

混沌系统中寻找周期轨的算法综述

姚尚平*, 李清都

(重庆邮电大学 非线性电路与系统研究所, 重庆 400065)

(* 通信作者电子邮箱 476225048@qq.com)

摘要: 周期轨是混沌系统的基本骨架, 系统的很多重要特征和动力学性质都可以通过求解周期轨来确定, 例如 Lyapunov 指数的精确计算、拓扑熵的估计、以及混沌不变集的描述等。综述了目前常用的四种寻找周期轨的方法: NR 算法、Broyden 算法、SD 算法和 DL 算法, 分析其特点及相互关系, 然后结合具体计算实例, 详细探讨各方法的优缺点和适用范围, 得出 DL 算法是较为理想的搜索算法, 并对该领域的研究方向进行了展望。

关键词: 混沌; 周期轨; 迭代算法; 庞加莱截面; 数值计算

中图分类号: TP11 **文献标志码:** A

Survey on finding the periodic orbits in chaotic systems

YAO Shang-ping*, LI Qing-du

(Institute of Nonlinear Circuits and Systems, Chongqing University of Posts and Telecommunications, Chongqing 400065, China)

Abstract: The periodic orbits provide a skeleton for the organization of complex chaotic systems, for many important characteristics and dynamic properties of these systems can be determined by solving the periodic orbits, such as the accurate calculation of Lyapunov exponents, estimation of topological entropy and description of a chaotic invariant set. First, the paper reviewed the current commonly used four methods to find periodic orbits, which are NR algorithm, Broyden algorithm, SD algorithm and DL algorithm, and analyzed their characteristics and mutual relations. Second, the paper discussed the advantages, disadvantages and scope of each method with specific examples in detail. Finally, the paper pointed out that DL algorithm is more ideal among the four algorithms, and suggested the future research direction.

Key words: chaos; periodic orbit; iterative algorithm; Poincaré section; numerical computation

0 引言

周期轨在分析混沌系统时发挥着重要的作用。早在 1892 年, 庞加莱首先指出了周期轨的重要性。1975 年, 李天岩等发表了题为《周期三意味着混沌》的论文, 其中指出了简单区间上的连续映射只要具有 3 周期的轨道, 则一定具有以任何自然数为周期的轨道。在混沌吸引子中, 蕴含着无数的不稳定周期轨 (Unstable Periodic Orbits, UPO's), 系统的许多几何和物理性质都可以用这些周期轨的信息来确定, 例如: 自然测度、Lyapunov 指数、分形的维数、拓扑熵等^[1], 所以, 不稳定周期轨被看作是混沌系统的基本骨架。知道周期轨的位置后, 可以有效地控制混沌系统^[2]; 另外, 可以用周期轨求取不可积系统的量子能级, 这就是 Gutzwiller 的周期轨理论^[3], 这充分强调了不可积量子体系中周期轨的重要作用。因此, 寻找周期轨, 成为研究混沌动力学特性以及对混沌系统进行量子化的关键问题。

目前寻找周期轨的算法主要有: 庞加莱截面法^[1]、Newton-Raphson (NR) 算法^[4]、Broyden 算法^[5]、Schmelcher-Diakonos (SD) 算法^[6]、Davidchack-Lai (DL) 算法^[7]、延续的方法^[8]、粒子群优化算法^[9]、变分法^[10]、Biham-Wenzel (BW) 算法^[11-13]、区间算法^[14-16]等, 这些算法各有优劣。其中, 庞加莱截面法比较直观, 但是不能直接获得足够精度的周期轨位置坐标; NR 算法在搜索低维混沌系统的短周期轨时, 效果比较好, 但不适用于复杂的高维混沌系统; Broyden 算法的计算复杂度低于 NR 算法, 但不适用于搜索高周期轨和复杂的高维混沌系统的周期轨; SD 算法扩大了周期轨的吸引盆, 具有

全局收敛的优点, 在搜索不稳定周期轨时表现优异, 但对于高维系统所需的变换矩阵数目巨大; DL 算法兼具 NR 算法和 SD 算法的优点, 是一种较为理想的搜索算法; 粒子群优化算法的优点是不需要求导, 可搜索不可微/不连续系统的周期轨, 不足之处在于搜索的效率不高; 变分法适用于拓扑结构比较特殊的系统; BW 算法适用于搜索 Hénon 类系统的周期轨, 但不能一般化, 对于系统的某些参数, 该搜索算法会失效; 区间算法求得的周期轨结果比较严格, 但是由于区间依赖和包裹效应, 随着时间的增长, 区间解扩散速度过快, 使得区间数值结果失去意义。接下来本文将结合具体的例子, 对这些方法的优缺点及应用范围进行详细阐述。

