

二维主成分分析方法的推广及其在人脸识别中的应用

陈伏兵^{1,2}, 陈秀宏^{1,2}, 高秀梅^{1,2}, 杨静宇¹

(1. 南京理工大学 计算机科学系, 江苏 南京 210094; 2. 淮阴师范学院 数学系, 江苏 淮安 223001)
(cjb631123@sina.com)

摘要:提出了分块二维主成分分析(分块2DPCA)的人脸识别方法。分块2DPCA方法先对图像矩阵进行分块,对分块得到的子图像矩阵直接进行鉴别分析。其特点是:能方便地降低鉴别特征的维数;可以完全避免使用矩阵的奇异值分解,特征抽取方便;与2DPCA方法相比,使用低维的鉴别特征矩阵,而达到较高(至少是不低)的正确识别率。此外,2DPCA是分块2DPCA的特例。在ORL和NUST603人脸库上的试验结果表明,所提出的方法在识别性能上优于2DPCA方法。

关键词:线性鉴别分析;特征抽取;分块二维主成分分析;特征矩阵;人脸识别

中图分类号: TP391.41 **文献标识码:** A

Generalization of 2DPCA and its application in face recognition

CHEN Fu-bing^{1,2}, CHEN Xiu-hong^{1,2}, GAO Xiu-mei^{1,2}, YANG Jing-yu¹

(1. Department of Computer Science, Nanjing University of Science and Technology, Nanjing Jiangsu 210094, China;
2. Department of Mathematics, Huaiyin Teachers College, Huai'an Jiangsu 223001, China)

Abstract: A human face recognition technique based on modular 2DPCA was presented. First, the original images were divided into modular images in proposed approach. Then the 2DPCA method could be directly used to the sub-images obtained from the previous step. There are three advantages for this way: 1) dimension reduction of discriminant features can be done conveniently; 2) singular value decomposition of matrix is fully avoided in the process of feature extraction, so the features for recognition can be gained easily; 3) as opposed to 2DPCA, the feature matrix of lower dimension can be employed, and higher (not less at least) correct recognition rate can be reached. Moreover, 2DPCA is the special case of modular 2DPCA. To test modular 2DPCA and evaluate its performance, a series of experiments were performed on three human face image databases: ORL and NJUST603 human face databases. The experimental results indicated that the performance of modular 2DPCA is superior to that of 2DPCA.

Key words: LDA (Linear Discriminant Analysis); feature extraction; Modular 2DPCA (Modular two-Dimensional Principal Component Analysis); feature matrix; face recognition

0 引言

特征选择是模式识别中的一个关键问题,其基本任务是如何从许多特征中找出最有效的特征^[1]。线性鉴别分析是公认的特征抽取的最为重要的工具之一^[2,3],目前仍然被广泛地应用在人脸等图像识别领域。

人脸图像线性鉴别分析方法的焦点是如何降维和抽取有效的鉴别特征,且相继提出不少解决该类问题的方法^[4~10]。概括起来,这些方法可分为以下两类:1)从模式样本出发,在模式识别之前,通过降低模式样本特征向量的维数达到消除奇异性的目的。如文献[4]里通过降低图像的分辨率实现降维;2)从算法本身入手,通过发展直接针对小样本问题的算法来解决问题。文献[5~10]分别在这方面进行深入的探索,他们所建立的算法理论为这一问题的解决奠定了基础。

以上种种方法在处理人脸等图像识别问题时,遵循一个共同的过程,即首先将图像矩阵转化为图像向量,然后以该图像向量作为原始特征进行线性鉴别分析。由于图像矢量的维数一般较高,这给随后的特征抽取造成困难。如图像的分辨

率为 112×92 ,那么,所得的图像向量的维数高达10304。在如此高的图像向量上进行线性鉴别分析不仅会耗费大量的时间,而且会导致高维的特征向量类内散布矩阵奇异性问题,从而增加了最优鉴别矢量集的计算复杂度。虽然文献[9]的算法指出最优鉴别矢量可在一个低维空间里求得,但那里的低维空间也是相对而言的,而且在低维空间求取过程中,由于散布矩阵的级数较高,不可避免地要用到矩阵的奇异值分解理论,增加了最优鉴别矢量集的求取难度。

