

## 基于两阶段的分段单一矩形优化排样

姜永亮<sup>1</sup>, 杨志强<sup>2</sup>, 张诚一<sup>3</sup>

(1. 琼台师范高等专科学校 信息技术系, 海口 571100; 2. 黄淮学院 国际关系学院, 河南 驻马店 463000;

3. 海南师范大学 数学与统计学院, 海口 571158)

(yongliangjiang@126.com)

**摘要:**为有效解决分段单一矩形优化排样问题, 给出一个求解分段单一矩形优化排样问题的两阶段方法。第一阶段完成标准子段最佳排样方式求解, 并将二维排样问题转化为一维下料问题, 第二阶段使用适合于一维下料问题求解的算法完成板材最佳排样方式求解。使用该方法开发了一个单一矩形优化排样系统, 该系统既可以解决分段单一矩形排样问题也可以解决其他类型的单一矩形优化排样问题。企业应用实例表明该方法是求解分段单一矩形优化排样问题的一个较为有效的方法。

**关键词:**单一矩形; 优化排样; 多级排样; 分段排样; 分支定界算法

**中图分类号:** TP391.72 **文献标志码:** A

## Two-stage segment optimal packing of single size rectangles

JIANG Yong-liang<sup>1</sup>, YANG Zhi-qiang<sup>2</sup>, ZHANG Cheng-yi<sup>3</sup>

(1. Department of Information Technology, Qiongtai Teachers College, Haikou Hainan 571100, China;

2. International College, Huanghai University, Zhumadian Henan 463000, China;

3. School of Mathematics and Statistics, Hainan Normal University, Haikou Hainan 571158, China)

**Abstract:** A two-stage approach was proposed which can solve the optimal packing of single size rectangles effectively. The best cutting patterns of standard sub-segment were solved and the problem was transformed into one-dimensional cutting stock problems in the first stage. In the second stage the best ideal solution was found with different methods for the one-dimensional cutting stock problems. With this method, an optimal packing of single size rectangles system was developed. The system not only can solve the segment layout of single size rectangles but also can solve other kinds of optimal packing of single size rectangles. Enterprise applications show that this method is an effective solution to the problem of single size rectangles packing.

**Key words:** single size rectangle; optimal packing; multi-level layout; segment layout; branch and bound algorithm

## 0 引言

在钣金加工行业经常遇到矩形件的加工问题, 常用的方法是先使用剪床切将整张板材剪成矩形毛坯, 然后再进行加工。根据在同一张板材上排放毛坯尺寸种类数的多少可以将其分为套裁或单一排样问题。如果在一张板材中排放两类以上不同尺寸的毛坯则称为套裁, 如果在一张板材上只能排放同一尺寸的毛坯则称为单一排样。目前对于套裁问题研究较多, 但是在实际生产中也会遇到在一张板材上只剪切同一尺寸矩形毛坯的单一矩形优化排样问题。对于单一矩形优化排样问题, 一些业内人士认为该类排样较为简单, 通常使用单一排样方式, 使得板材利用率不高, 造成资源浪费。研究表明单一矩形优化排样问题并非简单问题, 它也是一种 NP 问题<sup>[1]</sup>。

自 1993 年文献[2]中提出单一矩形优化排样问题之后, 一些学者相继对其进行了研究。文献[2]中将单一矩形优化排样问题分为: 无约束排样、有约束排样和分段排样。无约束排样指排样过程中毛坯数量无要求, 只要求单张板材上排出尽可能多的毛坯。有约束排样指排样过程中在满足数量要求的前提下, 使用板材总面积最小。分段排样又可分为无约束分段排样和有约束分段排样, 其中无约束分段排样指排样过

程中无数量要求, 但是要求排样过程中满足刀刃长度限制, 有约束分段排样指排样过程中既有数量限制又有刀刃长度限制的排样。

对于无约束排样和有约束排样问题求解目前研究较多, 如文献[3]提出的多项式时间算法; 文献[4]给出的连分数算法; 文献[5]提出的连分数分支定界算法等。对于分段排样问题研究相对较少; 文献[6]使用一个基于集合运算的分支定界算法, 解决了无约束分段排样问题; 文献[7]使用最优定长子板方法解决了有约束分段排样问题。但是, 使用定长子板方法, 有时求得的解并不一定是问题的最优解。鉴于此, 这里使用分阶段的方法求解分段单一矩形优化排样问题, 第一阶段完成标准子段的最优排样, 将问题转化为一维下料问题, 第二阶段使用完全背包算法和分支定界算法对其进行求解。使用该方法开发了一个单一矩形优化排样系统, 有效解决了有约束和无约束分段单一矩形优化排样问题。

