

## 一种基于小波变换的数据除噪方法

曾祥利,傅彦,青华平

(电子科技大学 计算机科学与工程学院,四川 成都 610054)

(zxl0001@tom.com)

**摘 要:** Donoho 等提出了一种基于小波变换的阈值除噪方法,这种方法在信号除噪及数据压缩等领域得到了广泛的应用。但是,Donoho 设计的阈值处理方法对含有微弱的局部信号的除噪效果不明显。根据局部信号和白噪声有着不同的 Lipschitz 指数,经过小波变换后二者在时间-尺度平面上有不同特征,文中提出了一种新的除噪方法,利用该方法可以有效地去除噪声,同时保留微弱的局部信号,减少除噪过程中信号能量的损失。

**关键词:** 小波变换;阈值处理;除噪

**中图分类号:** TP301.6 **文献标识码:** A

## Denosing method based on wavelet transform

ZENG Xiang-li, FU Yan, QING Hua-ping

(School of Computer Science and Engineering,

University of Electronic Science and Technology of China, Chengdu Sichuan 610054, China)

**Abstract:** A method for de-noising by threshold, and their method has been used in many signal de-noising and compression problems. But it is not successful for the signals with detail local signal. It is known that detail local signals and noises have different Lipschitz coefficients, and after DWT they have different characters in time-scale domain. In this paper, a new improvement threshold method was proposed, which could de-noise effective and remain detail local signals as many as possible.

**Key words:** wavelet transform; thresholding; denosing

### 0 引言

技术的进步使科学家从试验、仿真和观测中收集数据的容量从近来的十亿字节到现在的千兆兆字节,我们产生数据的能力已经远远超过了我们对它们的研究、分析和理解的能力。为了提高科学家对大规模、高维度、时变的科学数据的处理能力,科学数据挖掘(Scientific Data Mining)变得日益重要。科学数据挖掘简单的讲,就是要从大量的科学数据中整理出或者说挖掘出有用的知识,即从大量的、不完全的、有噪声的、随机的数据中发现隐含的、有规律的、人们事先未知的潜在有用信息。但是人们所搜集的数据中不可避免的含有噪声数据,噪声数据严重地影响了数据挖掘的效果,因此我们在进行数据挖掘前,必须把数据进行预处理,除去噪声数据。

小波分析是在傅立叶分析的基础上发展起来的,它既保持了傅立叶分析的特点,又弥补了傅立叶分析的不足。与傅立叶分析相比,小波分析具有多分辨率的特点,它较好地解决了时域和频域分辨率的矛盾,巧妙地利用了非均匀分布的分辨率,在低频段用较高的频率分辨率和较低的时间分辨率,而在高频段则采用较低的频率分辨率和较高的时间分辨率。因此利用小波变换时频域的局部化性质可以很好地获得信号的局部化特性,对突变信号和非平稳信号的检测非常有效。研究表明,利用小波分析能有效地消除噪声<sup>[1,2]</sup>。本文中提出了一种适合于快速处理的去除噪声的方法。

### 1 小波变换框架

小波(Wavelet)定义为在有限范围内取值非零,即具有紧

支撑的函数,形式如下:

$$\psi_{a,b}(x) = |a|^{-\frac{1}{2}} \psi\left(\frac{x-b}{a}\right) \quad (1)$$

式(1)中, $a, b \in R, a > 0$ ,  $a$  为尺度参数,  $b$  为定位参数。 $\Psi_{a,b}(t)$  为母小波函数  $\Psi(t)$  经过伸缩, 平移而得到的小波函数。Mallat 于 1988 年成功地将多尺度分析的思路引入到小波分析中,提出了利用滤波器完成离散小波变换的快速分解与重构算法。实际上使 Mallat 算法成为一个经典的双尺度编码方案。在小波分析中我们通常会提到近似分量和细节分量。近似分量通常是信号中的大尺度,低频部分,相对而言,细节分量则是信号中的小尺度,高频部分。我们设  $H(x)$  和  $G(x)$  分别代表小波的低通滤波和带通滤波。假设  $C^j$  代表原始信号在  $j$  尺度层上的低频分量,而  $D^j$  代表原始信号在  $j$  尺度层上的高频分量。那么小波在  $j+1$  尺度层上的输出可以表示成如下矩阵:

$$C^{j+1} = H * C^j \quad (2)$$

$$D^{j+1} = H * D^j \quad (3)$$

根据近似分量在第一个尺度层上的那些系数,我们就可以计算出后续尺度层上的近似分量,从而使分解过程可以递归进行。这样信号就用相同的数字滤波器被分解成许多较低

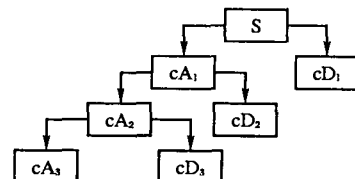


图 1

收稿日期:2005-03-03;修订日期:2005-08-08 基金项目:国家自然科学基金资助项目(10476006)

作者简介:曾祥利(1976-),男,四川雅安人,硕士研究生,主要研究方向:计算智能、数据挖掘;傅彦(1962-),女,四川成都人,教授,主要研究方向:计算智能、数据挖掘;青华平(1979-),男,四川蓬溪人,硕士研究生,主要研究方向:计算智能、新型网络体系结构。

分辨率的分量。这种方法被称为小波分解树。图1表示了小波分解树的分解过程。至于滤波器的选择,有许多这方面的介绍。

## 2 小波变换去除噪声的方法及原理

假定原始数据  $S$  中含有高斯白噪声  $\varepsilon$

$$Y = S + \varepsilon \quad (4)$$

其中  $\varepsilon \in N(0, \sigma^2)$ 。除噪的目的是为了把数据从噪声数据中辨别出来。基于阈值门限法的 Donoho 阈值除噪方法已经被证明为十分有效的。因为在小波域中,信号的能量相对集中在某几个位置上,而噪声的分布一般比较广,所以根据瞬时性的特点,信号表现为一些大的系数,而一些小的系数更多的是由噪声和信号能量的突变所产生的。系数低于预先设定的阈值的将会被变成零,而那些高于阈值的系数将会被保留(硬阈值)或者减小(软阈值)。这样经过门限法后信号中的绝大部分噪声就被去除了。<sup>[3,4]</sup>

### 2.1 Donoho 的阈值处理方法

我们首先介绍一下 Donoho 的阈值处理方法。

假设信号是一个有限长的信号  $S_i$  被一个标准方差为  $\sigma$  的高斯白噪声信号污染后变为  $Y_i$

$$Y_i = S_i + \sigma n_i, \quad i = 1, 2, \dots, N \quad (5)$$

Donoho 的阈值除噪的处理方法如下:

1) 对  $Y_i$  进行 DWT (discrete wavelet transform);

2) 确定阈值  $t$ :

由参考文献[3]可知,  $t$  由下式确定:

$$t = \sigma \cdot \sqrt{2 \log(N)/N} \quad (6)$$

其中  $\sigma$  为噪声标准差,  $N$  为信号采样点数。

3) 在小波域对小波变换系数进行阈值处理:

设  $d_{j,k}$  为小波变换系数,  $d'_{j,k}$  为阈值处理后的小波变换系数,

若按硬阈值方法处理:

$$d'_{j,k} = T_h(d_{j,k}, t) = \begin{cases} d_{j,k}, & |d_{j,k}| \geq t \\ 0, & |d_{j,k}| < t \end{cases} \quad (7)$$

若按软阈值方法处理:

$$d'_{j,k} = T_s(d_{j,k}, t) = \begin{cases} \text{sgn}(d_{j,k}) (|d_{j,k}| - t), & |d_{j,k}| \geq t \\ 0, & |d_{j,k}| < t \end{cases} \quad (8)$$

