

文章编号:1001-9081(2011)11-3132-03

doi:10.3724/SP.J.1087.2011.03132

# 基于Q值法的奖学金自动分配方案的设计与应用

邵正隆<sup>1</sup>, 王 憲<sup>2</sup>, 邹向荣<sup>1</sup>

(1. 清华大学 计算机与信息管理中心, 北京 100084; 2. 清华大学 研究生工作部, 北京 100084)

(sxl@cic.tsinghua.edu.cn)

**摘要:**为了实现奖学金在各院系间分配的席位公平和金额公平,在借鉴Q值法思想的基础上,将不公平值的计算分别应用到席位和金额的分配中,采取先分配奖学金席位,再按奖项金额和院系已获奖金总额将具体奖项分配给具有席位的院系的多阶段分配方式。与其他三种分配方案的分配结果进行对比表明,该分配方案能够获得更加公平的分配结果。该方案已在清华大学研究生奖学金系统中得到了实际应用,并取得了良好的应用效果。

**关键词:**席位分配; Q值法; 奖学金分配; 不公平值; 自动分配

中图分类号: TP301.6; TP315 文献标志码:A

## Design and application of automatic scholarship distribution method based on Q-value method

SHAO Zheng-long<sup>1</sup>, WANG Que<sup>2</sup>, ZOU Xiang-rong<sup>1</sup>

(1. Computer and Information Management Center, Tsinghua University, Beijing 100084, China;

2. Graduate Affairs Office, Tsinghua University, Beijing 100084, China)

**Abstract:** In order to achieve the seats fairness and amount fairness of scholarship distribution among the departments, based on Q-value method of seats distribution problem, the multi-step automatic distribution method computes unfairness value in seats distributes and amount distributes, first distributes the seats, then distributes a specific award to a department which has a seat according to the amount of the awards and the total award money of the department. The distribution results of the method were compared with the results of other three distribution methods and got better results. This method had been applied in the post-graduate scholarship system of Tsinghua University, and achieved good effect.

**Key words:** seats distribution; Q-value method; scholarship distribution; unfairness value; automatic distribution

## 0 引言

奖学金作为一种激励机制在人才培养过程中发挥着非常重要的导向作用,其目的是引导、鼓励学生刻苦学习、奋发向上,促进学生全面素质提高和个性健康发展。奖学金评定涉及学生的切身利益,一直是院系和学生关注的热点问题之一。清华大学研究生奖学金的评定采取参考人数比例将奖项分配到院系,再由院系自主评定的方式,奖项在各院系间分配结果的公平性会直接影响院系间的团结和学校的和谐氛围。

研究生奖学金在各院系间的分配有其复杂性。

1)院系众多,参评人数各异。以2009-2010年度的研究生奖学金评定为例,有34个参评院系,院系参评人数从几十人到一千多人不等。

2)奖项多,名额多。以2009-2010年度的研究生奖学金评定为例,有63个奖项1217个席位需要分配到院系;

3)奖项金额各异。奖学金按奖项金额分为10 000~8 000元的一等奖学金、7 999~5 000元的二等奖学金、4 999~3 000元的三等奖学金和2 999~1 000元的四等奖学金;

4)奖项分配要求灵活。奖学金依分配要求的强弱分为强分配、弱分配和普通分配三类。强分配要求指定了参与分配的院系及各院系的席位;弱分配要求仅指定参与分配的院系范围但未指定各院系的席位;普通分配要求没有指定任何分配限定条件。同一奖项又可能同时具有强分配和弱分配要

求或者同时具有强分配和普通分配要求,例如一个奖项有10个席位,指定了其中2个席位分配给计算机系,剩余8个席位在电子系、自动化系之间分配。

基于上述复杂性,为了实现各院系间席位公平和奖金公平的分配目标,研究生工作部每年要耗费大量的人力进行奖学金的分配来保证分配的公平性。针对研究生奖学金分配中遇到的问题,本文提出了一种基于席位分配问题Q值法的奖学金自动分配方案,并将分配结果与其他三种分配方案进行了比较。

