

文章编号:1001-9081(2005)09-2143-03

## 面向快速制造扫描分区的凹多边形凸分解算法

卞宏友<sup>1,2</sup>, 刘伟军<sup>1</sup>, 王天然<sup>1</sup>, 赵吉宾<sup>1</sup>

(1. 中国科学院 沈阳自动化研究所, 辽宁 沈阳 110016;

2. 中国科学院 研究生院, 北京 100039)

(bhj@sia.cn)

**摘要:**提出了一个面向快速成型扫描路径规划的凹多边形凸分解算法。首先应用所提出的基于正负法搜索凹点对应的可见点的新算法来找出凹点的可见点串,然后结合所提出的适用于快速制造中扫描分区的剖分准则,利用权函数选择最佳剖分点,并合理使用辅助点,保证了剖分所得凸多边形的形态质量。该算法作为快速成型选区环形扫描路径规划软件的底层算法,在对待扫描的层面轮廓进行分区时得到了应用。

**关键词:**凹多边形;凸分解;正负法;可见点;快速成型;分区扫描

**中图分类号:** TP391.72 **文献标识码:** A

### New concave polygon convex decomposition algorithm for rapid prototyping subarea scanning

BIAN Hong-you<sup>1,2</sup>, LIU Wei-jun<sup>1</sup>, WANG Tian-ran<sup>1</sup>, ZHAO Ji-bin<sup>1</sup>

(1. *Shenyang Institute of Automation, Chinese Academy of Sciences, Shenyang Liaoning 110016, China;*

2. *Graduate School, Chinese Academy of Sciences, Beijing 100039, China*)

**Abstract:** A new concave polygon convex decomposition algorithm for rapid prototyping subarea scanning was proposed. The visible point chain of reflex point basic on the plus-minus method was found, and the related decomposition regulations aimed to the subarea of rapid prototyping scanning were presented. The best link point was selected by using the weight function or adopting the assistant point according to those regulations, and the acquired convex polygon shape quality was effectively advanced. The algorithm, as the bottom algorithm of the rapid prototyping scanning software system, has been applied to zone the profiled outline.

**Key words:** concave polygon; convex decomposition; plus-minus method; visible point; rapid prototyping; subarea-scanning

## 0 引言

凹多边形的凸分解是计算几何学中的一个基本问题,并广泛的被应用在计算机图形学、模式识别、图像处理、计算力学的有限元网格剖分中等。通过本文,将其进一步拓宽应用到快速成型制造的扫描路径规划中。

对于光固化快速成型而言,零件是靠紫外光逐层扫描光敏树脂固化成型的,成型过程中扫描器要做大量的扫描,因此合理的扫描路径非常重要,它直接关系到成形质量和成型效率。而扫描路径规划本质上就是根据分层得到的截面轮廓数据,完成对其内部的填充。另外文献[1,2]指出采用由内向外的环形扫描制作的零件精度好,可减少光开关关闭次数或省掉光开关,激光能耗小,成型效率高;并且沿短边方向扫描成形精度更高。鉴于此,我们提出了基于层面轮廓的选区环形扫描策略,就是针对分层后的层面轮廓通过消除内环、凹多边形凸分解等处理,获得若干合适的凸多边形小区域,再有选择地按序对各区域进行环形扫描路径规划,实现分层轮廓的选区环形扫描。由此引出了面向快速制造选区环形扫描的凹

多边形凸分解的问题。

对于凹多边形的凸分解这个问题,国内外有不少学者对此进行了研究。国外的 Schachter 利用 Delaunay 思想对简单凹多边形进行凸分解;Chazelle 等通过构造  $x_k$  型凹点串实现了尽可能少数目的凸分解,Keil 利用基凸多边形合并的思想进行凸分解。国内的肖忠晖等人<sup>[3]</sup>根据凹点与其前后相邻点的位置关系,将凹点进行编码分类,然后根据凹点对的编码情况选择剖分策略;王征旋等人<sup>[4]</sup>通过在可见点对之间建立一种权函数来进行剖分,尽可能减少了凸多边形的数目,该算法是对文献[3]中算法的改进,但该算法的不足是所给的权函数需要计算反三角函数,效率较低。张玉连<sup>[5]</sup>进一步对其中的权函数作了改进,建立了不需要计算反三角函数的相关权函数,提高了运行效率。金文华<sup>[6]</sup>等提出了运行效率高于 Rogers 算法的基于顶点可见性的使用辅助点的局部剖分算法。王博<sup>[7]</sup>等结合有限元网格子域剖分的目标,重新给出权函数定义,引进了为了加大不同角度之间的权重差别的相关系数,提高了剖分的质量,但其函数是用角度来表达的,计算效率相比不高。

