DCT 算法具有速度快,结果准确,无需乘法器,便于 VLSI 设计和硬件实现等优点,因此适合应用在快速视频编码处理的场合。

参考文献:

- [1] ISO - IEC / JTC 1 / SC 2 / WG 10 Joint Photographic Experts Group, CD10918-1. Digital compression and coding of continuous-tone still images[Z]. 1991.
- [2] AHMED N, NATARAYAN T, RAO KR. Discrete cosine transform[J]. IEEE Transactions Computer, 1974, C-23(1): 90-93.
- [3] 马小虎,张明敏,严华明.多媒体数据压缩标准及实现[M].北京:清华大学出版社,1996.
- [4] 黄贤武,王加俊,李家华.数字图像处理与压缩编码技术[M].成都:电子科技大学出版社,2000.
- [5] 何斌,马天宇,王运坚,等. Visual C++ 数字图像处理[M].北京:人民邮电出版社,2001.

(上接第 771 页)

声图像去噪,不再一一赘述,这都充分说明了 H-Curve 准则应用的广泛性,且和现在大多数方法去噪图像相比能产生较好的视觉性。

4 结语

本文采用了二树复数小波变换,在基于 H-Curve 准则选取更合理阈值的基础上进行图像去噪,通过典型的实验可以看出:本文采用的方法在去噪能力,取得的视觉效果和确定阈值的广泛性方面都优于目前多数方法。

虽然 H-Curve 准则在理论上有些方面还存在着一些缺点^[7],但它在实际中已经表现出应用的广泛性和实用性。复数小波比实数小波在平移不变性、更好的方向性和精确的相空间信息等方面具有更多的优点,故它在一些方面的应用如视频去噪^[5]中是优于实数小波的。不同类型的小波变换在解决具体问题时还要灵活运用,另外对于阈值的确定很有技巧性,且是去噪中的一个重点,还有待进一步深入研究。

参考文献:

- [1] 谢杰成,张大力,徐文立.小波图像去噪综述[J].中国图象图形学报,2002,7(3):209-217.
- [2] SHENSA MJ. Discrete wavelet transform: wedding the A Trouns and Mallat algorithm[J]. IEEE Transactions on Signal Processing, 1992,

40:2464-82.

- [3] KINGSBURY NG. The Dual - tree Complex Wavelet Transform : A New Technique for Shift Invariance and Directional Filters[A]. IEEE Digital Signal Processing Workshop, DSP 98[C]. Bryce Canyon, 1998. 86-89.
- [4] KINGSBURY NG. Complex wavelets for shift invariant analysis and filtering of signals[J]. Applied and Computational Harmonic Analysis, 2002, 10(3): 234-253.
- [5] SELESNICK IW, LI KY. Video denosing using 2D and 3D dual-tree complex wavelet transforms[EB/OL]. <http://telin.rug.ac.be/~sanja/Papers/VideoDenSPIEO3.pdf>, 2004.
- [6] SELESNICK IW. Hilbert transform pairs of wavelet bases[J]. IEEE Transactions on Signal Processing, 2001, 8(6): 170-173.
- [7] MONTEFUSCO LB, PAP S. A Parameter Selection method for wavelet shrinkage denoising BIT Numerical Mathematics[J]. Bit Numerical Mathematics, 2003, 43(3): 611-626.
- [8] CHAMBOLLE A, DEVORE RA, LEE N, et al. Nonlinear wavelet image processing: Variational problem, compression, and noise removal through wavelet shrinkage[A]. IEEE Transactions on Image Process [C]. 1998. 319-335.
- [9] VOGEL CR, OMAN ME. Iterative methods for total variation denoising[J]. SLAM Journal of Scientific Computing, 1996, 17(1): 227-238.