## 1 席位分配问题及Q值法

### 1.1 席位分配问题

席位分配问题处理和研究的是人类社会生活中相当普遍的一类资源分配问题,其目标是试图在一个大集体对小集体进行某种资源分配时尽可能做到公平合理,优化决策这类问题的关键是对各个小集体的资源不公平度及其变化建立正确的数学描述并采用合理方法优化求解。公平的席位分配是一个十分重要的问题,它在政治学、管理和对策论等领域具有广泛的应用价值<sup>[1]</sup>。概括地说,席位分配问题的数学描述如下:

设  $N_s = \{1, 2, \dots, s\}$  表示  $s$  个团体集,如一所大学里的  $s$  个班级,美国的  $s$  个州等。所谓席位分配就是将总席位数  $h$  分配到  $s$  个小团体中,每个团体获得的席位数为一个非负整数

收稿日期:2011-05-11;修回日期:2011-07-20。

作者简介:邵正隆(1980-),男,辽宁大连人,工程师,硕士,主要研究方向:教育信息化、软件工程;王宪(1981-),男,山东黄县人,讲师,硕士,主要研究方向:车辆工程;邹向荣(1973-),男,江西临川人,高级工程师,硕士,主要研究方向:教育信息化。

$a_i (i = 1, 2, \dots, s)$  且满足条件:

$$\sum_{i=1}^s a_i = h$$

席位公平分配问题得到了广泛的研究, 提出了包括 Hamilton 法<sup>[2]</sup>、除子法<sup>[2]</sup>、D' Hondt 法<sup>[2]</sup>、Q 值法<sup>[2]</sup>、新 Q 值法<sup>[3]</sup>、最大熵法<sup>[4]</sup>、最小极差法<sup>[5]</sup>及其他多种分配算法<sup>[6-8]</sup>。1982 年, Balinsky 等人<sup>[9]</sup> 证明了完全公平的席位分配方法是不存在的, 即不可能达到绝对公平的席位分配。

## 1.2 Q 值法

用于处理席位分配问题的 Q 值法<sup>[2]</sup> 建立了衡量公平程度的数量指标——相对不公平值, 较好地反映了各方的不公平程度, 是一类非常有效的方法, 其具体描述如下:

设共有  $s$  个单位参与席位分配, 第  $i$  个单位人数为  $p_i (i = 1, 2, \dots, s)$ , 已分配席位数为  $n_i (i = 1, 2, \dots, s)$ , Q 值法定义 Q 值为:

$$Q_i = \frac{p_i^2}{n_i(n_i + 1)}; i = 1, 2, \dots, s \quad (1)$$

Q 值法认为  $Q_i$  能反映对第  $i$  个单位的不公平程度, 增加的席位应分配给  $Q_i$  较大的单位。

Q 值法考虑了相对不公平值等因素, 尽可能将不公平降低到最低限度, 即最大限度地保持公平。但这种方法要求参与分配的各方至少已有一个名额, 即 Q 值法不能解决“分配资格”问题, 且在总名额比较少或参加人数相差比较大的时候也可能存在较大“不公平”。

## 2 基于 Q 值法的奖学金自动分配方案

经典席位分配问题的数学模型各有其优势和约束条件<sup>[10]</sup>, 但实际的席位分配中为同时保证公平性和合理性, 总是会考虑各团体人口数量以外的其他多种因素。奖学金具有席位和金额双重属性, 相应提出席位公平与金额公平的双重分配要求, 属于席位存在差别的情况。虽然已经存在针对多指标席位分配问题的研究<sup>[11]</sup>, 但对于席位本身存在差别的情况尚缺乏足够的研究。奖学金分配过程中, 除了要求保证公平性外, 还要考虑到历史分配情况、院系及个人的特殊情况等其他因素, 很难完全用数学模型进行抽象。因此, 本文讨论的重点不是建立奖学金分配的严格的数学模型, 而是借鉴 Q 值法的思想将不公平值的计算应用到奖学金的席位和金额双重属性的分配中, 提出相对公平合理的分阶段奖学金自动分配方案。