1 常用的周期轨寻找算法

目前, 文献中的大多数寻找周期轨的方法都是针对离散系统提出的, 考虑如下一个 n 维的混沌系统:

$$\mathbf{x}_{n+1} = f(\mathbf{x}_n) \quad (1)$$

f 是一个光滑的映射, 系统 (1) 的 p 周期轨道点显然就是系统 (2) 的零解:

$$g(\mathbf{x}) = f^{(p)}(\mathbf{x}) - \mathbf{x}; \mathbf{x} \in \mathbf{R}^n \quad (2)$$

其中 $f^{(p)}$ 为 f 的 p 次迭代, 因此, 可以用求解非线性方程的方法来寻找混沌系统的周期轨。对于一个 n 维的连续自治系统 $\frac{d\mathbf{x}}{dt} = f(\mathbf{x})$, 可以用庞加莱截面法将该连续系统离散化。令 Σ 是一个超平面 (庞加莱截面), 庞加莱映射 $P: \Sigma \rightarrow \Sigma$ 定义为 $P(\mathbf{x}) = f(\tau(\mathbf{x}), \mathbf{x})$, 这里 $f(t, \mathbf{x})$ 是系统从 \mathbf{x} 出发的轨道, $\tau(\mathbf{x})$ 是轨道 $f(t, \mathbf{x})$ 再次返回 Σ 所需的时间, P 的周期点就对

收稿日期: 2011-08-10; 修回日期: 2011-09-11。 基金项目: 国家自然科学基金资助项目 (10926072)。

作者简介: 姚尚平 (1986 -), 男, 重庆长寿人, 硕士研究生, 主要研究方向: 动力系统、数值计算; 李清都 (1980 -), 男, 重庆人, 副教授, 博士, 主要研究方向: 混沌动力系统、流形计算。

应连续系统的周期轨。对于庞加莱截面(如图1所示)上的点 x_0 ,当轨道 $f(t, x_0)$ 再次和 Σ 相交时,记交点为 x_1 ,称为一次迭代。周期轨迹会在截面上留下一系列的孤立点,如果从截面上观察这个周期轨,它在该截面上留下 n 个截点,我们就说它的周期是 n ,因此,通过观察截面就可求得连续系统的周期轨。但是混沌运动则会在截面上留下大量不规则的点,对于弥散于混沌轨迹“海洋”中间的不稳定的周期轨,无法通过观察庞加莱截面获得,这就需要用接下来介绍的方法。

常用的寻找周期轨的方法有NR算法、Broyden算法、SD算法和DL算法,这些算法都是基于迭代的思想,即给定一个初始点,然后迭代收敛到混沌系统的某一个周期轨道点上。

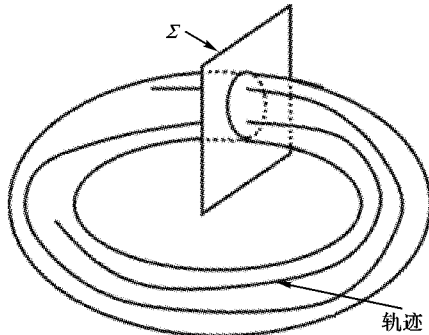


图1 庞加莱截面

1.1 NR算法

NR算法是牛顿在17世纪提出的一种在实数域和复数域上近似求解方程的方法^[17],1690年,Joseph Raphson在其著作《Analysis aequationum universalis》中从纯代数的角度,用逐次逼近 x_n 的形式简化了牛顿迭代法,该方法是基于迭代的思想。NR算法的迭代规则为

$$x_{n+1} = x_n - J^{-1}(x_n)g(x_n); n = 0, 1, \dots$$

其中: $J(x)$ 为 $g(x)$ 的雅可比矩阵,即 $J(x) = \frac{\partial g}{\partial x}$ 。寻找系统(1)的 p 周期轨道的算法如下:首先选取合适的初始点 x_0 ,然后按照式(3)的迭代规则进行反复的迭代,直至 $\|g(x_{n+1})\| \leq \text{eps}$ (eps 为一个很小的正数),记录得到的 x_{n+1} ,就是我们要寻找的 p 周期轨上的一个点。当初始点 x_0 位于周期轨道点的线性邻域内时,NR算法是二次收敛的^[18]。