收稿日期:2005-03-17;修订日期:2005-07-27 基金项目:国家 863 计划资助项目(2001AA421160)

作者简介:卞宏友(1975-),男,博士研究生,主要研究方向:快速成型制造系统、计算机图形学; 刘伟军(1969-),男,研究员,博士生导师,博士,主要研究方向:反求工程、快速成型制造系统; 王天然(1943-),男,中国工程院院士,研究员,博士生导师,主要研究方向:机器人控制; 赵吉宾(1970-),男,博士,主要研究方向:CAD/CAM、快速成型制造系统、计算机图形学。

由于凹多边形凸分解的本质就是消除凹点,综合以上几篇国内文献所提的凹多边形凸分解算法,以在凹点和其可见点串之间建立一种权函数计算相应的权值并通过比较权值的大小来引导剖分来消除凹点的方法较为实用,可达到尽可能提高剖分效率的同时兼顾考虑保证凸多边形形态质量的目的。另外对于快速成型扫描而言,相比剖分所得的凸多边形数量和质量而言,相应的剖分准则更关注的是使剖分所得的凸多边形具有更好的形态质量。一般人们总希望剖分所得内角应尽量在  $30^\circ \sim 150^\circ$  范围内,避免出现狭长或畸变的凸多边形<sup>[7]</sup>。但对于快速成型扫描而言,更应避免因剖分而出现狭长的凸多边形情况,因为对于狭长多边形的尖角处扫描时容易出现过固化现象,直接影响到成型精度;但所说的畸变凸多边形即剖分所得多边形中有两条相邻边在一条线上,反而可以减少环形扫描的拐点,变成有利的特殊情况。

鉴于此,我们首先提出一种基于正负法搜索凹点对应的可见点的新算法,并采用该算法找出凹点的可见点串,然后结合所提出的适用于快速制造中扫描分区的剖分准则,选择确定最佳剖分点,并合理使用辅助点,保证了剖分所得凸多边形的形态质量。

### 1 面向快速成型选区环形扫描分区的凹多边形凸分解算法

算法的输入是有  $n$  条边的简单多边形  $P$  的顶点按逆时针方向排列的序列  $P_0, P_1, \dots, P_{n-1}$ , 采用双向链表结构存贮。输出是剖分这个简单多边形所得的凸多边形,各个凸多边形顶点采用双向链表结构存贮,各链表头存贮在动态数组中。算法具体步骤描述如下:

第 1 步:判定并标记简单多边形  $P$  中的凹顶点。

按照给出简单多边形  $P$  的顶点序列的次序,依次取各点,首先求得其相邻边在指定射影直线上的映射点,即可得到映射点间的位置关系,结合对应的判断规则,可得出该点的凹凸性。将凹点置标志位以便后续处理<sup>[8]</sup>。

第 2 步:基于正负法原理判断搜索凹点在区域  $A$  内的可见点串  $SA$ ,同时找到  $B$  区内最后一点和  $C$  区内的第一点。

本文提出一种基于正负法判断搜索凹点所对应的可见点串的新算法,即先找到凹点区域  $A$  内的点串,再进一步判断确认这些点是否与凹点构成可见点对。

(1) 判定点所属区域

所谓正负法划分区域的基本原理是:对于任意一条直线  $F(x, y) = 0$ ,它可以把平面划分为三个区域,从而使平面形成 3 个点集:

- (a) 满足  $F(x, y) = 0$  的点的集合,即直线上各点;
- (b) 满足  $F(x, y) > 0$  的点的集合,成为  $F_+$  区;
- (c) 满足  $F(x, y) < 0$  的点的集合,成为  $F_-$  区。