针对这一问题,文献[11]提出了一种线性鉴别分析的新思路,其基本思想是利用图像矩阵直接构造图像散布矩阵,并在此基础上进行鉴别分析。文献[12]从统计不相关性的角度重新审视并改进了文献[11]的方法,从而得到一种具有统计不相关性的图像投影鉴别分析方法。文献[13]将文献[12]的方法称为2DPCA方法,并将此方法用于图像重构,取得了很好的效果。虽然文献[13]在特征抽取方面获得了优于文献[12]的结果,但在降维方面仍然留有遗憾^[13]。本文在这方面进行了探索。基本思想是先对图像矩阵进行分块,对分块得到的子图像矩阵直接用于鉴别分析,我们称这种特征

收稿日期:2005-03-11;修订日期:2005-05-08 基金项目:国家自然科学基金资助项目(60472060)

作者简介:陈伏兵(1964-),男,江苏泗阳人,副教授,博士研究生,主要研究方向:时间序列、模式识别、图像处理; 陈秀宏(1964-),男,江苏泰兴人,副教授,博士,主要研究方向:优化理论与方法、模式识别; 高秀梅(1968-),女,江苏淮安人,副教授,博士,主要研究方向:模式识别、图像处理; 杨静宇(1941-),男,河北秦皇岛人,教授,博士生导师,主要研究方向:计算机视觉、信息融合、模式识别、智能机器人。

抽取方法为分块 2DPCA (Modular 2DPCA)。该方法的特点是:由于直接基于二维子图像矩阵,能方便地降低原始特征的维数;在特征提取过程中可以完全避免使用矩阵的奇异值分解,方法简便;与 2DPCA 相比,可以实现使用低维的鉴别特征,而达到较高(至少是不低)的正确识别率的目的。此外,2DPCA 是分块 2DPCA 的特例,从这个意义上讲,分块 2DPCA 是 2DPCA 的推广。在 ORL 人脸库和 NUST603 人脸库上的试验结果表明,所提出的方法在识别性能上比 2DPCA 更具有鲁棒性。

1 2DPCA 方法

1.1 基本思想与最优投影矩阵

设 X 表示 n 维单位化的列向量,2DPCA 的思想是将 $m \times n$ 的图像矩阵 A 通过线性变换 $Y = AX$ 直接投影到 X 上。于是,得到一个 m 维列向量 Y ,称之为图像 A 的投影特征向量。

设模式类别有 C 个: $\omega_1, \omega_2, \dots, \omega_C$, 第 i 类有训练样本图像 n_i 个: $A_{i1}, A_{i2}, \dots, A_{in_i}$, $N = \sum_{i=1}^C n_i$ 为训练样本总数,每个样本是 $m \times n$ 矩阵。模式的类间散布矩阵为:

$$S_1 = \sum_{i=1}^C P(\omega_i) (\bar{A}_i - \bar{A})^T (\bar{A}_i - \bar{A}) \quad (1)$$

其中: $P(\omega_i)$ 为第 i 类训练样本的先验概率, $\bar{A}_i = \frac{1}{n_i} \sum_{j=1}^{n_i} A_{ij}$ 为第 i 类训练样本的均值, $\bar{A} = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^C \sum_{j=1}^{n_i} A_{ij}$ 为全体训练样本的均值。容易证明类间散布矩阵 S_1 为 $n \times n$ 的非负定矩阵。

定义准则函数:

$$J(X) = X^T S_1 X \quad (2)$$

最大化该准则函数的单位向量 X 称为最优投影向量,其物理意义是,图像矩阵在 X 方向上投影后得到的特征向量的类间分散程度最大。事实上,该最优投影向量即为图像总体散布矩阵 S_1 的最大特征值所对应的单位特征向量。

一般说来,在样本类别数较多的情况下,单一的最优投影方向是不够的,需要寻找一组满足标准正交条件且极大化准则函数(2)的最优投影向量 X_1, \dots, X_d 。