继牛顿之后,许多学者在NR算法上做了大量的工作,对NR算法进行了分析和改进,积累了许多优秀的文献^[19-25]。

进一步分析,发现用NR迭代规则式(3)求系统(2)的零解时,每次迭代都不可避免地要计算雅可比矩阵 J 及其逆矩阵 J^{-1} ,对于高维系统, J 和 J^{-1} 的计算量很大,有时这种计算甚至是不可能的,Broyden算法则很好地解决了这个问题。

1.2 Broyden算法

Broyden算法是割线法^[4]在高维时的一般化。在开始讨论前先回顾一下Broyden更新公式。假设 $g: \mathbf{R}^n \rightarrow \mathbf{R}^m$ 是一个光滑映射,由Taylor公式得

$$g'(x_n)(x_{n+1} - x_n) = g(x_{n+1}) - g(x_n) + O(\|x_{n+1} - x_n\|^2) \quad (4)$$

忽略高阶项,同时令

$$s_n = x_{n+1} - x_n, y_n = g(x_{n+1}) - g(x_n) \quad (5)$$

得到割线方程

$$As_n = y_n \quad (6)$$

其中雅可比矩阵 $A \approx g'(x_n)$ 。当采用NR算法即式(7)时,自然就会想到下一个雅可比矩阵 A_{n+1} 也应满足割线方程 $A_{n+1}s_n = y_n$ 。

$$x_{n+1} = x_n - A_n^{-1}g(x_n) \quad (7)$$

Broyden提出了一个比较好的更新公式^[14]定义如下, A_{n+1} 是式(8)的解:

$$\min \{ \|A - A_n\|_F \mid As_n = y_n \} \quad (8)$$

其中 $\|\cdot\|_F$ 是F范数。采用正交投影计算得

$$A_{n+1} = A_n + \frac{y_n - A_n s_n s_n^T}{\|s_n\|^2} \quad (9)$$

寻找系统(1)的 p 周期轨道的Broyden算法如下:

- 1) 在系统的状态空间中随机、均匀地产生一系列的初始点,使得它们能粗略地覆盖整个状态空间。
- 2) 对于每一个初始点 $x_0^{(i)}$,取 $A_n \approx g'(x_0^{(i)})$, $x_n = x_0^{(i)}$ 。
- 3) 用式(7)、(5)、(9)进行计算。
- 4) 重复步骤3),直至满足精度要求 $\|g(x_{n+1})\| \leq \text{eps}$ 。

Broyden算法和NR算法是比较快捷的寻找低周期轨的方法。在实际应用中,受限于其局部收敛的特性,这种限制在寻找高周期轨时表现得尤为明显。因为随着周期 p 的增加,周期轨的吸引盆呈指数减小,从而使获得比较好的初始点变得几乎不可能。因此,要寻找高周期轨,上述方法都不合适,这就需要用SD算法。

1.3 SD算法

SD算法的基本思想是:用一个通用集把原始系统的不稳定周期轨道线性转换为稳定的周期轨道,并且保持其在坐标空间中的位置不变,这些稳定的周期轨道可以通过简单的迭代运算加以确定,这样我们就找到了原始系统的UPO's。

以系统(1)的一周期轨(不动点)为例,为了达到上述的目标,构建不同的动态系统 $\{S_k \mid k = 1, 2, 3, \dots, m\}$,其具体形式如下:

$$S_k: x_{n+1} = x_n + A_k[f(x_n) - x_n] \quad (10)$$

其中 A_k 是一个可逆的 $n \times n$ 常数矩阵。可以验证,假如 $x_n = x^*$ 为系统(1)的一个不动点,则有

$$f(x_n) - x_n = 0 \quad (11)$$

由式(10)、(11)可得: x^* 也是 S_k 的一个不动点;反之,当 x^* 是 S_k 的一个不动点时,由于 A_k 可逆,所以式(11)一定成立,因此, x^* 也必然是系统(1)的一个不动点。为了稳定转换后的系统 S_k 的不动点,必须选择合适的 A_k ,实践证明,存在一个矩阵的通用集,使得其中至少有一个矩阵 A_k 能够满足转换的需求。令 $A_k = \lambda C_k$,数值计算中,取 $0 < \lambda < 1$, $(C_k)_{ij} \in \{0, \pm 1\}$,而且 C_k 的每行与每列只能有一个元素异于0,在 n 维空间中, C_k 的个数为 $n!2^n$ 。为了寻找系统的 p 周期轨道,只需要将上面讨论的 $f(\cdot)$ 全部替换为 $f^{(p)}(\cdot)$ 即可。

基于上述的讨论,寻找系统(1)的 p 周期轨道的算法如下:

- 1) 在系统的状态空间中随机地选择一系列的初始点,使得它们能粗略地覆盖整个状态空间。
- 2) 选择 C_1 和充分小的参数值 λ ,依次将为初始点进行迭代,直至迭代轨道渐近收敛于一个稳定的周期轨道。
- 3) 以 C_2 代替 C_1 ,重复以上的过程,直到集合 $\{C_k\}$ 中所有的 C_k 都被用到。

需要注意的是:随着 p 的增加,参数值 λ 要不断地减小。

SD算法在寻找不稳定的周期轨时最有效,然而,它却不能保证找出了周期为 $p(p > 3)$ 的所有周期轨,原因有两点:1)SD算法的收敛速度非常慢,要达到设定的精度要求需要大量的迭代;2)尽管SD算法是全局收敛的,然而个别的周期轨的吸引盆以一种复杂的方式交织在一起,因此不能决定初始点最终收敛到哪个周期轨上。而DL算法则克服了SD算法收敛速度慢的缺点,同时保留了它全局收敛的优势。

1.4 DL 算法

DL 算法结合了 NR 算法和 SD 算法,不仅保留了传统 NR 算法收敛速度快的特点,还保持了 SD 算法全局收敛的特性。

简要地回顾一下 NR 算法和 SD 算法,寻找 x^* 使得 $g(x^*) = 0$ 的过程为:首先选定初值 x_0 ,然后按下式迭代:

$$x_{n+1} = x_n + \delta x \quad (12)$$

δx 为修正因子。在 NR 算法中,

$$\delta x = -J^{-1}(x)g(x) \quad (13)$$

在 SD 算法中,

$$\delta x = \lambda Cg(x) \quad (14)$$

利用 NR 算法和 SD 算法的思想,我们构造下式:

$$[I\beta \|g(x)\| - CJ(x)]\delta x = Cg(x) \quad (15)$$

这是一个改良的半隐式欧拉表达式,其中: I 为单位矩阵, $\beta > 0$ 为可调参数, C 的含义和式 (14) 一样。可以发现:

1) 当迭代序列位于某个 UPO 附近时, $\|g(x)\|$ 趋于 0, 式 (15) 就近似变为式 (3), 这时的搜索算法近似为 NR 算法, 因此保留了 NR 算法收敛速度快的特点; 2) 另一方面, 当迭代点远离目标 UPO 时, 取一个非常大的 β , 式 (15) 近似变为式 (10), 此时的搜索算法近似为 SD 算法, 因此具备了 SD 算法全局收敛的优点。

2 数值模拟

例 1 用上述的四种方法求 Ikeda 映射^[26] 的 2 周期轨和 7 周期轨, 它们分别代表低周期轨和高周期轨, Ikeda 映射的表达式如下:

$$\begin{cases} x_{n+1} = 1 + 0.9(x_n \cos w_n - y_n \sin w_n); \\ y_{n+1} = 0.9(x_n \sin w_n + y_n \cos w_n) \\ w_n = 0.4 - \frac{6}{1 + x_n^2 + y_n^2} \end{cases} \quad (16)$$

仿真是在 MatlabR2008a 平台下完成的, 在程序中, 初始点是在相空间中随机获取的, 精度 $eps = 1.0E-8$, $C_1 = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$, $C_2 = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}$, $C_3 = \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$, $C_4 = \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}$, $C_5 = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$, $p = 2$ 时, $\lambda = 0.08$, $\beta = 3$, $p = 7$ 时, $\lambda = 0.02$,

$\beta = 30$, NR 算法、Broyden 算法、SD 算法和 DL 算法的迭代上限依次取 20、30、1000 和 6β 。由于系统是离散的, 因此无法直接求得 x_i 处的雅可比矩阵 $J(x_i)$, 我们用局部线性化的方法来解决这个问题, 具体过程如下: 在 x_i 的邻域 $\delta = 0.001$ 内, 正交地取两个点 x_i^1 和 x_i^2 , 满足 $V_1 = x_i^1 - x_i = \delta * [1; 0]$, $V_2 = x_i^2 - x_i = \delta * [0; 1]$, 设 x_i, x_i^1 和 x_i^2 经过式 (16) 分别映射为 $x_i', x_i^{1'}$ 和 $x_i^{2'}$, 取 $U_1 = x_i^{1'} - x_i'$, $U_2 = x_i^{2'} - x_i'$, $U = [U_1 \ U_2]$, 则有 $J(x_i) \approx U/\delta$ 。