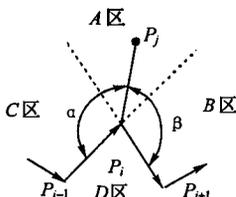


图 1 凹点  $P_i$  处的分区及剖分角示意图

设已知线段的起点为  $A(X_A, Y_A)$ , 终点为  $B(X_B, Y_B)$ , 当前待判定点  $P(x, y)$ , 则所求的判断函数为  $F(x, y) = x(Y_B - Y_A) + y(X_A - X_B) + Y_A X_B - X_A Y_B$ ; 因此可由  $F(x, y)$  值的正

负来判断点与直线的位置关系,研究表明,当观察者沿着直线从起点向终点前进时,  $F_-$  区域总是在观察者的左边,  $F_+$  区域总是在观察者的右边。

设从  $P_0$  出发搜索到的第一个凹点为  $P_i(X_i, Y_i)$ , 将  $P_i$  作为视点,  $P_{i-1}(X_{i-1}, Y_{i-1})$  和  $P_{i+1}(X_{i+1}, Y_{i+1})$  是它的前后两个邻点, 有向线段  $P_{i-1}P_i$  和  $P_iP_{i+1}$  所在直线将平面分为 4 个区域:  $A, B, C, D$ , 如图 1 所示。

表 1 点所处区域的判定规则

$P_j(x, y)$ 在 A 区	$P_j(x, y)$ 在 B 区	$P_j(x, y)$ 在 C 区	$P_j(x, y)$ 在 D 区
$F_{i-1}(x, y) \leq 0$	$F_{i-1}(x, y) > 0$	$F_{i-1}(x, y) < 0$	$F_{i-1}(x, y) > 0$
$F_{i+1}(x, y) \leq 0$	$F_{i+1}(x, y) < 0$	$F_{i+1}(x, y) > 0$	$F_{i+1}(x, y) > 0$

设当前待判定点  $P_j(x, y)$ , 对应写出相关的判断函数为  $F_{i-1}(x, y)$  和  $F_{i+1}(x, y)$ , 则该点所处区域的判定规则如表 1 所示,这里将满足  $F(x, y) = 0$  的点列为  $A$  区内的点,如该点作为最终的剖分连接点,此时剖分连接线与视点所在的一边出现了共线的情况,对快速成型而言,此处即减少了一个环形扫描的拐点,成为有利的特殊情况。

判定点所属区域的具体步骤如下:

(a) 为加快搜索速度,从  $P_{i+1}$  的逆时针方向的下一点开始,依次取各点,判断  $F_{i-1}(x, y)$  值的正负,当  $F_{i-1}(x, y)$  的值为负或等于零时,记录该点 AVBegin,同时将该点顺时针方向的下一点标记为 BVEnd,当存在多对 AVBegin 和 BVEnd 点时,取其所在边与直线  $P_{i-1}P_i$  的交点到视点  $P_i$  距离最小的点对为有效点对;同理从  $P_{i-1}$  的顺时针方向的下一点开始,依次取各点,判断  $F_{i+1}(x, y)$  值的正负,当  $F_{i+1}(x, y)$  的值为负或等于零时,记录该点 AVEnd,并将该点逆时针方向的下一点标记为 CVBegin,当存在多对 AVEnd 和 CVBegin 点时,取其所在边与直线  $P_iP_{i+1}$  的交点到视点  $P_i$  距离最小的点对为有效点对。当  $F_{i+1}(x, y)$  或  $F_{i-1}(x, y)$  的值等于零时,对应点作标识。

(b) 从 AVBegin 开始沿逆时针方向直到 AVEnd 点依次取各点同时计算  $F_{i-1}(x, y)$  和  $F_{i+1}(x, y)$  值。如这两个值都小于等于零,则该点为待定可见点,将其放入待定可见点数组  $PSA$  中;如果出现  $F_{i-1}(x, y)$  值为正时,此时如将该点与顺时针方向至点 AVBegin 之间的任意点和视点  $P_i$  连线都会出现与多边形相交的情况,故将该点之前放入可见点数组  $SA$  中的各点均置为无效待定可见点,然后依次取下一点判断是否为待定可见点。