4) 用处理后的  $d'_{j,k}$  代替  $d_{j,k}$  做离散小波逆变换。

### 2.2 Donoho 的阈值处理方法前的预处理

从上面的处理过程,我们可以看出 Donoho 阈值除噪法主要利用了有效信号和噪声在小波变换下奇异性截然不同的表现特征来去除噪声,保留有效信号。虽然使用该方法可以有效去除信号中部分随机噪声,但是有些小的局部信号也随之去掉了。因此为尽可能地保留小的局部信号,减少信号的损失,提高除噪效果,我们需要在 Donoho 的阈值处理前对数据进行预处理。

针对以上方法的缺点,我们提出了以尺度因子为特征的方法,对数据进行预处理。

我们再次观察小波变换

的定义

$$\Psi_{a,b}(x) = |a|^{-\frac{1}{2}} \Psi\left(\frac{x-b}{a}\right) \quad (9)$$

可以看出,尺度因子  $a$  的作用是将母小波  $\Psi(t)$  作伸缩,  $a$  愈大  $\Psi(t/a)$  愈宽。在不同的尺度下小波分析时间将随着  $a$  的增大而加宽。由小波的奇异性原理可知  $f(x)$  在  $x_0$  上一致 Lipschitz  $\alpha$  的充分条件是对任意  $\varepsilon > 0$ , 存在常数  $A$ , 使得对于  $x \in (x_0 + \varepsilon, x_0 - \varepsilon)$  和  $s > 0$ , 有

$$|Wf(x)| \leq A(s^\alpha + |x - x_0|^\alpha) \quad (10)$$

可见,当  $|x - x_0| \leq K_s$  时,  $|Wf(x)| \leq O(s^\alpha)$ , 其中,  $K$  为母小波的支撑长度,  $s$  为尺度,  $x_0$  为  $f(x)$  中的点。设

$$\begin{aligned} N_{Jf}(x_0) &= \int_{|x-x_0| \leq K_s} |Wf(x)| dx \\ &\leq 2A \left[ K + \frac{K^{\alpha+1}}{\alpha+1} \right] s^{\alpha+1} \leq A's^{\alpha+1} \end{aligned} \quad (11)$$

当  $s = 2^j$  时, 上式变为:

$$N_{Jf}(x_0) \leq A's^{\alpha+1}, \quad \frac{N_{2^{j+1}f}(x_0)}{N_{2^j f}(x_0)} = 2^{\alpha+1} \quad (12)$$

对于局部信号,  $\alpha > 0$ , 式(12)中比值大于2。而白噪声  $\alpha = -0.5 - \varepsilon$ ,  $\varepsilon > 0$ , 所以上式的值很小, 根据这个不同特征, 可以分离出小的局部信号和白噪声。由上面可以看出, 它找到的是非奇异点, 而不是奇异点, 因此在进行小波重构时, 只需按照一般的小波重构方法即可, 计算时间短<sup>[5,6]</sup>。在去除噪声过程中不需要先验知识。从上面的分析可以看出, 因为不是根据小波变换后的幅值大小设定门限来去除噪声的, 因此就能把很微弱的局部信号突出出来而不会丢失。

### 2.3 具体的实现步骤

1) 对混有白噪的局部信号进行离散二进小波变换, 对信号中所有点计算出各尺度的  $W_{2^j f}(x_0)$  和  $N_{2^j f}(x_0)$ ,  $1 \leq j < J$ ,  $J$  为最大尺度;

2) 对于信号中点  $x_0$ , 当  $N_{2^{j+1}f}(x_0) / N_{2^j f}(x_0) > 2$ , 则  $W_{2^j f}(x_0)$  对应着微弱的局部信号的小波变换系数, 于是计算出所有的局部信号的小波变换系数;

3) 重复2), 选出所有尺度下的小波变换系数;

4) 利用 Donoho 小波域阈值去除随机噪声;

5) 对处理后的所有尺度下的小波变换系数加上相应尺度下的局部信号的小波变换系数;

6) 对小波变换系数进行逆变换。这样就得到了除噪后的信号数据。

## 3 实验结果

图2(a)为含有局部缓变边缘的实验信号。图2(b)是在实验信号上叠加方差为1的白噪声和幅度为20的脉冲噪声后得到信号。图2(c)为使用 Harr 小波, 在分解尺度为3下,