## 1 相关定义

### 1.1 排样方式

假定在排样过程中矩形件长边方向称为矩形方向。在排样时矩形件只能沿与板材长边(X向)或短边(Y向)平行的

收稿日期: 2010-12-17; 修回日期: 2011-02-16。

基金项目: 国家自然科学基金资助项目(70940007); 海南省重点科技基金资助项目(090802); 海南省自然科学基金资助项目(609001)。

作者简介: 姜永亮(1980-), 男, 河南漯河人, 讲师, 硕士, 主要研究方向: 计算机优化排样、智能算法; 杨志强(1979-), 男, 河南汝南人, 讲师, 硕士, 主要研究方向: 数据库; 张诚一(1955-), 男, 河南新野人, 教授, 主要研究方向: 智能信息处理、决策分析与优化设计。

方向排放,按照上述要求排放矩形件直到不能排放为止,可得到一种排样方式。

## 1.2 条带与级

图1(a)所示为一根条带,其宽度为矩形件的长度,长度为矩形件宽度与矩形件个数的乘积,图1(b)所示为一个级,它由一根或多根长度相等的条带组成,每根条带具有相同的矩形个数。级的长度方向为其所含条带长度方向,宽度方向为其所含条带宽度方向,剪切时沿级的分界线处剪切。

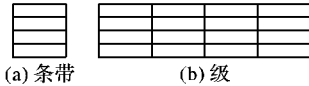


图1 条与级

### 1) 规范多级排样方式。

图2所示为规范多级排样方式(4级)。按剪切时级被切下的先后顺序对级进行编号,要求所有奇数级有相同的方向,所有偶数级也有相同的方向,并与奇数级的方向垂直。第一级方向可以是X向(如图2),也可以是Y向。排放时X向级按其长度从大到小从板材的左下角开始水平向右排列,Y向级按其长度从大到小,从板材的右上角开始竖直向下排列。

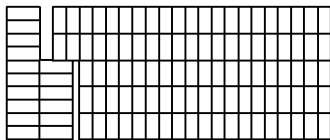


图2 规范4级排列

### 2) 分段排样。

在企业的实际生产中经常遇到排样时现有剪刀刀长度大于板材较短边的长度但是小于较长边的长度的情况,在这一限制条件下的排样称为分段排样。

### 3) 标准子段。

在遇到分段排样情况时,因剪刀刀长度的限制,为完成排样任务要将较长的板材剪成若干个子段(所有子段的长度均不超过剪刀刀长度)。假定排样过程中待排矩形件的长为 $len$ ,宽为 $wid$ ,所用剪刀刀长度为 $l_b$ ,子段长度为 $l_m$ , $l_m$ 的值使用公式 $l_m = i \times len + j \times wid$ 求解,公式中 $m, i, j$ 的值满足 $m \geq 0, i \geq 0, j \geq 0$ ,且均为整数。所有满足 $\min(len, wid) \leq l_m \leq l_b$ 条件的子段称为标准子段。

## 2 两阶段求解方法

### 2.1 问题转化

按照公式:

$$l_m = i \times len + j \times wid$$

$$\text{s. t. } \begin{cases} \min(len, wid) \leq i \times len \\ i \times len + j \times wid \leq l_b \end{cases}$$

借助计算机程序使用穷举法求出所有标准子段的长度 $l_1, l_2, \dots, l_n$ ,并求解所有标准子段的规范多级最优排样方式 $R_1, R_2, \dots, R_n$ ,以及每一标准子段在优排样方式下所排的矩形个数 $k_1, k_2, \dots, k_n$ 。

求出各标准子段最优排样后,由于所有子段的宽度均为板材的宽度,所以单一矩形优化排样问题可以理解为将长度为 $l_1, l_2, \dots, l_n$ 线型件在长度为 $L$ 的原材料上排放的一维下料问题。由于下料任务的不确定性,有时会出现同时使用整张板材和部分板材的情况。对于整张板材排样问题,可以使用如下模型求解:

$$z = \max(a_1 k_1 + a_2 k_2 + \dots + a_n k_n) \quad (1)$$

$$\text{s. t. } \begin{cases} a_1 l_1 + a_2 l_2 + \dots + a_n l_n \leq L \\ a_1 \geq 0, a_2 \geq 0, \dots, a_n \geq 0 \text{ 且 } a_1, a_2, \dots, a_n \text{ 均为整数} \end{cases}$$