(2) 选择确定凹点的可见点串  $SA$

从待定可见点数组  $PSA$  中第一点开始依次取出各点作为待定可见点与视点  $P_i$  形成待定剖分连线,利用正负法判断该点之前的所有点是否都在待定剖分连线的左侧,如其余各点确实在线左侧,则该点为可见点,并将其放入可见点数组  $SA$  中;如出现有一点在待定剖分连线右侧的情况,则同样基于正负法判定待定剖分连线的两个端点是否在这一点所在邻边的同侧,如在同侧,则该邻边不会与待定剖分线相交,确认待定可见点为可见点,如在异侧,则该邻边与待定剖分线相交,此时确认这一点和待定可见点之间各点和待定可见点为无效可见点;取下一待定可见点继续判断,直至找出所有可见点并将其放入可见点数组  $SA$  中。

第 3 步:结合剖分原则,利用权函数从可见点中判断找出最佳剖分连接点。

下面计算的权值大小所用权函数采用文献[5]所建立的权函数来计算,凹点处相应的剖分角表达如图 1 所示,对于凸

点处的分区和剖分角表达与图 1 所表达的凹点处的分区和剖分角同理。对于多边形中任一凹顶点  $P_i$ , 从  $P_i$  发出的剖分线可以取得的权值  $W_i$  为:

$$W_i = \begin{cases} f(\alpha, \beta) = |\cos(\alpha) - \cos(\beta)|, & \text{若 } P_i \text{ 为凹点} \\ g(\alpha, \beta) = |\cos(\alpha) - \cos(\beta)|, & \text{若 } P_i \text{ 为凸点} \end{cases}$$

可以规定一组可见点对  $P_i$  和  $P_j$  应取得的权值为:

$$W_{ij} = W_i + W_j$$

由图 1 可见, 当  $P_i, P_j$  正好落在分别以  $P_i$  和  $P_j$  为视点的区域  $A$  的平分线上, 对应权值最小(等于零), 此时为最好的最佳剖分。最佳剖分是指剖分时剖分连线的两个端点都是凹点, 并且这两个端点在它们分属的两个子多边形中都表现为凸点<sup>[3]</sup>。凹多边形凸分解是理想的是每次都做最佳剖分, 但通常情况下有时最佳剖分不存在, 有时又会同时出现多个选择。当  $P_i, P_j$  从区域  $A$  的平分线向两侧靠拢时, 对应权值逐渐增大。为尽可能的实现最佳剖分, 对于同一凹点所对应的多个可见点对的权值, 应取其中权值最小的点来形成剖分线。

(1) 如果  $SA$  不为空, 即区域  $A$  内存在可见点时, 则:

(a) 如果  $SA$  中有凹点, 此时可能也存在凸点, 但首选凹点作为待定剖分连接点, 结合彼此  $A$  区可见原则利用权函数判定最佳剖分点, 达到尽可能一次剖消除两个凹点, 提高剖分效率。

首先判断视点  $P_i$  是否也同时某几个可见凹点的区域  $A$  中, 如果视点  $P_i$  确实某几个有效可见凹点的区域  $A$  中, 则将这些凹点放入数组  $SZ$  中。如果视点  $P_i$  不在任一个可见凹点的区域  $A$  中, 则将各凹点都放入数组  $SP$  中。

此时如果  $SZ$  不为空, 如存在对应  $F(x, y) = 0$  的点, 此时可见点落在视点所在的一边的延长线上, 则优先采用该点作为剖分连接点, 以此实现了减少了一个环形扫描的拐点。否则采用权函数计算  $SZ$  中各点与视点  $P_i$  组成可见点对的权值, 取权值最小的点为剖分连接点  $L_i$ ; 但如果  $SZ$  为空, 则同理在  $SP$  中的各点选择剖分连接点。

(b) 如  $SA$  中没有凹点, 此时只存在凸点, 则结合剖分内角判定原则, 利用权函数优选凸点作为最佳剖分点。

在剖分凸点时应特别注意剖分后在两个新多边形中凸点处对应内角的大小, 以此来避免出现狭长凸多边形, 保证剖分所得的多边形具有良好形态质量, 通过实践, 本文选择剖分所得的内角最小为  $30^\circ$ , 可满足快速成型选区环形扫描制造的分区分区要求。

