

非高斯噪声背景下小波阈值算法分析

李庆华*, 山拜·达拉拜, 邱新建, 廖 畅, 孙全富

(新疆大学 信息科学与工程学院, 乌鲁木齐 830046)

(*通信作者电子邮箱 liqinghua0614@126.com)

摘 要:针对小波阈值算法以高斯噪声为研究背景的局限性,为解决硬阈值函数不连续和软阈值函数估计小波系数和分解小波系数存在恒定偏差的问题,在非高斯噪声背景下提出一种新的小波阈值算法。新阈值函数从 Garrote 阈值改进而来,引入了高阶幂函数。该算法首先对加入一类非高斯噪声的信号进行小波分解,然后根据新的阈值函数对每层高频小波系数进行量化,最后用小波分解的低频系数和处理过的高频系数重构信号。在非高斯噪声背景下进行的仿真结果表明,新阈值函数去噪相对于软阈值、硬阈值、两类改进阈值以及 Garrote 阈值在信噪比和最小均方误差上都得到了改善。

关键词:非高斯噪声;小波变换;阈值函数;软阈值;硬阈值;高阶幂函数

中图分类号:TN911.7 **文献标志码:**A

Wavelet threshold algorithm analysis under non-Gaussian noise background

LI Qing-hua*, Senbai Dalabaev, QIU Xin-jian, LIAO Chang, SUN Quan-fu

(College of Information Science and Engineering, Xinjiang University, Urumqi Xinjiang 830046, China)

Abstract: A new threshold function under non-Gaussian noise background was presented to overcome the limitations of wavelet threshold algorithm under the Gaussian noise background. The shortcomings of conventional function, such as discontinuity of hard threshold function and the invariable dispersion of soft threshold function, can be solved. The new function which employed high order power function was put forward based on Garrote threshold. First, the signal with a class of non-Gaussian noise was decomposed by wavelet. Secondly, each high frequency wavelet coefficient was quantified based on new threshold function. Thirdly, signal was reconstructed by the low frequency coefficients of wavelet decomposition and quantified high frequency coefficients. The simulation results under non-Gaussian noise background indicate that the new threshold function gets higher Signal-to-Noise Ratio (SNR) gains and lower minimum Mean Square Error (MSE) compared to the soft and hard threshold, two types of improved threshold and Garrote threshold.

Key words: non-Gaussian noise; wavelet transform; threshold function; soft threshold; hard threshold; high order power function

0 引言

继 Donoho 等^[1]提出了小波阈值去噪算法后,因为它在去噪方面的良好性能,得到了许多学者的注意,同时也产生了较多这方面的学术研究成果和广泛应用^[2-4]。这些研究大部分是在高斯噪声的背景下进行的,主要是改进收缩函数或者软、硬阈值联合的方法。改进的收缩函数在缩小恒定偏差上有优势,软、硬阈值联合的方法连续性较好。在一般的电子设备中,以高斯噪声为背景是合适的。但在一些复杂的情况下,产生影响的往往是非高斯噪声。非高斯噪声具有的性质与高斯噪声有所不同,所以对小波阈值去噪后的效果以及方案的采取会有所影响。本文在分析一类非高斯噪声模型统计特性的基础上,分析传统软、硬阈值去噪的优缺点,针对传统阈值去噪算法的不足之处采用一种改进的小波阈值算法。

1 非高斯噪声

非高斯噪声可以是双模噪声,也可以是多模噪声。双模噪声是由高斯噪声混合一种非高斯噪声而成的一种噪声,这种

噪声同时兼容了高斯特性和非高斯特性。本文采用的是双模噪声中的一类模型^[5],这类模型由高斯噪声 $g(t)$ 叠加随机均匀振荡噪声 $B \cos \theta(t)$, 概率密度为:

$$p_1(x) = \frac{1}{\pi \sqrt{8\pi\sigma_0}} \int_0^{2\pi} \exp\left(\frac{(x - B \cos \theta)^2}{-2\sigma_0^2}\right) d\theta \quad (1)$$

上述模型的均值为:

$$E(x) = \frac{B}{\pi} \int_0^{2\pi} \cos \theta \Phi\left(\frac{B \cos \theta}{\sigma_0}\right) d\theta + \sigma_0 \sqrt{\frac{2}{\pi}} \exp\left(-\frac{B^2}{4\sigma_0^2}\right) I_0\left(\frac{B^2}{4\sigma_0^2}\right) \quad (2)$$

方差为:

$$D(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} [x - E(x)]^2 p(x) dx = \sigma_0^2 + \frac{B^2}{2} \quad (3)$$