其中: $z$ 为整张板材在最佳排样方式的情况下排下的矩形个数, $a_i$ 为第 $i$ 个标准子段在板材上出现的次数。若下料任务中出现只使用部分板材的情况,使用如下模型求解:

$$l_{\min} = \min(a_1 l_1 + a_2 l_2 + \dots + a_n l_n) \quad (2)$$

$$\text{s. t. } \begin{cases} a_1 k_1 + a_2 k_2 + \dots + a_n k_n \geq N_1 \\ a_1 \geq 0, a_2 \geq 0, \dots, a_n \geq 0 \text{ 且 } a_1, a_2, \dots, a_n \text{ 均为整数} \end{cases}$$

其中: $l_{\min}$ 为使用部分板材的最小长度, $N_1$ 为需要在部分板材上排放矩形件个数。

### 2.2 问题求解

如果将每类子段当做一种物品,子段长度当做该物品的重量,子段最多排放矩形个数当做其价值,板长 $L$ 当做背包的容量,式(1)可转化为完全背包问题。如果直接使用常规完全背包问题的求解方法,将第 $i$ 类标准子段当做 $\lfloor L/l_i \rfloor$ 个子段处理,之后使用0-1背包算法求解,会使算法的时间复杂度增加。为提高算法的执行效率这里将第 $i$ 类标准子段转换成 $[0, \lfloor \text{lb}(L/l_i) \rfloor]$ 个子段,以此来提高算法的执行效率。

从数学模型上来讲式(2)符合整数规划模型,可使用整数规划方法求解,为提高算法效率这里使用分支定界算法求解。

### 3 系统实现

使用函数 $\text{OptSubBlock}(\text{int } l, \text{int } w, \text{int } L_b)$ 完成标准子段最佳排样求解,使用 $\text{OptAllSheet}(\text{int } l[], \text{int } w, \text{int } L)$ 完成整张板材最佳排样求解,使用 $\text{OptSomeSheet}(\text{int } l[], \text{int } w, \text{int } L)$ 完成部分板材最佳排样求解。系统在运行过程中根据用户的输入参数,调用不同的函数完成相应排样任务,其实现过程如图3所示。

## 4 应用实例

以国内某一有色金属加工企业的三个月的生产为例,该企业近三个月生产的单一矩形件的长度在100~800范围内,宽度在100~500范围内。如果使用单一排样方式,三个月原材料的总利用率为89.43%,使用本系统三个月原材料的总利用率为95.33%。取其中两组排样任务进行比较。三个月要生产尺寸为313×223的零件780个,所用板材的尺寸为4100×1500,加工过程中剪刀刀长度为1900,如果使用单一排样方式板材利用率为88.53%,使用本系统板材利用率为96.29%。两种排样方式均使用10张板材,二者排样图如图4所示,其中图4(a)为单一排样最优情况下所用10张板材的排样结果图,图4(b)为使用本系统所得排样结果图,其中上图为前9张排样结果图,下图为最后一张板材的排样结果图。

使用规格为3500×1500的板材生产规格为447×283单一矩形件702个,由于设备的限制原因只能使用刀长度为1800的剪床进行加工。如果使用文献[7]方法进行排样,每张板材上最多可以排下38个零件,需要板材19张,板材总利用率为91.61%;使用本系统每张板材可以排39个零件,只需要18张板材,板材总利用率为93.96%。二者的排样结果如图5所示,其中图5(a)为使用文献[7]方法所用19张板材