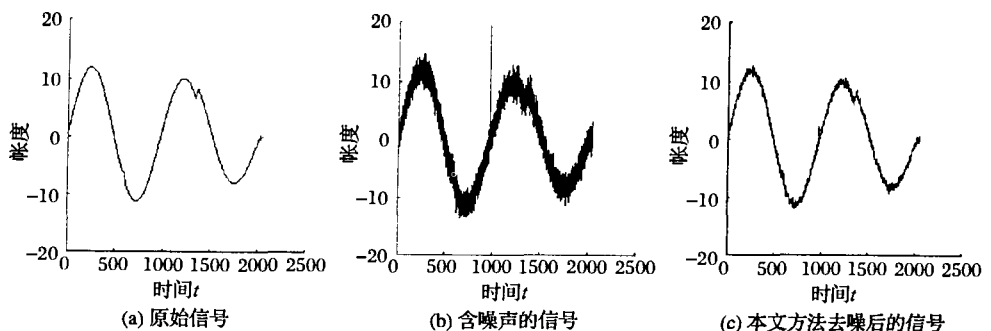


图2

按照本文所介绍的方法进行除噪所得到的信号。由图 2(c) 可知,本文方法能有效地去除信号中的噪声同时保留小的局部信号。

#### 4 结语

本文根据局部信号和噪声经过小波变换后在时间-尺度平面上具有不同表现的特点,提出了一种新的除噪方法。此算法运算简单方便,能够有效地区分出噪声和小的局部信号,从而能够有效去除噪声,同时保留小的局部信号,减少除噪过程中信号能量的损失。

#### 参考文献:

[1] MALLAT S, HWANGW L. Singularity detection and processing

with wavelets[J]. IEEE Transaction Information Theory, 1992, 38 (2): 617 - 643.

[2] 杨福生. 小波变换的工程分析与应用[M]. 北京: 科学出版社, 1999.

[3] DONOHO D. De-noising by soft-thresholding[J]. IEEE Trans on Information Theory, 1995, 41(3): 613 - 626.

[4] BURRUS CS, GOPINATH RA. Introduction To Wavelets and Wavelet transforms[M]. prentice Hall, 1998. 205 - 212.

[5] 周银春, 孙才新, 杜林, 等. 用小波剔除局放信号中白噪声的一种实用方法[J]. 重庆大学学报, 2002, 25(3): 68 - 70.

[6] HSUNG T-C, LUN DP-K, SIU WANCHI. Denoising by Singularity Detection[J]. IEEE Transaction on Signal Processing, 1999, 47 (11): 3139 - 3144.

(上接第 2136 页)

图 1 给出了本文方法和核主成分分析,核线性鉴别分析(采用扰动法,取  $\delta = 10^{-3}$ ) 的识别结果。

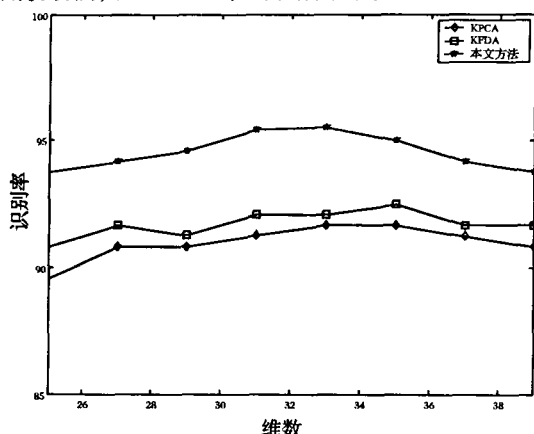


图 1 三种方法识别率的比较

由图 1 可以看出,本文的方法要明显优于核主成分分析和核线性鉴别分析的结果,这是因为我们抽取的鉴别特征向量满足核广义线性鉴别分析的条件,它们之间的统计相关性被消除了,这对分类是极为有利的。

