

## 基于双正交基字典学习的图像去噪方法

解凯\*, 张芬

(北京印刷学院 信息与机电工程学院, 北京 102600)

(\*通信作者电子邮箱 kaixiek@126.com)

**摘要:**为了提高图像去除白高斯噪声的性能,利用超完备字典作为图像的稀疏表示。超完备字典的冗余性可以有效地表示图像的各种几何奇异特征。在贝叶斯框架下,以图像块的稀疏表示定义了全局图像先验概率模型,给出了最大后验概率模型下的优化图像去噪算法。超完备字典使用两个不同的正交基构成,给出了基于奇异值分解(SVD)的优化字典计算方法。该方法充分利用正交基的特点,采用SVD方法进行高效的字典学习。基于双正交基字典的去噪算法提高了图像去噪性能,实验结果证实了所提方法的有效性。

**关键词:**图像去噪;字典学习;稀疏表示;奇异值分解;贝叶斯估计

**中图分类号:** TN911.73 **文献标志码:** A

### Image denoising method based on dictionary learning with union of two orthonormal bases

XIE Kai\*, ZHANG Fen

(School of Information and Mechanical Electronic Engineering, Beijing Institute of Graphic Communication, Beijing 102600, China)

**Abstract:** Overcomplete dictionary was used to represent an image sparsely in order to improve image denoising performance. The sparse representation may represent efficiently the singular geometry of the images with the redundancy of over-complete dictionary. Global image prior model based on the sparse representation of image patches was presented in Bayesian framework. Then maximum a posteriori probability estimator for denoising image was constructed. The dictionary was composed of two orthonormal bases. A method based on singular value decomposition was used for dictionary learning. The orthonormal property was used to update the one chosen basis effectively. The method can improve the performance of image denoising. The experimental results verify the validity of the method.

**Key words:** image denoising; dictionary learning; sparse representation; Singular Value Decomposition (SVD); Bayesian estimation

图像去噪的主要目标就是把被污染噪声的图像恢复为原始图像。小波变换用于图像去噪是近十年来的主要研究方向,但一维正则化分离小波并不适应于图像处理。因此研究人员考虑非抽样小波、Steerable小波<sup>[1]</sup>、Ridgelets<sup>[2]</sup>、Contourlet<sup>[3]</sup>和Curvelet<sup>[4]</sup>等变换。这些变换充分考虑了图像的某些几何特征,但每一种变换只对某些特征的表示是稀疏的。自然图像中往往包含各种特征,仅采用某一种变换很难对所有特征进行有效表示。一种办法是将多种基级联构造造成超完备字典,以实现图像的有效分解,但产生的字典规模巨大,限制了其应用。其次,通过学习、训练来获得超完备字典方法近两年得到了发展,如Kreutz等<sup>[5]</sup>考虑到图像之间的相似性,结合聚类算法用于字典学习。Aharon等<sup>[6]</sup>将K均值聚类方法推广为K-SVD算法,用于字典自适应更新。赖剑煌等<sup>[7]</sup>将字典学习转化为一个二次规划问题,并提出适合于大规模运算的投影梯度算法,均取得了不错的效果。但这些算法效率较低,没有有效地利用字典的内在联系。

### 1 基于贝叶斯重建的图像去噪模型

考虑一个噪声图像:

$$Y = X + V \quad (1)$$

其中:Y是观测到的图像,X是未知的原图像,V是叠加的零均值白高斯噪声。本文目标是设计一个算法从Y中删除噪声使其尽可能地接近原图像X。

假设图像块为 $\sqrt{n} \times \sqrt{n}$ 个像素,排列形成向量 $y \in \mathbf{R}^n$ 。对于稀疏表示,定义一个字典 $D \in \mathbf{R}^{n \times m}$ ,其中 $n < m$ ,说明字典是冗余的,为超完备字典。用字典D最稀疏表示图像块y的解为:

$$\min \|\alpha\|_0 \quad (2)$$

$$\text{s. t. } \|D\alpha - y\|_2^2 \leq \varepsilon$$

其中 $\|\alpha\|_0$ 是 $L_0$ 范数,表示不为零的元素个数。稀疏表示的主要思想就是图像信号y分解为字典中最少的一组列向量(亦称原子),其线性组合表示的信号与y的平方误差小于 $\varepsilon$ 。由于上述公式的组合性质,因此求解是非常困难的。目前常用的近似算法为匹配追踪算法(Matching Pursuit, MP)、正交匹配追踪算法(Orthogonal Matching Pursuit, OMP)及基追踪算法(Basis Pursuit, BP)<sup>[8]36-37</sup>等。本文采用实现较简单的正交匹配追踪OMP算法。