定理 1 最优投影向量组 X_1, \dots, X_d 可取为 S_1 的 d 个最大特征值所对应的标准正交的特征向量。

令 $P = [X_1, X_2, \dots, X_d]$, P 称为最优投影矩阵。

1.2 特征抽取

最优投影向量组 X_1, \dots, X_d 可用于特征抽取。对已知的图像样本 A , 令:

$$Y_k = AX_k, k = 1, 2, \dots, d$$

投影特征矢量 Y_1, Y_2, \dots, Y_d 称为图像样本 A 的主成分。2DPCA 的每个主成分是一个矢量。利用获得的主成分可构成图像样本 A 的特征矩阵或特征图 $B = [Y_1, Y_2, \dots, Y_d]$, 即 $B = A[X_1, X_2, \dots, X_d] = AP$ 。

1.3 分类

通过 1.2 节的特征抽取过程,每个图像矩阵 A 对应一个特征矩阵 $B = AP$, 对此特征矩阵,可以利用最小距离分类器进行分类。第 i 类训练图像样本的均值矩阵 \bar{A}_i 的特征矩阵为 $\bar{B}_i = \bar{A}_i P, i = 1, 2, \dots, C$ 。对测试样本 A , 计算:

$$d(\bar{B}_i, B) = \| \bar{B}_i - B \|_F = \{ \text{tr} [(\bar{B}_i - B)^T (\bar{B}_i - B)] \}^{1/2} =$$

$$\{ \text{tr} [(\bar{A}_i P - AP)^T (\bar{A}_i P - AP)] \}^{1/2}$$

其中 $\| * \|$ 表示矩阵的 Frobenius 范数, $\text{tr} [*]$ 表示矩阵的迹。

如果 $d(\bar{B}_i, B) = \min_j d(\bar{B}_j, B)$, 那么 $A \in \omega_i$ 。

2 分块 2DPCA 方法

2.1 分块 2DPCA 的思想与最优投影矩阵

分块 2DPCA 的思想是先将一个 $m \times n$ 的图像矩阵 A 分成 $q \times q$ 分块图像矩阵(类似于线性代数中矩阵的分块), 即:

$$A = \begin{pmatrix} A_{11} & A_{12} & \cdots & A_{1q} \\ A_{21} & A_{22} & \cdots & A_{2q} \\ \vdots & & & \vdots \\ A_{p1} & A_{p2} & \cdots & A_{pq} \end{pmatrix}$$

其中每个子图像矩阵 A_{ik} 是 $m_1 \times n_1$ 矩阵, $pm_1 = m$, $qn_1 = n$, 然后将所有训练图像样本的子图像矩阵看作训练图像样本施行 2DPCA 方法。

设模式类别有 C 个: $\omega_1, \omega_2, \dots, \omega_C$, 第 i 类有训练样本图像 n_i 个: $A_{i1}, A_{i2}, \dots, A_{in_i}$, $N = \sum_{i=1}^C n_i$ 训练样本总数,每个样本图像是 $m \times n$ 矩阵。训练样本图像 A_{ij} 的 $p \times q$ 分块矩阵表示为:

$$A_{ij} = \begin{pmatrix} (A_{ij})_{11} & (A_{ij})_{12} & \cdots & (A_{ij})_{1q} \\ (A_{ij})_{21} & (A_{ij})_{22} & \cdots & (A_{ij})_{2q} \\ \vdots & & & \vdots \\ (A_{ij})_{p1} & (A_{ij})_{p2} & \cdots & (A_{ij})_{pq} \end{pmatrix}$$

则训练图像样本的子图像矩阵的类间散布矩阵为:

$$S_2 = \sum_{i=1}^C P(\omega_i) (\bar{B}_i - \bar{B})^T (\bar{B}_i - \bar{B}) \quad (3)$$

其中 $P(\omega_i)$ 为第 i 类训练样本的先验概率, $\bar{B}_i = \frac{1}{n_i pq} \sum_{j=1}^{n_i} \sum_{k=1}^p \sum_{l=1}^q (A_{ij})_{kl}$ 为第 i 类训练样本的所有子图像矩阵的均值, $\bar{B} = \frac{1}{Npq} \sum_{i=1}^C \sum_{j=1}^{n_i} \sum_{k=1}^p \sum_{l=1}^q (A_{ij})_{kl}$ 为全体训练样本的子图像矩阵的均值。容易证明(3)式中的 S_2 为非负定矩阵。