四种算法详细的对比结果如表 1 所示, 从表中可以看到 NR 算法的收敛速度最快, Broyden 算法次之, 最慢的是 SD 算法; 在寻找低周期轨时, NR 算法和 Broyden 算法的效率优于另外两种算法; 但是, 随着 p 的增加, 不稳定周期轨的吸引盆呈指数缩小, 使得获得较好的初始点变得几乎不可能, 此时 NR 算法和 Broyden 算法失效, SD 算法和 DL 算法在寻找高周期轨时, 表现优异。图 2 是 $p = 2$ 时, SD 算法和 DL 算法的收敛过程图, 从图中可以看到, 这两个算法都具有全局收敛的特性, 即使是同一个初始点, 不同的稳定矩阵 C 可以使它最终收敛到不同的周期轨道点上。结合表 1 还可以看出, DL 算法不仅具有全局收敛的特性, 同时还兼具 NR 算法收敛速度快的优势。

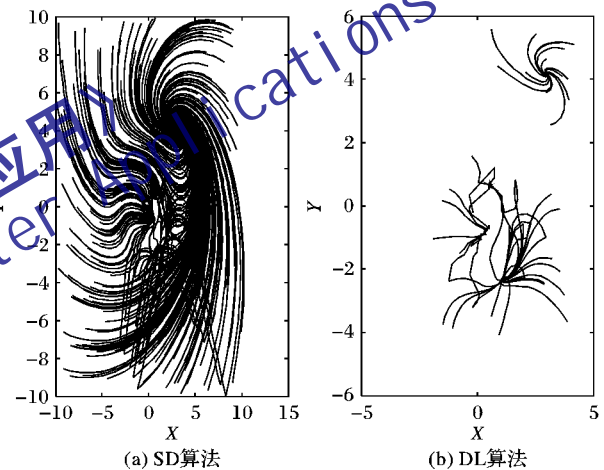


图2 $p = 2$ 时 SD 算法和 DL 算法的收敛过程

表1 四种算法搜索 Ikeda 映射 2 周期和 7 周期 UPO'S 的性能比较

算法	$p = 2$				$p = 7$			
	初始点的个数	周期轨道点的个数	总的迭代次数	算法执行时间/s	初始点的个数	周期轨道点的个数	总的迭代次数	算法执行时间/s
NR 算法	300	4	1999	0.2500	2000	2	9725	1.2760
Broyden 算法	300	4	3298	0.3740	2000	3	18981	2.1480
SD 算法	300	4	1474452	45.3340	2000	20	9237644	324.4680
DL 算法	300	4	25301	2.7300	2000	20	1463034	185.1220

例 2 用上述的方法寻找超混沌广义 Hénon 映射的不动点, 该映射表达式如下:

$$\begin{cases} x_{n+1} = 1.76 - y_n^2 - 0.1z_n \\ y_{n+1} = x_n \\ z_{n+1} = y_n \end{cases} \quad (17)$$

初始点是在相空间中随机产生的, 精度 $eps = 1.0E-8$, NR 算法、Broyden 算法、SD 算法和 DL 算法的迭代上限依次取 30、30、1000 和 30。对于三维系统, 矩阵 C_k 可取的个数为 48 个, 在 SD 算法中, 用到了其中的 16 个, 它们分别是:

$$C_1 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad C_2 = \begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{bmatrix}$$

$$\begin{aligned} C_3 &= \begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} & C_4 &= \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \\ C_5 &= \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{bmatrix} & C_6 &= \begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \\ C_7 &= \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{bmatrix} & C_8 &= \begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{bmatrix} \\ C_9 &= \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} & C_{10} &= \begin{bmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
C_{11} &= \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} & C_{12} &= \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} \\
C_{13} &= \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} & C_{14} &= \begin{bmatrix} 0 & 0 & -1 \\ -1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \end{bmatrix} \\
C_{15} &= \begin{bmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \\ -1 & 0 & 0 \end{bmatrix} & C_{16} &= \begin{bmatrix} 0 & 0 & -1 \\ 0 & -1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \end{bmatrix}
\end{aligned}$$

在 DL 算法中,只用到了 $C_1 \sim C_8$, 参数 $\lambda = 0.08, \beta = 3$ 。数值计算结果如表 2 所示,从中可以看出,虽然 Broyden 算法的收敛速度没 NR 算法收敛速度快,但是算法执行时间却是一样的,因为 Broyden 算法避免了雅可比矩阵复杂的重复计算和分解过程,数值模拟表明,随着系统维数的增加,这种优势越来越明显。从上述数据中还可以看到,随着系统维数的增加,DL 算法所需的矩阵 C_k 的数量并未明显增加。