### 2.1 奖学金分配的数学描述

定义集合  $J_n = \{(m_1, a_1), (m_2, a_2), \dots, (m_n, a_n)\}$  表示需要分配的  $n$  项奖学金, 其中第  $i$  项奖学金的名额为  $m_i (i = 1, 2, \dots, n)$ , 金额为  $a_i (i = 1, 2, \dots, n)$ ; 共有  $s$  个院系参与奖学金的分配, 第  $j$  个单位人数为  $p_j (j = 1, 2, \dots, s)$ 。所谓奖学金分配就是将  $J_n$  分配到  $s$  个院系中, 每个院系获得的席位数为一个非负整数集合  $D_i = \{d_{i1}, d_{i2}, \dots, d_{is}\} (i = 1, 2, \dots, s)$ , 其中  $d_{ij} (i = 1, 2, \dots, s) (j = 1, 2, \dots, n)$  表示第  $j$  项奖学金分配给第  $i$  个院系的名额, 且满足条件:

$$\sum_{i=1}^s d_{ij} = m_j; j = 1, 2, \dots, n$$

每个院系获得的奖学金金额为一个非负整数集合  $A_i = \{d_{i1} \times a_1, d_{i2} \times a_2, \dots, d_{is} \times a_n\} (i = 1, 2, \dots, s)$ 。奖学金在各院系间的分配目标要求尽量做到各院系间的席位公平和奖金公平。

### 2.2 先席位后金额的分阶段分配方案

奖学金的分配目标要求既考虑奖项席位分配的公平, 又考虑奖项金额分配的公平, 因此采取先将席位分配到院系, 再依据各院系获得的奖项席位及各奖项金额具体分配奖项的方案, 即在保证席位公平性的前提下进一步保证奖项金额分配的公平性。又由于奖项具有不同的分配要求, 分配要求不严格的奖项可以用于填平分配要求严格的奖项所造成的“不公平”, 反之则不然, 因此采取先分配有强分配要求的奖项席位及金额, 再分配有弱分配要求的奖项席位及金额, 最后分配仅有般分配要求的奖项席位及金额。具体分配方案如下。

#### 1) 第一阶段。分配有强分配要求的奖项席位及金额。

具有强分配要求的奖项明确规定了奖项分配给指定院系的席位, 因此第一阶段直接将具有强分配要求的奖项席位及金额分配到院系。定义  $w_{ij} (i = 1, 2, \dots, s; j = 1, 2, \dots, n)$  表示第  $j$  项奖学金分配给第  $i$  个院系的强分配名额, 则第一阶段分配后每个院系获得的席位数为一个非负整数集合  $D'_i = \{w_{i1}, w_{i2}, \dots, w_{in}\} (i = 1, 2, \dots, s)$  未分配的奖学金集合为:

$$J'_{\text{un}} = \left\{ \left( m_1 - \sum_{i=1}^s w_{i1}, a_1 \right), \left( m_2 - \sum_{i=1}^s w_{i2}, a_2 \right), \dots, \left( m_n - \sum_{i=1}^s w_{in}, a_n \right) \right\}$$

#### 2) 第二阶段。分配有弱分配要求的奖项席位及金额。

具有弱分配要求的奖项规定了该奖项分配的院系范围, 席位不能在所有院系间共享, 因此院系在得到席位时, 也应同时得到该席位的奖项金额。分配时使用 Q 值法将奖项席位及奖金分配给按式(1)计算的 Q 值最大的院系, 计算 Q 值时需将已分配到该院系的强分配席位计算在内, 对于 Q 值法无法解决的“分配资格”问题, 按照研究生工作部分配奖项的经验, 优先分配给尚未获得“分配资格”的人数最多的院系。定义  $x_{ij} (i = 1, 2, \dots, s; j = 1, 2, \dots, n)$  表示第  $j$  项奖学金分配给第  $i$  个院系的弱分配名额, 则第二阶段分配后每个院系获得的席位数为一个非负整数集合  $D''_i = \{w_{i1} + x_{i1}, w_{i2} + x_{i2}, \dots, w_{in} + x_{in}\} (i = 1, 2, \dots, s)$ , 未分配的奖学金集合为:

$$J''_{\text{un}} = \left\{ \left( m_1 - \sum_{i=1}^s w_{i1} - \sum_{i=1}^s x_{i1}, a_1 \right), \left( m_2 - \sum_{i=1}^s w_{i2} - \sum_{i=1}^s x_{i2}, a_2 \right), \dots, \left( m_n - \sum_{i=1}^s w_{in} - \sum_{i=1}^s x_{in}, a_n \right) \right\}$$