对于叠加零均值白高斯噪声图像块y,噪声的标准方差为 $\sigma$ ,对应的原图像x采用式(2)进行稀疏表示。采用贝叶斯最大后验概率去求解原图像,则去除图像块噪声的最大后验估计(Maximum A Posteriori, MAP)为:

$$\hat{\alpha} = \arg \min_{\alpha} \|\alpha\|_0 \quad (3)$$

$$\text{s. t. } \|D\alpha - y\|_2^2 \leq T$$

其中T为阈值,与 $\varepsilon$ 和 $\sigma$ 相关。则去噪后的图像为 $\hat{x} = D\hat{\alpha}$ 。注意上述优化任务可表示为:

$$\hat{\alpha} = \arg \min_{\alpha} \|D\alpha - y\|_2^2 + \mu \|\alpha\|_0 \quad (4)$$

收稿日期:2011-09-08;修回日期:2011-11-28。 基金项目:北京市属高等学校人才强教计划项目(PXM2010\_014223\_095557)。

作者简介:解凯(1962-),男,天津人,教授,博士,CCF会员,主要研究方向:图像复原、超分辨率图像重建、信号稀疏表示;张芬(1988-),女,江西南昌人,硕士研究生,主要研究方向:图像复原、信号稀疏表示。

其中为  $\mu$  正则化参数,需要合适地选择。

设完整图像  $X$  的大小为  $\sqrt{N} \times \sqrt{N}$ , 将图像分成相互重叠的小图像块,可在减小每个原子大小的同时大大降低字典的规模。对于完整图像  $X$ ,基于稀疏表示的 MAP 估计为:

$$\{\hat{\alpha}_{ij}, \hat{X}\} = \arg \min_{\alpha_{ij}, X} \lambda \|X - Y\|_2^2 + \sum_{ij} \|D\alpha_{ij} - P_{ij}X\|_2^2 + \sum_{ij} \mu_{ij} \|\alpha\|_0 \quad (5)$$

式(5) 等号右边的第一项是实际图像与估计图像之间的残差,第二项和第三项是图像  $X$  的先验部分。每一个块  $x_{ij} = P_{ij}X$ ,其大小为  $\sqrt{n} \times \sqrt{n}$ ,对应的稀疏系数为  $\alpha_{ij}$ ,  $P_{ij}$  为  $n \times N$  矩阵用于抽取图像  $X$  的第  $(i, j)$  块。

## 2 基于双正交基的联合字典学习方法

设字典  $D$  是由两个正交变换构成:  $D = [D_1, D_2] \in \mathbf{R}^{n \times 2n}$ 。将所有图像块的稀疏分解系数组成一个矩阵  $A$ ,与字典对应分解成两块子矩阵:

$$A = [A_1^T, A_2^T]^T$$

因此求解原图像的式(2) 转换为:

$$\min_{A_1, A_2, D_1, D_2} \|D_1 A_1 + D_2 A_2 - Y\|_F^2$$

$$\text{s. t. } D_1^T D_1 = D_2^T D_2 = I \quad (6)$$

其中  $Y$  对应所有的图像块。上述优化问题的直接求解是非常困难的,因此将 Block-Coordinate-Relaxation (BCR)<sup>[5]230-231</sup> 算法的思想用于上述优化,可以分成两阶段,首先用正交匹配追踪算法确定系数矩阵  $A$  阶段;然后固定系数矩阵  $A$ ,进入计算字典  $D$  阶段。BCR 算法已证明是收敛的。在计算字典  $D$  阶段,可以固定一个正交基然后优化计算另一个正交基,式(6) 变成:

$$\min_{D_1, D_2} \|D_1 A_1 + D_2 A_2 - Y\|_F^2$$

$$\text{s. t. } D_1^T D_1 = D_2^T D_2 = I \quad (7)$$

假设  $D_2$  是固定的,令  $P = Y - D_2 A_2$ ,则式(7) 变成:

$$\min_{D_1} \|D_1 A_1 - P\|_F^2 \quad (8)$$

$$\text{s. t. } D_1^T D_1 = I$$

式(8) 的优化问题转换成变成著名的 Procrustes Problem。

$$\|D_1 A_1 - P\|_F^2 = \text{tr}(P^T P) + \text{tr}(A_1^T A_1) - 2\text{tr}(D_1 A_1 P^T)$$

优化上式,即求最后一项的最大值,计算  $A_1 P^T$  的奇异值分解

$$A_1 P^T = U \Sigma V^T$$

$$\text{tr}(D_1 A_1 P^T) = \text{tr}(D_1 U \Sigma V^T) =$$

$$\text{tr}(V^T D_1 U \Sigma) = \text{tr}(Q \Sigma)$$

因  $Q = V^T D_1 U$  是正交矩阵,因此:

$$\text{tr}(Q \Sigma) = \sum_i \sigma_{ii} q_{ii} \leq \sum_i \sigma_i$$

其中:  $\sigma_i$  为  $\Sigma$  对角矩阵的第  $i$  个奇异值,  $q_{ii}$  为  $Q$  矩阵对角线的第  $i$  个元素。如果上式达到最大值,矩阵  $Q$  必为单位矩阵:

$$Q = V^T D_1 U = I$$

$$\text{所以 } D_1 = V U^T \quad (9)$$

算法的具体步骤如下。

1) 初始化。

令  $K = 0$ ,且:

① 从噪声图像构建图像块样本训练集  $Z = \{Z_1, Z_2, Z_3, \dots, Z_M\}$ ,  $M$  为样本数。

② 选择两个正交变换基构造初始超完备字典  $D_0$ 。

2) 训练学习阶段。

$K = K + 1$ ,代表迭代次数。

① 对图像块样本训练集的每个样本,根据超完备字典  $D$ ,利用正交匹配追踪算法计算样本稀疏表示的系数矩阵  $A$ 。

② 选择一个正交基  $A_i$ ,计算  $P = Y - D_j A_j (i+j=2)$ , 记:  $A_i P^T = U \Sigma V^T$ ,得  $D_i = V U^T$ 。

重复步骤 ② 两次。更新字典  $D_1$  和  $D_2$ 。

当  $\|\hat{D}A - Z\|_F^2 < MT$ ,迭代终止,否则返回步骤 ① 继续迭代(其中  $T$  为阈值)。

3) 输出。理想的字典  $\hat{D}$ 。

对于图像去噪问题,当字典训练完后,可以由 OMP 算法计算出图像每一个图像块稀疏表示的系数,则对于完整图像  $X$ ,基于稀疏表示的图像去噪 MAP 估计器(5) 可以转化为:

$$\hat{X} = \arg \min_{X} x \lambda \|X - Y\|_2^2 + \sum_{ij} \|D\alpha_{ij} - P_{ij}X\|_2^2$$

$$\hat{X} = \left( \lambda I + \sum_{i,j} P_{i,j}^T P_{i,j} \right)^{-1} \left( \lambda Y + \sum_{i,j} P_{i,j}^T \hat{D} \hat{\alpha}_{i,j} \right)$$

其中:  $\hat{X}$  为去噪后的图像,  $I$  为单位矩阵。该方法采用正则化优化方法实现图像去噪。

## 3 实验结果与分析

为了验证上述算法的性能,将其应用到图像处理中常用的标准图像 Lena、Barbara 和 Peppers,图像尺寸均为  $512 \times 512$ ,图 1 为原始图像。对这些图像叠加了不同噪声级别的白高斯噪声。用于字典训练和图像恢复的图像块大小为  $8 \times 8$  像素,对于每个块,转换成列向量形成实际信号。