表 2 四种算法搜索 Hénon 映射 1 周期 UPO'S 的性能比较

算法	$p = 1$			
	初始点的个数	周期轨道点的个数	总的迭代次数	算法执行时间/s
NR 算法	200	2	1 172	0.1250
Broyden 算法	200	2	1 335	0.1250
SD 算法	200	2	3 041 245	55.0520
DL 算法	200	2	47 885	3.7130

3 结语

在上述求周期轨的方法中,庞加莱截面法比较直观,只适用于维数比较低的系统,但是不能直接获得足够精度的周期轨位置坐标^[27];NR 算法是一个比较普遍的求取短周期轨的方法,收敛速度快,适用于拓扑结构易知的低维系统,然而对于高维系统,其拓扑结构非常复杂,从而使选择比较好的初始点变得几乎不可能,这时 NR 算法将失效;相比之下,Broyden 算法以牺牲收敛速度来避免了 NR 算法中对雅可比矩阵的大量重复计算,计算的效率比较高;而 SD 算法则通过稳定变换,把不稳定的周期轨变成稳定周期轨,从而具有全局收敛性,克服了随着周期 p 的增加,不稳定周期轨的吸引盆缩小的问题,对于高维系统,仍然面临着严峻的问题—稳定变换所需的矩阵数目非常巨大;DL 算法结合了 NR 算法和 SD 算法的各自优势,同时克服了 SD 算法的缺点,其可靠性不受系统维数的影响,能保证搜索的全面性,是一种较为理想的搜索算法。

此外,还有很多方法可以用来寻找混沌动力系统的周期轨,例如延续的方法可以用来寻找对某些参数连续依赖的动力系统的周期轨,粒子群优化算法可以用来寻找低维混沌系统的周期轨,变分法可以用来求解经典 n 体问题的周期轨,Biham-Wenzel 法可以用来寻找 Hénon 类型系统的周期轨,区间算法已经成功用于寻找 Lorenz 系统、Ikeda 映射的周期轨。

人们发现利用普通计算机浮点算法尽管可以在局部数值估计周期轨的位置,但是无法严格验证上述数值估计是否接近理论解,由于混沌运动对初值非常敏感,因此极小的误差都会带来不可估计的变化,有时甚至会导致错误结论,对于高维系统表现得尤为明显。如何从数值的角度严格判定所求得的周期轨确实存在于实际的系统中以及确定周期的周期轨是否

已经被全部找出,是目前混沌系统分析中的一个亟待解决的重要问题。

参考文献:

- [1] OTT E. Chaos in dynamical systems[M]. London: Cambridge University Press, 2002.
- [2] OTT E, GREBOGI C, YORKE J A. Controlling chaos[J]. Physical Review Letters, 1990, 64(11): 1196–1199.
- [3] GUTZWILLER M C. Chaos in classical and quantum mechanics[M]. Berlin: Springer-Verlag, 1990.
- [4] FLANNERY B P. Numerical recipes in C: The art of scientific computing[M]. London: Cambridge University Press, 1988.
- [5] BROYDEN C G. A class of methods for solving nonlinear simultaneous equations equation[J]. Mathematics of Computation, 1965, 19(92): 577–593.
- [6] SCHMELCHER P, DIAKONOS F. General approach to the localization of unstable periodic orbits in chaotic dynamical systems[J]. Physical Review E, 1998, 57(3): 2739–2746.
- [7] DAVIDCHACK R L, LAI Y C. Efficient algorithm for detecting unstable periodic orbits in chaotic systems[J]. Physical Review E, 1999, 60(5): 6172–6175.
- [8] WEDIN H, KERSWELL R R. Exact coherent structures in pipe flow: Travelling wave solutions[J]. Journal of Fluid Mechanics, 2004, 508: 333–371.
- [9] PITSODIULOS K E, VRAHATIS M N. Computing periodic orbits of nonlinear mappings through particle swarm optimization[C]// Proceedings of the 4th GRACM Congress on Computational Mechanics. Patras, Greece: [s. n.], 2002: 27–29.
- [10] SIMÓ C. New families of solutions in N -Body problems[C]// Proceedings of the ECM 2000. Barcelona: European Congress of Mathematics, 2001: 10–14.
- [11] BIHAM O, WENZEL W. Unstable periodic orbits and the symbolic dynamics of the complex Henon map[J]. Physical Review A, 1990, 42(8): 4639–4646.
- [12] BIHAM O, WENZEL W. Characterization of unstable periodic orbits in chaotic attractors and repellers[J]. Physical Review Letters, 1989, 63(8): 819–822.
- [13] POLITI A, Torcini A. Towards a statistical mechanics of spatiotemporal chaos[J]. Physical Review Letters, 1992, 69(24): 3421–3424.
- [14] GALIAS Z. Interval methods for rigorous investigations of periodic orbits[J]. International Journal of Bifurcation and Chaos, 2001, 11(9): 2427–2450.
- [15] GALIAS Z. Rigorous investigation of the Ikeda map by means of interval arithmetic[J]. Nonlinearity, 2002, 15(6): 1759–1779.
- [16] GALIAS Z, TUCKER W. Short periodic orbits for the Lorenz system[C]// ICSES '08: International Conference on Signals and Electronic Systems. Piscataway: IEEE, 2008: 285–288.
- [17] NEWTON I. De methodus fluxionum et serierum infinitarum[M]. London: [s. n.], 1736.
- [18] RALL L B. A note on the convergence of Newton's method[J]. SIAM Journal on Numerical Analysis, 1974, 11(1): 34–36.
- [19] ARGYROS I K. On Newton's method under mild differentiability conditions and applications[J]. Applied Mathematics and Computation, 1999, 102(2/3): 177–183.
- [20] 司智勇. Newton 型方法的推广与改进[J]. 数值计算与计算机应用, 2008, 29(3): 171–175.