#### 3) 第三阶段。分配普通分配要求的席位。

普通分配要求的奖项可以在所有院系间任意分配, 即所有院系可以共享奖项席位, 因此采用先分配席位再分配金额的步骤进行分配。该阶段仅考虑奖项席位的分配, 即将所有普通分配要求的奖项席位统一进行分配。在全校院系范围内按 Q 值法将奖项席位分配给按式(1)计算的 Q 值最大的院系, 计算 Q 值时需将已分配到该院系的强分配和弱分配席位计算在内, 对于 Q 值法无法解决的“分配资格”问题, 将名额优先分配给尚未获得“分配资格”的人数最多的院系。定义  $y_i (i = 1, 2, \dots, s)$  表示分配给第  $i$  个院系的普通分配名额。

#### 4) 第四阶段。按席位分配普通分配要求的金额。

院系获得普通分配要求的席位后, 将所有具体奖项按金额从高到低排序, 然后在具有席位即  $y_i \neq 0 (i = 1, 2, \dots, s)$  的院系范围内参考 Q 值法的思路, 计算  $Q'$  值:

$$Q'_i = \frac{p_i^2}{b_i(b_i + a)}; i = 1, 2, \dots, s \quad (2)$$

$p_i (i = 1, 2, \dots, s)$  为第  $i$  个单位人数,  $b_i (i = 1, 2, \dots, s)$  为

该单位已分配到的奖金总额,  $a$  为当前待分配的奖金额。将当前待分配的奖项分配给按式(2)计算的  $Q'$  值最大的院系。对于  $Q$  值法无法解决的“分配资格”问题, 将奖项优先分配给尚未获得“分配资格”(已分配到的奖金总额为 0) 的人数最多的院系。定义  $z_{ij} = 0$  ( $i = 1, 2, \dots, s; j = 1, 2, \dots, n$ ) 表示第  $j$  项奖学金分配给第  $i$  个院系的普通分配名额, 则当将第  $j$  项奖学金分配给第  $i$  个院系时,  $z_{ij} = z_{ij} + 1$  ( $i = 1, 2, \dots, s; j = 1, 2, \dots, n$ ), 同时  $y_i = y_i - 1$  ( $i = 1, 2, \dots, s$ ), 重复上述过程直至所有奖项分配完毕, 即  $y_i = 0$  ( $i = 1, 2, \dots, s$ ), 此时得到最终分配结果  $D_i = \{w_{i1} + x_{i1} + z_{i1}, w_{i2} + x_{i2} + z_{i2}, \dots, w_{in} + x_{in} + z_{in}\}$  ( $i = 1, 2, \dots, s$ )。

### 3 应用及分配结果

基于  $Q$  值法的先席位后金额奖学金自动分配方案已被实际应用于清华大学研究生奖学金系统的自动分配功能中, 表 1 列出了使用四种算法对清华大学 2009–2010 学年度研

究生奖学金进行实际的自动分配的结果。这四种算法分别如下。1) 优先人均席位最少。在满足奖项分配要求的前提下, 将奖项优先分配给人均席位数最少的院系, 人均席位数相同时, 优先人数较多的院系。2) 优先人均奖金最少。在满足奖项分配要求的前提下, 将奖项优先分配给人均奖金数最少的院系, 人均奖金数相同时, 优先人数较多的院系。3) 按席位分配的  $Q$  值法。在满足奖项分配要求的前提下, 依据经典  $Q$  值法直接将奖项分配给  $Q$  值最大的院系, 及在本文介绍方案的第三阶段直接分配具体席位和金额, 不进行第四阶段的操作。4) 先席位后金额的  $Q$  值法, 即本文介绍的分配方案。分配过程均按照分配要求先强分配、后弱分配、最后一般分配, 奖项金额从高到低的顺序进行。其中, 算法(1)和算法(2)是最直观的方法, 清华大学研究生奖学金系统原先采用方法(2)进行自动分配, 方法(3)作为经典席位分配问题的典型用例与方法(4)进行比较, 以说明分阶段分配更加公平。

表 1 四种自动分配方案的分配结果

分配方案	总席位 平均值	人均席位 方差	最高人均 席位数	最低人均 席位数	总金额 平均值	人均奖金 方差	最高人均 奖金数	最低人均 奖金数
优先人均席位最少	0.08651	0.00001969	0.11111	0.08518	255.56	2290.50	357.14	140.90
优先人均奖金最少	0.08651	0.00025409	0.13054	0.04938	255.56	76.87	282.35	252.57
按席位分配的 $Q$ 值法	0.08651	0.00000138	0.08823	0.08333	255.56	2105.22	444.44	214.55
先席位后金额的 $Q$ 值法	0.08651	0.00000138	0.08823	0.08333	255.56	1271.64	388.88	229.06