其中 σ_0^2 是双模噪声中高斯分量的方差。

2 小波阈值去噪

2.1 小波变换

小波阈值收缩法的基本思想是有用信号的小波系数只集中在小波域内的一小部分系数且幅值大,而噪声的小波系数

收稿日期:2012-03-07;修回日期:2012-05-13。 基金项目:国家自然科学基金资助项目(60971130)。

作者简介:李庆华(1987-),女,新疆昌吉人,硕士研究生,主要研究方向:数字信号处理; 山拜·达拉拜(1959-),男(哈萨克族),新疆乌鲁木齐人,教授,博士,主要研究方向:噪声信号处理、噪声建模; 邱新建(1984-),男,陕西西安人,硕士研究生,主要研究方向:数字信号处理; 廖畅(1986-),男,贵州遵义人,硕士研究生,主要研究方向:数字信号处理; 孙全富(1984-),男,新疆塔城人,硕士研究生,主要研究方向:信号处理。

则遍布整个小波域并且幅值小。因此小波域的阈值方程更趋向于保留阈值方程中大的小波系数,而将噪声的小波系数降为零。

小波变换是将时间信号展开为小波函数族的线性叠加,小波变换的核函数是小波函数,它在时间和频率域内都是局部化的。所以,小波变化可同时的信号在时-频域内进行联合分析。假设一维观测信号:

$$f(t) = s(t) + n(t) \quad (4)$$

其中: $s(t)$ 为原始信号, $n(t)$ 是式(1)描述的非高斯噪声模型。在实际情况下,有用信号通常表现为低频信号或是平稳信号,而噪声主要是高频信号。小波变换把信号分为概貌信号和细节信号,并且根据分解层数对分解出的低频信号进行再划分。一般噪声部分包含在高频小波系数,所以可以设定阈值进行量化,抑制噪声的小波系数达到降噪的目的。

一维信号的降噪过程可以分为3步:

第1步 选择一个小波并确定小波分解层数 N 对一维信号 $f(t)$ 进行 N 层小波分解。

第2步 量化小波分解后产生的高频小波系数。对每层分解的高频系数选取一个阈值和阈值函数进行量化。

第3步 一维小波重构。用小波分解后的低频系数和从第1层到第 N 层的量化处理后的高频系数重构信号。

整个小波变换过程中,第2步的灵活性很大,因为阈值和阈值函数不是唯一的,这也是小波降噪的核心步骤,所以如何选取阈值和阈值函数很重要。

2.2 小波阈值函数

传统的小波阈值去噪有硬阈值去噪和软阈值去噪,它们的定义如下:

硬阈值函数:

$$\hat{w}_{j,k} = \begin{cases} w_{j,k}, & |w_{j,k}| \geq \lambda \\ 0, & |w_{j,k}| < \lambda \end{cases} \quad (5)$$

软阈值函数:

$$\hat{w}_{j,k} = \begin{cases} \text{sgn}(w_{j,k})(|w_{j,k}| - \lambda), & |w_{j,k}| \geq \lambda \\ 0, & |w_{j,k}| < \lambda \end{cases} \quad (6)$$

从式(5)可看出保留了大于阈值的小波系数,舍弃了小于阈值的小波系数从而实现信号去噪。但是由于硬阈值函数的不连续性,在重构信号时会产生振荡现象。软阈值函数(式(6))是扩展了的硬阈值函数,设定阈值后让系数在趋近阈值时向零缩进,其连续性较好,但是阈值函数和真实值之间存在恒定误差,所以在重构信号时会过度平滑使信号的奇异点失真。

针对软、硬阈值函数的缺点,许多学者提出了改进方案^[6-9],这些方案可以概括地分为两类:一类基于软阈值函数进行的改进,通过增加调节因子^[10],来改善存在恒定偏差的问题,是对软、硬阈值算法的一种折中处理^[11](下文称方法一):

$$\hat{w}_{j,k} = \begin{cases} \text{sgn}(w_{j,k})(|w_{j,k}| - a\lambda), & |w_{j,k}| \geq \lambda \\ 0, & |w_{j,k}| < \lambda \end{cases} \quad (7)$$

其中: a 为调节函数,可以是常数($0 < a < 1$)、指数函数、反正切函数或是一些复合函数^[12]。

另一类改进函数是基于改进的软阈值算法和硬阈值算法的一种综合,引入加权因子,可以称为加权平均法(下文称方法二):

$$\hat{w}_{j,k} = \begin{cases} bw_{j,k} + (1-b)\text{sgn}(w_{j,k})(|w_{j,k}| - a\lambda), & |w_{j,k}| \geq \lambda \\ 0, & |w_{j,k}| < \lambda \end{cases} \quad (8)$$