相位差分别为 $0, \pi/6, \pi/3, \pi/2$ 时的修正 MUSIC 谱。当信号相差为 0 时,修正 MUSIC 算法不能正确测向。而随着相位差的增加,修正 MUSIC 谱峰值越大,测向精度越高。(图 3 为俯仰角为 15° ,截取方位角切面图)。

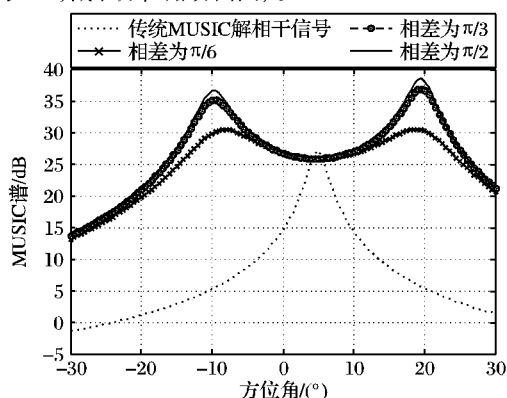


图3 测向精度与相差的关系

从图3可以看出,MMUSIC 算法在多径传播产生的相差不为零时,性能优于传统的 MUSIC,能够对相干信号正确测向,并且随着相差越大,谱峰越尖锐,测向精度越高。

实验2 MMUSIC 算法的分辨性能。

来波信号为两相干信号,两信号相差在 $[0, 90^\circ]$ 随机分布,信噪比为 15 dB,快拍数为 1000,采用均匀圆阵,阵元个数 $M=6$,圆阵半径 0.2 m,信号频率为 1.5 GHz,两信号来波为 $(4, 15)$ $(10, 15)$,第二个来波方向不变,第一个来波的方位角从 4 增大到 8,所以两信号方位角间隔分别为 $6^\circ, 5^\circ, 4^\circ, 3^\circ, 2^\circ$,如果单次测向精度在 1° 内,则判断测向成功,独立实验 200,实验结果如表 1 所示。

表1 修正 MMUSIC 算法测向成功概率

信号 间隔/ $^\circ$	二维 MMUSIC 算法成功概率/%	信号 间隔/ $^\circ$	二维 MMUSIC 算法成功概率/%
6	93.50	3	73.00
5	92.00	2	49.00
4	92.00		

由表1可以看出,文中提出的二维 MMUSIC 在该实验条件下,能够成功分辨间隔在 4° 以上的信号,且成功分辨的概率能够到达 90% 以上。能够满足实际环境中对两间隔很近的相干信号的分辨条件。

从实验1与实验2可以看出,本文提出的二维 MMUSIC 测向能够对相干信号进行测向,且在一定的实验条件下能够满足实际系统的性能指标,而传统 MUSIC 二维测向完全不能对相干信号进行处理。因此,相对于传统二维 MUSIC 算法,