与 2DPCA 类似,单一的最优投影方向是不够的,需要寻找一组满足标准正交的最优投影向量组 Z_1, Z_2, \dots, Z_r 。

定理 2 最优投影向量组 Z_1, Z_2, \dots, Z_r 可取为 S_2 的 r 个最大特征值所对应的标准正交的特征向量。

令 $Q = [Z_1, Z_2, \dots, Z_r]$, Q 称为最优投影矩阵。

2.2 特征抽取

最优投影矩阵 $Q = [Z_1, Z_2, \dots, Z_r]$ 用于特征抽取。训练样本:

$$A_{ij} = \begin{pmatrix} (A_{ij})_{11} & (A_{ij})_{12} & \cdots & (A_{ij})_{1q} \\ (A_{ij})_{21} & (A_{ij})_{22} & \cdots & (A_{ij})_{2q} \\ \vdots & & & \vdots \\ (A_{ij})_{p1} & (A_{ij})_{p2} & \cdots & (A_{ij})_{pq} \end{pmatrix}$$

它的特征矩阵为:

$$B_{ij} = \begin{pmatrix} (A_{ij})_{11} Q & (A_{ij})_{12} Q & \cdots & (A_{ij})_{1q} Q \\ (A_{ij})_{21} Q & (A_{ij})_{22} Q & \cdots & (A_{ij})_{2q} Q \\ \vdots & & & \vdots \\ (A_{ij})_{p1} Q & (A_{ij})_{p2} Q & \cdots & (A_{ij})_{pq} Q \end{pmatrix}$$

2.3 分类

通过分块 2DPCA 后,每个图像对应一个特征矩阵,对此特征矩阵,利用最小距离分类器进行分类。第 i 类训练样本的

均值图像矩阵 $\bar{A}_i (i = 1, 2, \dots, c)$ 的分块图像矩阵为:

$$\bar{A}_i = \begin{pmatrix} (\bar{A}_i)_{11} & (\bar{A}_i)_{12} & \cdots & (\bar{A}_i)_{1q} \\ (\bar{A}_i)_{21} & (\bar{A}_i)_{22} & \cdots & (\bar{A}_i)_{2q} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ (\bar{A}_i)_{p1} & (\bar{A}_i)_{p2} & \cdots & (\bar{A}_i)_{pq} \end{pmatrix}$$

其特征矩阵为:

$$\bar{B}_i = \begin{pmatrix} (\bar{A}_i)_{11}Q & (\bar{A}_i)_{12}Q & \cdots & (\bar{A}_i)_{1q}Q \\ (\bar{A}_i)_{21}Q & (\bar{A}_i)_{22}Q & \cdots & (\bar{A}_i)_{2q}Q \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ (\bar{A}_i)_{p1}Q & (\bar{A}_i)_{p2}Q & \cdots & (\bar{A}_i)_{pq}Q \end{pmatrix}$$

测试样本:

$$A = \begin{pmatrix} A_{11} & A_{12} & \cdots & A_{1q} \\ A_{21} & A_{22} & \cdots & A_{2q} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ A_{p1} & A_{p2} & \cdots & A_{pq} \end{pmatrix}$$

它的特征矩阵为:

$$B = \begin{pmatrix} A_{11}Q & A_{12}Q & \cdots & A_{1q}Q \\ A_{21}Q & A_{22}Q & \cdots & A_{2q}Q \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ A_{p1}Q & A_{p2}Q & \cdots & A_{pq}Q \end{pmatrix}$$

计算:

$$d(\bar{B}_i, B) = \|\bar{B}_i - B\|_F = [\text{tr}(\bar{B}_i - B)^T(\bar{B}_i - B)]^{1/2} =$$

$$\left\{ \sum_{k=1}^p \sum_{l=1}^q \text{tr}[(\bar{A}_i)_{kl}Q - A_{kl}Q]^T[(\bar{A}_i)_{kl}Q - A_{kl}Q] \right\}^{1/2}$$