图 1 原始图像

对于初始字典,选择离散余弦变换 (Discrete Cosine Transform, DCT) 和离散正弦变换 (Discrete Sine Transform, DST) 两个正交变换合并构成。这两个变换后的系数较为稀疏。实验中, DCT 和 DST 其尺寸均为  $64 \times 64$ ,因此字典为大小为  $64 \times 128$ 。这两个变换矩阵由 1D 变换得来,大小为  $8 \times 8$ ,形式为:

$$C_{1D} = \cos((i-1)(k-1)\pi/8)$$

$$S_{1D} = \sin(ik\pi/9); i, k = 1, 2, \dots, 8$$

对其进行初始化中,对 DCT,除了第一原子外其余每个原子减去其均值。最终的字典为如下 Kronecker 积:

$$C_{2D} = C_{1D} \otimes C_{1D}$$

$$S_{2D} = S_{1D} \otimes S_{1D}$$

将两字典合并为一个超完备字典 DMT,其尺寸为  $64 \times 128$ 。图 2(a) 给出了初始的 Peppers 超完备字典。在实验中,学习与去噪过程都包含用 OMP 算法分解图像块的稀疏表示,终止条件是平均误差小于  $T = 1.15 \times \sigma$ ,  $\sigma$  为图像标准方差,其中 1.15 倍的方差终止条件是实验得出的。经上述算法训练后的 Peppers 字典如图 2(b),其训练次数为 10,噪声方差为 70。

为了比较算法的性能,本文选择了目前小波域上去噪效果较好的方法 BLS\_GSM<sup>[9]</sup> 和非学习的超完备字典 DMT 作为比较。表 1 列出了各种去噪方法的峰值信噪比 (Peak Signal-to-Noise Ratio, PSNR) 值,可以看出,在各种噪声强度下,本文

方法有较强的去噪能力,尤其是在低于 50 dB 噪声情况下。图 3 给出了本算法对于 Peppers 图像的去噪结果,对于原图迭加了标准方差为 25 的噪声。图 3(c) 是去噪声后的图像,噪声基本被去掉,具有很好的可视效果。

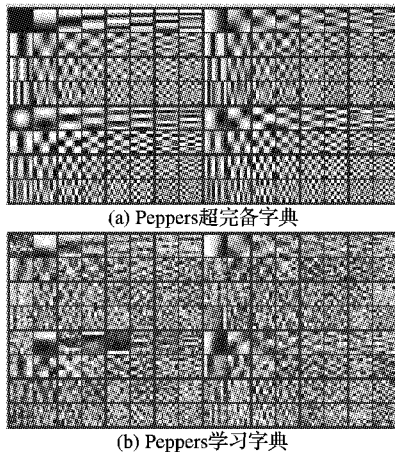


图2 Peppers字典

表1 不同去噪方法性能比较

图像	噪声标准差 $\sigma$	PSNR/dB			
		噪声图像	BLS_GSM	超完备 DMT	本文算法
Lena	10	28.14	35.10	35.29	35.35
	20	22.12	32.12	31.82	32.15
	30	18.58	30.09	29.98	30.11
	40	16.06	28.63	28.49	28.66
	50	14.16	28.12	27.44	27.58
	70	11.25	26.98	25.89	25.99
Barbara	10	28.13	34.03	34.07	34.19
	20	22.12	30.32	30.07	30.29
	30	18.59	27.94	27.59	28.14
	40	16.10	26.36	25.91	26.55
	50	14.17	25.48	24.68	25.19
	70	11.22	24.12	23.07	23.26
Peppes	10	28.13	33.77	36.07	36.17
	20	22.10	30.32	32.74	32.97
	30	18.58	28.78	30.57	30.89
	40	16.10	26.89	28.98	29.41
	50	14.14	26.41	27.57	28.17
	70	11.24	24.58	25.51	26.01

#### 4 结语

本文提出了一种基于双正交基字典学习的图像去噪方法,以图像块作为处理单元,采用正交匹配算法求解图像块的

稀疏表示。以稀疏表示与图像块的差作为先验概率分布,在 MAP 框架下求解去噪图像和字典训练学习。由于超完备字典由双正交基构成,因此字典学习问题转化为 Frobenius 范式下的正交矩阵求优问题,本文给出了新的推导公式。由于该问题有封闭公式解,因此学习速度大大提高。实验结果表明,与传统的小波类去噪方法相比,基于学习的方法能更好地去除图像中的白高斯噪声,去噪后图像的 PSNR 值优于目前小波域较好的去噪方法,且具有更好的视觉效果。