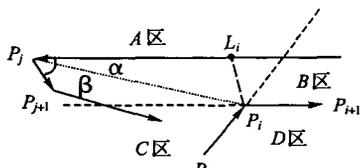


图 2 凸点处对应剖分角较小时添加辅助点示意图

具体判定过程如下所述: 首先依次取各个可见点, 与视点  $P_i$  形成的剖分线所得的剖分角如果出现满足  $\cos(\alpha) > \cos(30^\circ)$  或  $\cos(\beta) > \cos(30^\circ)$  的情况, 则称该凸点为无效凸点, 反之标记为有效凸点。搜索完毕后, 如存在有效凸点, 则先判断有效凸点中是否存在对应  $F(x, y) = 0$  的点, 如存在则优先采用该点作为剖分连接点; 否则取各有效凸点计算对应的权值, 取权值最小的点为剖分连接点  $L_i$ 。如不存在有效凸点, 即出现了剖分内角较小的情况, 则判断凸点的临边中哪条边

与区域  $A$  平分线相交并求取交点作为剖分连接点  $L_i$ , 如图 2 所示。

(2) 如果  $SA$  为空, 即视点的  $A$  区内没有可见点, 则采用添加辅助点原则确定剖分连接点。虽然采用辅助点增加了计算量, 但因为这种情况相对较少, 计算量相对增加不大, 并且提高了剖分质量相比是值得的。

此时如文献[6]指出点  $BVEnd$  和点  $CVBegin$  必在多边形的同一条边上, 求线段 ( $BVEnd, CVBegin$ ) 与区域  $A$  平分线的交点即为所求的剖分连接点  $L_i$ 。

以上各种情况, 选择确定剖分线后, 同时判断得出剖分点在两个多边形中的凸凹性并加标识, 便于后续递归处理。

第 4 步: 根据上面所求得的视点  $P_i$  和剖分连接点  $L_i$ , 从  $P_i$  至  $L_i$  引剖分线, 将多边形剖分为两个多边形, 各多边形顶点按逆时针排列。

第 5 步: 对新产生的两个多边形按上述步骤递归进行凹多边形凸分解处理, 直到所有的多边形都为凸多边形为止。

## 2 计算实例分析与结论

图 3 是利用本文算法对一个凹多边形进行剖分处理的实例, 从图中可以看出, 避免了因剖分而产生尖角的情况, 从而有效地避免了狭长凸多边形的出现, 剖分所得的多边形形状质量较好; 同时有效地利用剖分时出现的多边形的相邻边共线这一所谓畸变的特殊情况, 减少了成型扫描的拐点, 满足了快速成型选区扫描的分区分区要求。

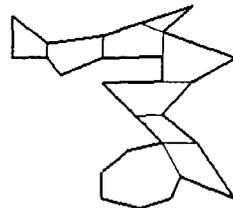


图 3 算法的剖分实例

本文算法作为光固化快速成形制造中选区环形扫描路径规划的底层算法, 已成功地满足扫描路径规划的分区分区要求。

### 参考文献:

- [1] 王军杰, 郭九生, 洪军, 等. 激光快速成形加工中扫描方式与成形精度的研究与实验[J]. 中国机械工程, 1997, 8(5): 54-55.
- [2] 史玉升, 钟庆, 陈学彬, 等. 选择性激光烧结新型扫描方式的研究及实现[J]. 机械工程学报, 2002, 38(2): 35-39.
- [3] 肖忠晖, 卢振荣, 张谦. 简单多边形凸单元剖分的编码算法[J]. 计算机学报, 1996, 19(6): 477-481.
- [4] 王钰旋, 李文辉, 庞云阶. 一个加权剖分简单多边形为凸多边形的算法[J]. 计算机学报, 1998, 21(3): 229-233.
- [5] 张玉连. 改进的加权剖分简单多边形为凸多边形的算法[J]. 燕山大学学报, 2001, 25(1): 76-79.
- [6] 金文华, 饶上荣, 唐卫清, 等. 基于顶点可见性的凹多边形快速凸分解算法[J]. 计算机研究与发展, 1999, 36(12): 1455-1460.
- [7] 王博, 李笑牛, 李华. 一种加权剖简单多边形为三角形和凸多边形子域的算法[J]. 中国图象图形学报, 2002, 7(5): 486-490.
- [8] 吴春福, 陆国栋, 张树有. 基于拓扑映射的多边形顶点凸凹判别算法[J]. 计算机辅助设计与图形学学报, 2002, 14(9): 810-814.
- [9] SCHNEIDER PJ, EBERLY DH. 计算机图形学几何工具算法详解[M]. 周长发, 译. 北京: 电子工业出版社, 2005.