其中 $\|\cdot\|$ 、 $\text{tr}(\cdot)$ 意义同 1.3 节。如果 $d(\bar{B}_i, B) = \min_i d(\bar{B}_i, B)$, 那么 $A \in \omega_i$ 。

需要指出的是,用分块 2DPCA 方法进行鉴别分析时,若分块矩阵是 1×1 的,即分块矩阵中只有一个子矩阵,此子矩阵就是原始图像本身,那么,这时分块 2DPCA 就是 2DPCA。这表明 2DPCA 是分块 2DPCA 的特殊情况,因此,本文的分块 2DPCA 法是 2DPCA 方法的推广。

3 实验结果与分析

3.1 试验 1

实验 1 是在 ORL 标准人脸库上进行的。此人脸库由 40 人,每人 10 幅图像组成,其中有些图像拍摄于不同时期;人的脸部表情和脸部细节有着不同程度的变化,比如,笑或不笑,眼睛或睁或闭,戴或不戴眼镜;人脸姿态也有相当程度的变化,深度旋转和平面旋转可达 20;人脸的尺度也有多达 10% 的变化。图像的分辨率是 112×92 。图 1 是 ORL 人脸库中某人的 5 幅图像。



图 1 ORL 人脸库中一人的 5 幅图像

本试验中,以每人的前 5 幅图像作为训练样本,后 5 幅作为测试样本,这样训练样本和测试样本总数均为 200。试验的结果,正确识别率和投影轴之间的对应关系见图 2。图 2 中给出了对原始图像矩阵进行 2×2 、 2×4 和 4×4 三种分块

后分别用本文方法得到的结果。三种情况下分块子矩阵的大小分别为 56×46 、 56×23 、 28×23 。取 k 个投影轴,则所得的整体投影特征向量的维数分别是 $56 \times k$ 、 $56 \times k$ 和 $28 \times k$ 。采用的分类器是最小距离分类器。同时,为便于比较也给出了 2DPCA 方法的结果。从图 2 中可以看出,对图像的三种分块情形,本文方法的结果均优于 2DPCA 方法的结果。

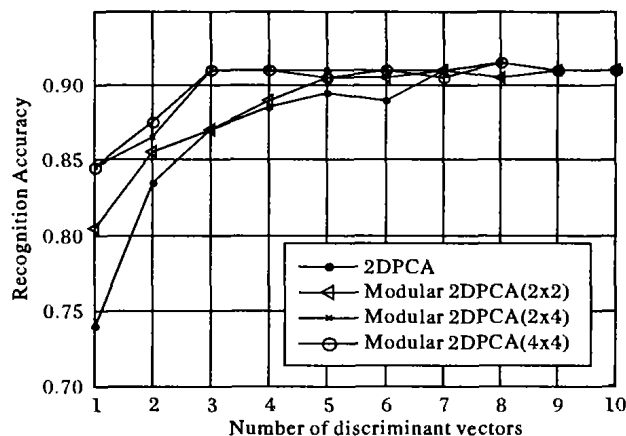


图 2 ORL 人脸库上实验结果

3.2 试验 2

本试验在一个规模较大的 NUST603 人脸数据库上进行。此人脸库包含 96 人,每人 10 幅图像,见图 3(a)。图像背景较为复杂,且光照条件变化较大。图像中人的脸部表情和姿态也有着一定程度的变化。每幅图像的分辨率均为 128×128 。为了便于识别,我们首先利用文献[14]中提供的算法将图像中的脸像切割出来,并归一化为 32×32 的标准图像,见图 3(b)。



(a) 部分原始图像



(b) 部分 32×32 标准图像

图 3 NUST603 人脸数据库的一些例图

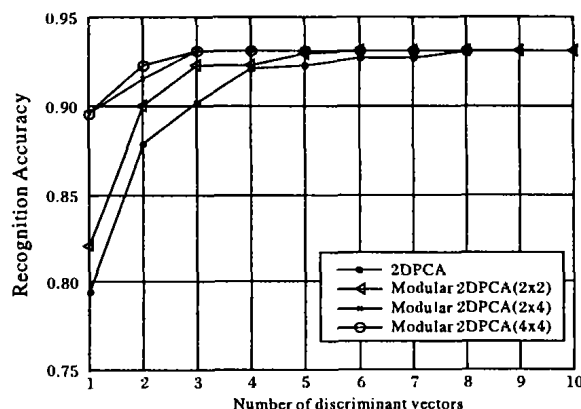


图 4 NUST603 人脸库上实验结果

由于本试验的目的之一是为了检验本文算法对光照的敏感程度,故在图像归一化的过程中,我们对图像的灰度不做任何处理。试验中采用每人的前 5 幅图像作为训练样本,后 5 幅作为测试样本,这样训练样本和测试样本总数均为 480。