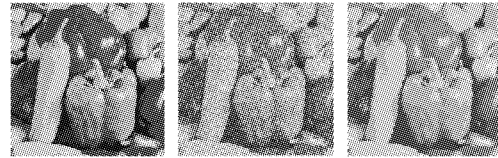


图3 噪声  $\sigma = 25$  的 Peppers 图像去噪效果

#### 参考文献:

- [1] SIMONCELLI E P, ADELSON E H. Noise removal via Bayesian wavelet coring[C]// Proceedings of Third International Conference on Image Processing, Washington, DC: IEEE Signal Processing Society, 1996: 379 - 382.
- [2] CARRE P, HELBERT D. Ridgelet decomposition: Discrete implementation and color denoising[C]// Wavelet Applications in Industrial Processing, III. Boston: SPIE, 2005: 107 - 110.
- [3] MATALON P, ELAD M, ZIBULEVSKY M. Image denoising with the contourlet transform [C]// Proceedings of SPARSE'2005. Rennes, France: SPIE, 2005: 384 - 387.
- [4] STARCK J L, CANDÈS E J, DONOHO D L. The curvelet transform for image denoising[J]. IEEE Transactions on Image Processing, 2002, 11(6): 670 - 684.
- [5] KREUTZ K, MURRAY J F. Dictionary learning algorithms for sparse representation [J]. Neural Computation, 2003, 15(2): 349 - 396.
- [6] AHARON M, ELAD M, BRUCKSTENIN A M. The K-SVD: An algorithm for designing of overcomplete dictionaries for sparse representation[J]. IEEE Transactions on Signal Processing, 2006, 54(11): 4311 - 4322.
- [7] 蔡泽民, 赖剑煌. 一种基于超完备字典学习的图像去噪方法[J]. 电子学报, 2009, 37(2): 347 - 350.
- [8] ELAD M. Sparse and redundant representations[M]. Berlin: Springer, 2010.
- [9] PORTILLA J, STRELA V, WAINWRIGHT M J, et al. Image denoising using scale mixtures of Gaussians in the wavelet domain[J]. IEEE Transactions on Image Processing, 2003, 12(11): 1338 - 1351.

(上接第 1118 页)

的效果。如何自动生成适应度函数的最优组合权重将是今后进一步研究的方向。

#### 参考文献:

- [1] BATTISTA G D, EADES P, TAMASSIA R, et al. Algorithms for drawing graphs: An annotated bibliography[J]. Computational Geometry: Theory and Applications, 1994, 4(5): 235 - 282.
- [2] EADES P. A heuristic for graph drawing[J]. Congressus Numerantium, 1984, 42: 149 - 160.
- [3] FRUCHTERMAN T M J, REINGOLD E M. Graph drawing by force-directed placement[J]. Software—Practice and Experience, 1991, 21(11): 1129 - 1164.
- [4] 方文其, 胡明晓. 无向关系图视觉清晰化显示算法[J]. 计算机工

程与科学, 2011, 33(6): 51 - 56.

- [5] ELORANTA T, MÄKINEN E. TimGA: A genetic algorithm for drawing undirected graphs [J]. Divulgaciones Matemáticas, 2001, 9(2): 155 - 171.
- [6] 黄竟伟, 康立山, 陈毓屏. 一个新的无向图画算法[J]. 软件学报, 2000, 11(1): 138 - 142.
- [7] 张清国, 叶俊民, 张维, 等. 用遗传算法画无向图[J]. 计算机工程与科学, 2006, 28(6): 58 - 61.
- [8] 何慧, 张伟哲, 张宏莉, 等. 基于 MLp/CR 算法的无向图分割方法: 中国, 200910073338.9[P]. 2010 - 06 - 16.
- [9] 张磊, 孙松, 李经通, 等. 网络拓扑图形化显示方法及装置: 中国, 200910011924.0[P]. 2009 - 11 - 18.