另外,表 1 给出了本文方法与 Guo 的方法<sup>[8]</sup>及 KPCA 和 KFPA 等人脸识别方法最优识别率的比较。

表 1 几种人脸识别方法最优识别率的比较

| 方法    | KPCA   | KFPA   | Guo 的方法 | 本文的方法  |
|-------|--------|--------|---------|--------|
| 最优识别率 | 91.67% | 92.50% | 92.08%  | 95.42% |

由表 1 可以看出,由于我们抽取的是核空间中原始图像的非线性特征,解决了原始图像可能在线性空间不可分的问题,故取得了比线性的广义线性鉴别分析更好的结果。

#### 4 结语

本文在基于核的广义线性鉴别分析的基础上,结合核空间中的统计不相关的思想,提出了一种新的核广义特征抽取方法。所提方法寻求在核的类间散布矩阵的零空间的正交补空间中寻求一组正交的特征向量,将核空间中的总体散布矩阵进行转化,使之成为低维空间中的一个非奇异矩阵,解决了核线性鉴别分析中常见的奇异性问题;并通过核空间中的共轭特性分析,抽取同时满足核共轭条件的鉴别特征向量,使它们满足统计不相关性,因而使得抽取的特征具有更好的可分性。另外,本文的方法也适合其他的模式识别问题。

#### 参考文献:

[1] WILKS SS. Mathematical Statistics[M]. Wiley, New York, 1962.

[2] DUDA R, HART P. Pattern Classification and Scene Analysis[M]. Wiley, New York, 1973.

[3] SWETS DL, WENG J. Using discriminant eigenfeatures for image retrieval[J]. IEEE Trans on Pattern Anal. Machine Intell, 1996, 18 (8): 831 - 836.

[4] BELHUMEUR PN, et al. Eigenfaces vs. Fisherfaces: Recognition using class specific linear projection[J]. IEEE Trans on Pattern Analysis. Machine Intell, 1997, 19(7): 711 - 720.

[5] LIU CJ, WECHSLER H. A shape and texture based enhanced Fisher classifier for face recognition[J]. IEEE Trans. on Image Processing, 2001, 10(4): 598 - 608.

[6] FOLEY DH, SAMMON JW. An optimal set of discriminant vectors[J]. IEEE Trans Computer, 1975, 24(3): 281 - 289.

[7] DUCHENE J, LECLERCQ S. An optimal transformation for discriminant and principal component analysis[J]. IEEE Trans Pattern Anal. Machine Intell, 1988, 10(6): 978 - 983.

[8] GUO YF, SHU TT, YANG JY, et al. Feature extraction method based on the generalized Fisher Discriminant criterion and face recognition[J]. Pattern Analysis & Application, 2001, 4(1): 61 - 66.

[9] 金忠, 杨静宇, 陆建峰. 一种具有统计不相关性的最佳鉴别矢量集[J]. 计算机学报, 1999, 22(10): 1105 - 1108.

[10] 杨健, 杨静宇, 金忠. 最优鉴别特征的抽取及图像识别[J]. 计算机研究与发展, 2001, 38(11): 1331 - 1336.

[11] MIKA S, RATSCH G, WESTON J, et al. Fisher discriminant analysis with kernels[A]. IEEE workshop on Networks for Signal Processing[C], 1999.

[12] SCHÖLKOPF B, SMOLA A, ROBERT KM. Nonlinear component analysis as a kernel eigenvalue problem[J]. Neural Computer, 1998, 10(5): 1299 - 1319.

[13] ROTH V, STEINHAGE V. Nonlinear discriminant analysis using kernel functions[A]. Proceedings of Neural Information Processing systems[C]. Denver, 1999.

[14] BAUDAT G, ANOUAR F. Generalized discriminant analysis using a kernel approach[J]. Neural Computation, 2000, 12(10): 2385 - 2404.

[15] VAPNIK V. The Nature of statistical Learning Theory[M]. New York: Springer-Verlag, 1995.

[16] 程云鹏. 矩阵论[M]. 西安: 西北工业大学出版社, 1989. 294 - 302.

[17] 李士进. 人脸检测与识别方法研究[D]. 南京: 南京理工大学博士论文, 2000.