从表 1 的分配结果可见, 采用按席位分配的  $Q$  值法和先席位后金额的  $Q$  值法进行分配时, 各院系获得人均席位数的方差明显优于前两种分配方案。先席位后金额的  $Q$  值法由于在席位公平的基础上考虑了金额公平, 其分配结果的人均奖金方差明显小于直接按席位分配的  $Q$  值法。优先人均奖金最少院系的分配方案虽然人均奖金方差最小, 但其人均席位方差过大, 存在较大的不公平。综合考虑席位公平和奖金公平两项要求, 本文介绍的先席位后金额的  $Q$  值法分配方案优于其他三种方案。

### 4 结语

本文讨论的基于  $Q$  值法的先席位后金额奖学金自动分配方案能够得到相对公平合理的分配结果, 并已在清华大学研究生奖学金系统中实际应用, 研究生工作部只需在自动分配结果的基础上进行少量手工调整, 使得原先需要几天时间才能完成的奖学金分配在几分钟之内就可以完成, 并且兼顾了公平性和灵活性, 取得了良好的应用效果。

#### 参考文献:

- [1] 万中, 罗汉. 席位分配问题的数学模型[J]. 湖南大学学报: 自然科学版, 2001, 28(6): 5–9.

(上接第 3131 页)

- [5] 李国平, 武海艳. 一种多机器人体系结构的设计[J]. 山东轻工业学院学报, 2010, 24(3): 17–20.  
[6] 毛宇峰. 水下机器人系统体系结构及避障控制技术研究[D]. 哈尔滨: 哈尔滨工程大学, 2010.  
[7] 吴琳, 梁建宏. 半自主侦察机器人的控制体系结构研究[J]. 机器人技术与应用, 2007(6): 34–38.  
[8] 李宝霞. 基于模糊算法的移动机器人路径规划[D]. 秦皇岛: 燕山大学, 2010.

- [2] LUCAS W F. Modules in applied mathematics. Vol 2: Political and Related Model[M]. New York: Springer-Verlay, 1983.  
[3] 岳林. 关于  $Q$  值法的一种新定义[J]. 系统工程, 1995, 13(4): 70–72.  
[4] 高尚. 席位分配的最大熵法[J]. 数学的实践与认识, 1996, 26(2): 73–75.  
[5] 林健良. 席位公平分配的最小极差法[J]. 华南理工大学学报: 自然科学版, 2001, 29(1): 10–13.  
[6] 孙玉秋.“D’ Hondt + Q 值法”席位分配模型[J]. 江汉石油学院学报, 2001, 23(1): 84–86.  
[7] 张华, 杨益民, 付必胜. 席位分配问题的有界整数变量规划模型及其应用[J]. 数学的实践与认识, 2010, 40(20): 18–23.  
[8] 张建勋. 席位分配问题的数学模型[J]. 数学的实践与认识, 2002, 32(4): 541–548.  
[9] 王志健. 席位分配问题的方法论基础[J]. 自然辩证法研究, 2000, 16(5): 30–33.  
[10] 赵洋. 席位分配及课堂点名模型的研究[D]. 西安: 西北工业大学, 2006.  
[11] 付必胜, 杨益民, 张华. 多指标席位分配模型及其应用[J]. 数理统计与管理, 2009, 28(4): 660–665.

- [9] 李会来, 李小民, 苏立军, 等. 一种适用于机器人避障的超声波测距系统设计与实现[J]. 仪表技术, 2010(7): 32–34.  
[10] 冯高辉, 马瑞平, 尹志勇. USB 接口的虚拟仪器设计与实现[J]. 电子元器件, 2007(6): 27–28.  
[11] 余晓鑫. 形状可变/多方位驱动救援机器人的控制系统设计[D]. 广州: 华南理工大学, 2010.  
[12] 芦东听, 张华强, 王陈. 基于 UDP 的可靠数据传递技术研究[J]. 计算机工程, 2003, 29(22): 62–63.