试验的结果,正确识别率和投影轴之间的对应关系见图 4。图 4 中给出了对 NUST603 原始图像矩阵进行 2×2 、 2×4

和 4×4 三种分块后分别用本文方法实验得到的结果。三种情况下分块子矩阵的大小分别为 16×16 , 16×8 , 8×8 。取 k 个投影轴,则所得的整体投影特征向量的维数分别是 $16 \times k$, $16 \times k$, $8 \times k$ 。采用的分类器是最小距离分类器。同时,为便于比较也给出了 2DPCA 方法的结果。从图 4 中可以看出,对三种分块图像,本文方法的结果均优于 2DPCA 方法的结果。

PCA、2DPCA 和 Modular 2DPCA 的本质都属于主分量线性鉴别分析。为了进一步说明它们的性能,我们对它们在 ORL 和 NUST603 两个人脸库上实验得到最高正确识别率时的最佳特征维数、误识数目、正确识别率(%)、特征抽取时间、样本识别时间以及特征抽取和识别时间(时间单位:s)进行了比较。我们的实验是使用 Matlab 语言编程在 AMD Athlon(tm) XP 2500 + 1.83GHz、内存 512MB 计算机上进行的。实验的结果见表 1。

表 1 PCA、2DPCA 与 Modular 2DPCA 方法在 ORL 和 NUST603 上的比较

数据库	比较项目	PCA	2DPCA	Modular 2DPCA		
				2×2	4×4	8×4
ORL	最佳特征维数(%)	89	112×25	56×15	28×8	14×8
	误识数目(%)	18	17	17	17	17
	正确识别率(%)	91	91.5	91.5	91.5	91.5
	特征抽取时间/s	18.02	5.33	5.52	5.53	5.97
	样本识别时间/s	0.08	1.53	2.95	6.27	10.92
	总时间/s	18.10	6.86	8.47	11.80	16.89
NUST603	最佳特征维数(%)	91	32×8	16×6	8×3	4×3
	误识数目(%)	33	33	33	33	33
	正确识别率(%)	93.1	93.1	93.1	93.1	93.1
	特征抽取时间/s	21.00	10.75	10.86	11.47	12.50
	样本识别时间/s	0.41	2.22	8.20	26.97	52.80
	总时间/s	21.41	12.97	19.06	38.44	65.30

注:表中的总时间等于特征抽取时间与样本识别时间

表 1 的数据表明,在最高正确识别率方面,Modular 2DPCA 方法在两个人脸数据库上的结果与 2DPCA 方法的结果相同,而与 PCA 方法相比,在 NUST603 数据库上,Modular 2DPCA 方法的结果与 PCA 方法的结果相同,在 ORL 数据库上,Modular 2DPCA 方法的结果优于 PCA 方法的结果;在特征抽取方面,Modular 2DPCA 方法花的时间与 2DPCA 方法花的时间几乎相当。与 PCA 方法相比,Modular 2DPCA 方法花费的时间明显偏少。如对 ORL 数据库来说,Modular 2DPCA 方法特征抽取花费的时间不到 PCA 方法的三分之一。