二维 MMUSIC 算法在计算量上只增加了 $M \times M$ 次加法,但解相干性能却得到了质的提升。

4 结语

本文首先从相关信号的定义出发,对信号的相关性进行了讨论。得出对于复信号模型,只有固定相位差的同频信号之间才是相干的,与信号相位差无关,且不能直接利用传统的 MUSIC 算法对相干信号进行测向。其次将修正 MUSIC 算法应用于中心对称平面阵的二维 DOA 估计中,并理论推导出修正 MUSIC 算法的解相干性能与信号的余弦值呈反比。最后仿真实验验证了该算法测向精度与相干信号相差之间的关系,在实验2条件下,本文所提出的二维 MMUSIC 算法对相隔 4° 以上两相干信号的分辨概率能够达到 90% 以上。

参考文献:

- [1] SCHMIDT R O. Multiple emitter location and signal parameter estimation [J]. IEEE Transactions on Antennas and Propagation, 1986, 34(3): 276-280.
- [2] SHAN T J, KAILATH T. Adaptive beamforming for coherent signals and interference [J]. IEEE Transactions on Acoustics, Speech and Signal Processing, 1985, 33(3): 527-536.
- [3] PHILLAI S U, KWON B H. Forward-backward spatial smoothing techniques for coherent signal identification [J]. IEEE Transactions on Acoustics, Speech and Signal Processing, 1989, 37(1): 8-15.
- [4] KUNDU D. Modified MUSIC algorithm for estimating DOA of signals [J]. Signal Processing, 1996, 48(1): 85-89.
- [5] 何子述,黄振兴,向敬成.基于数据阵共轭重构的 MUSIC 角估计算法[J].电子科技大学学报,1999,28(2):111-114.
- [6] 何子述,黄振兴,向敬成.修正 MUSIC 算法对相关信号源的 DOA 估计性能[J].通信学报,2000,21(10):14-17.
- [7] 徐旭,叶中付,张裕峰.基于中心对称圆阵的不相关源和相干源的 DOA 估计[J].中国科学技术大学学报,2009,39(11):1125-1129.
- [8] SHI XIN-ZHI, WANG GAO-FENG, SHI ZHEN-HUA. A study on the applicability for nonlinear array based on MMUSIC algorithm [C]// OCEANS'04: MTS/IEEE TECHNO-OCEAN'04. Piscataway: IEEE, 2004, 3: 1181-1185.
- [9] YE ZHONGFU, LI XIANG, XU XU. DOA estimation with circular array via spatial averaging algorithm [J]. IEEE Antennas and Wireless Propagation Letters, 2007, 6(1): 74-76.
- [10] 王永良,陈辉,彭应宁.空间谱估计理论与算法[M].北京:清华大学出版社,2004:38-40.
- [11] 熊波,李国林,尚雅玲.信号相关性与 DOA 估计[J].电子科技大学学报,2007,36(5):907-910.
- [12] 何子述,夏威,程婷,等.现代数字信号处理及其应用[M].北京:清华大学出版社,2009:287-288.

(上接第572页)

- [21] GERLACH J. Accelerated convergence in Newton's method [J]. SIAM Review, 1994, 36(2): 272-276.
- [22] 薛雅萍.牛顿迭代法的改进格式及其收敛阶[D].北京:北京化工大学,理学院,2008.
- [23] 王颖,潘状元.用行列修正拟 Newton 法求解奇异问题[J].哈尔滨理工大学学报,2010,15(4):64-67.
- [24] 郭学萍.避免映射求逆的变形 Newton 迭代的收敛性和误差估计[J].浙江大学学报:理学版,2001,28(4):377-383.
- [25] 代少升,肖茜.基于修正的拟牛顿法的基追踪去噪研究[J].重庆邮电大学学报:自然科学版,2010,22(6):729-733.
- [26] IKEDA K. Multiple-valued stationary state and its instability of the transmitted light by a ring cavity system [J]. Optics Communications, 1979, 30(2): 257-261.

- [27] 周丰,关治洪.利用庞加莱截面寻找陈氏混沌系统失稳周期轨道[J].计算技术与自动化,2003,22(3):30-32.
- [28] 丘水生.混沌吸引子周期轨道理论研究:II[J].电路与系统学报,2004,9(1):1-5.
- [29] 王培杰,吴国祯.混沌体系中寻找周期轨迹的方法[J].物理学报,2005,54(7):3034-3043.
- [30] 岳毅宏,韩文秀.混沌系统不稳定周期轨道的搜索算法[J].控制理论与应用,2004,21(3):427-431.
- [31] 王建军.关于离散动力系统的周期轨道[D].桂林:广西师范大学,2007.
- [32] ZONG XIAO-PING, GENG JUN, HUO JUN-XIU. Control of arbitrary periodic orbit of logistic map [C]// ICMLC 2010: International Conference on Machine Learning and Cybernetics. Piscataway: IEEE, 2010:875-878.