的排样结果图,(a)中上图为前18张排样结果图,下图为最后一张板材的排样结果图,图5(b)为使用本系统所得18张排样结果图。

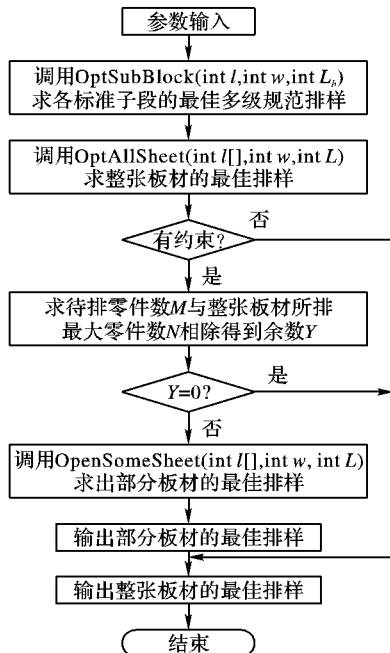


图3 系统实现过程

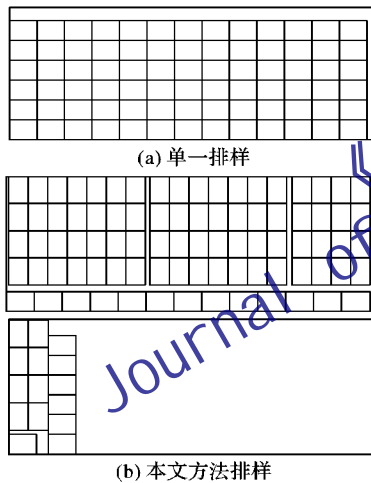


图4 单一排样与本文方法排样结果示意图

对于上述两组排样任务,分别使用本文方法和其他排样方法进行比较,所得排样结果比较如表1所示。对于第一组排样任务,完成780个零件的排样,在单张板材最多排放零件个数方面本文方法比单一排样方式多7个,在板材总利用率方面本文方法比单一排样方式高7.76个百分点。对于第二组排样任务,完成702个零件的排样,在单张板材最多排放零件个数方面本文方法比文献[7]方法多1个,在板材总利用率方面本方法比文献[7]方法高2.35%。

## 5 结语

针对不同单一矩形排样问题调用不同的函数,可完成不同类型的分段单一矩形优化排样问题求解。如果将刀刃长度设为板材长度,本系统也可用于解决无约束排样和有约束排样问题。某企业四个月的实际应用表明,本系统是一个解决单一矩形优化排样问题的有效系统。如果将其应用于钣金、汽车制造、玻璃加工、造纸等行业,将会较好地为企业节省原

料,大幅度提高经济效益。

表1 两组排样任务排样结果比较

排样任务	板材、零件、刀刃信息	使用的方法	所用板材数	单张板材最多所排零件数	板材总体利用率/%
1	板材尺寸: 4 100 × 1 500	单一排样	10	78	88.53
	零件尺寸: 313 × 223				
	零件个数: 780	本文方法	10	85	96.29
	剪刀刀刃长度: 1 900				
2	板材尺寸: 3 500 × 1 500	文献[7]方法	19	38	91.61
	零件尺寸: 447 × 283				
	零件个数: 702	本文方法	18	39	93.96
	剪刀刀刃长度: 1 800				



图5 文献[7]方法与本文方法排样结果示意图

## 参考文献:

- [1] DREMINSKY Y, ZALGALLER V A. About cutting of a sheet into equal rectangles [J]. Optimization (in Russian), 1981, 44(27): 136 - 142.
- [2] AGRAWAL P K. Minimizing trim loss in cutting rectangular blanks of a single size from a rectangular sheet using orthogonal guillotine cuts [J]. European Journal of Operational Research, 1993, 64(3): 410 - 422.
- [3] TARNOWSKI A G, TERNO J, SCHEITHAUER G. A polynomial time algorithm for the guillotine pallet-loading problem [J]. Information Systems and Operational Research, 1994, 32(4): 275 - 287.
- [4] ARSLANOV M Z. Continued fractions in optimal cutting of a rectangular sheet into equal small rectangles [J]. European Journal of Operational Research, 2000, 125(2): 239 - 248.
- [5] 崔耀东, 张春玲, 赵谊. 同尺寸矩形毛坯排样的连分数分支定界算法 [J]. 计算机辅助设计与图形学学报, 2004, 16(2): 252 - 256.
- [6] 崔耀东, 周儒荣. 单一尺寸矩形毛坯排样时长板的最优分割 [J]. 计算机辅助设计与图形学学报, 2001, 13(5): 434 - 437.
- [7] 崔耀东. 长板单一尺寸矩形毛坯定长分割优化排样 [J]. 计算机工程, 2004, 30(7): 178 - 180.