Modular 2PCA 方法是 2DPCA 方法的推广,根据表 1 的数据,我们发现在特征抽取方面这两种方法需要的时间几乎相当,但两种方法抽取的鉴别特征的维数却有很大差别。很明显 Modular 2PCA 方法抽取的鉴别特征的维数(取决于块单元的大小)低于 2DPCA 方法抽取的特征矩阵的维数。对 ORL 人脸库而言,2DPCA 方法抽取的鉴别向量的维数是 $2800(112 \times 25)$,而 Modular 2PCA 方法对三种分块矩阵抽取的特征向量的维数分别是 $840(56 \times 15)$, $224(28 \times 8)$ 和 $112(14 \times 8)$ 。对 NUST603 人脸库而言,2DPCA 方法抽取的鉴别向量的维数是 $256(32 \times 8)$,而 Modular 2PCA 方法对三种分块矩阵抽取的特征向量的维数分别是 $96(16 \times 6)$, $24(8 \times 3)$ 和 $12(4 \times 3)$ 。这表明,通过对原始图像分块,可以获得维数很低的特征向量,而这些特征向量具有高维特征向量相同的分类性能。因此,对原始图像进行分块,对分块得到的子图像矩阵直接进行鉴别分析是解决文献[13]遗留问题的一个途径。

4 结语

本文提出了分块 2DPCA 的人脸识别方法。所提出的方法是一种直接基于子图像矩阵的线性鉴别分析方法,与以往的基于图像向量的线性鉴别方法(比如 PCA 方法)相比,它的突出优点是极大地提高了特征抽取的速度,在特征提取过程中可以完全避免使用矩阵的奇异值分解,方法简便;与 2DPCA 相比,可以实现使用低维的鉴别特征,而达到较高(至少是不低)的正确识别率的目的,解决了文献[13]遗留的问题。此外,分块 2DPCA 是 2DPCA 的推广。在 ORL 人脸库和 NUST603 人脸库上的试验结果表明,所提出的方法在识别性能上比 2DPCA 更具有鲁棒性。

参考文献:

- [1] 边肇祺,张学工.模式识别(第二版)[M].北京:清华大学出版社,1999.176-177.
- [2] PENTLAND A. Looking at people: Sensing for ubiquitous and wearable computing[J]. IEEE Transactions on Pattern Anal Machine Intell, 2000, 22(1): 107-119.
- [3] BELHUMEUR PN, HESPANHA JP, KRIENGMAN DJ. Eigenfaces vs Fisherfaces: Recognition using class specific linear projection[J]. IEEE Transactions on Pattern Anal Machine Intell, 1997, 19(7): 711-720.
- [4] JIN Z, YANG JY, HU ZS, et al. Face Recognition based on uncorrelated discriminant transformation[J]. Pattern Recognition, 2001, 34(7): 1405-1416.
- [5] HONG ZQ, YANG JY. Optimal discriminant plane for a small number of samples and design method of classifier on the plane[J]. Pattern Recognition, 1991, 24(4): 317-324.
- [6] LIU K, CHENG YQ, YANG JY. An efficient algorithm for Foley-Sammon optimal set of discriminant vectors by algebraic method[J]. International Journal of Pattern Recognition and Artificial Intelligence, 1992, 6(5): 817-829.
- [7] CHEN LF, YUAN H, LIAO M, et al. A new LDA-based face recognition system which can solve the small sample size problem[J]. Pattern Recognition, 2000, 33(10): 1713-1726.
- [8] YU H, YANG Y. A direct LDA algorithm for high-dimensional data—with application to face recognition[J]. Pattern Recognition, 2001, 34(10): 2067-2070.
- [9] 杨键,杨静宇,叶晖,等. Fisher 线性鉴别分析的理论研究及其应用[J]. 自动化学报, 2003, 29(4): 482-493.
- [10] YANG J, YANG JY. Why can LDA be performed in PCA transformed space?[J]. Pattern Recognition, 2003, 36: 563-566.
- [11] LIU K, CHENG YQ, YANG JY. Algebraic feature extraction for image recognition based on an optimal discriminant criterion[J]. Pattern Recognition, 1993, 26(6): 903-911.
- [12] 杨键,杨静宇. 具有统计不相关性的图像投影鉴别分析及人脸识别[J]. 计算机研究与发展, 2003, 40(3): 447-452.
- [13] YANG J, ZHANG D, YANG JY. Two-dimensional PCA: A new approach to appearance-based face representation and recognition[J]. IEEE Transactions Pattern Anal. Machine Intell. 2004, 26(1): 131-137.
- [14] 金忠. 人脸图像特征抽取与维数研究[D]. 南京: 南京理工大学, 1999, 53-58.