其中 $0 < b < 1$ 。

两种改进方法在连续性和缩小恒定偏差两方面取得的效果上各有所长。例如,方法一解决了小波系数估计值和实际系数之间偏差的问题,但连续性不好;方法二有较好的连续性,在恒定偏差上依然存在问题。当然也有在这两种方案上再改进的方法,引入比较复杂的函数为调节因子,取得了很好的去噪效果,但是小波阈值函数更加复杂,不利于计算。这里提出一种基于 Garrote 阈值^[13]基础上改进的新函数。

$$\hat{w}_{j,k} = \begin{cases} w_{j,k} - \frac{\lambda^2}{w_{j,k}} = w_{j,k} \left(1 - \left(\frac{\lambda}{w_{j,k}}\right)^2\right), & |w_{j,k}| \geq \lambda \\ 0, & |w_{j,k}| < \lambda \end{cases} \quad (9)$$

式(9)是 Garrote 阈值函数, $|w_{j,k}| \geq \lambda$ 时,由式(9)可看出 Garrote 阈值是通过构造函数式使硬阈值在 $\pm \lambda$ 处连续。将函数式中引入调节因子 n ,就成为新的阈值函数。

$$\hat{w}_{j,k} = \begin{cases} w_{j,k} \left(1 - \left(\frac{\lambda}{|w_{j,k}|}\right)^n\right), & |w_{j,k}| \geq \lambda \\ 0, & |w_{j,k}| < \lambda \end{cases} \quad (10)$$

其中: $n \in [1, \infty)$,由于硬阈值函数在 $\pm \lambda$ 处不连续,因此要在引入一个收缩方程,使硬阈值函数在该点连续,新函数是在硬阈值函数中引入高阶幂函数。当 $w_{j,k} \rightarrow \infty$ 时, $\hat{w}_{j,k} = w_{j,k} [1 - (\lambda/|w_{j,k}|)^n] \rightarrow w_{j,k}$,说明新函数保留了硬阈值函数的优点;当 $w_{j,k} \rightarrow \pm \lambda$ 时,高阶幂函数 $(\lambda/|w_{j,k}|)^n \rightarrow 1$,小波系数估计值 $\hat{w}_{j,k} = w_{j,k} [1 - (\lambda/|w_{j,k}|)^n] \rightarrow 0$,说明新函数在 λ 时连续。

从新函数的定义中可以得出:当 $n \rightarrow \infty$ 时,这种函数趋近于硬阈值函数;当 $n = 1$ 时: $w_{j,k} > \lambda$ 则 $\hat{w}_{j,k} = w_{j,k} - \lambda$,而 $w_{j,k} < -\lambda$ 时, $\hat{w}_{j,k} = w_{j,k} + \lambda$,也就是说 $n = 1$ 时新函数等同于软阈值函数。 n 取值越小,函数变化的曲线越平滑。

由于 n 是变量,比 Garrote 阈值函数灵活性好,通过调节它可以获得较理想的去噪效果。经多次的仿真实验表明,当信号比较平滑时 n 的取值范围为 $1 \sim 2$,去噪效果比较好,在原始信号不连续的情况下 n 取大于 2 的值是合理取值。

小波阈值去噪关键步骤还包括小波阈值的选取。小波阈值包括:固定阈值,也叫全局阈值 $\lambda = \sigma \sqrt{2 \ln N}$;无偏似然估计阈值,是对给定的一个阈值 λ ,得到它的似然估计,再将非似然的 λ 最小化,就得到了所选阈值;极大极小阈值,它的原理是让估计的最大风险最小化,也是一种固定阈值;启发式阈值,它是固定阈值和无偏似然估计阈值的综合,也是最优预测变量阈值选择。在信噪比小时无偏估计误差较大,采用固定阈值。

这4种阈值选取规则都是在高斯噪声的模型上提出的。在非高斯噪声的情况下,选取每个分解尺度采用不同的阈值 λ :

$$\lambda = \frac{\sigma \sqrt{2 \ln N}}{\ln(j+1)}$$

其中:

$$\sigma = \text{median}(|w_{j,k}| / 0.6745)$$

j 为分解尺度。

3 仿真实验

为了验证在这类非高斯噪声背景下新函数在去噪方面的

优越性和有效性,分别采用软阈值函数、硬阈值函数、改进函数、Garrote 阈值和新函数进行仿真实验。去噪的性能标准信噪比 (Signal-to-Noise Ratio, SNR) 和最小均方误差 (Mean Square Error, MSE) 的定义如下:

$$SNR = 10 \lg \frac{\sum_{i=1}^N |f(i)|^2}{\sum_{i=1}^N |\hat{f}(i) - f(i)|^2} \quad (11)$$

$$MSE = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N |\hat{f}(i) - f(i)|^2 \quad (12)$$

在实验中,非高斯噪声的采用 $\mu = 0, \sigma_0 = 1$ 的高斯白噪声叠加幅值 $B = 2.5$ 的随机振荡信号。主要对 heavy sine 和 $\sin(16\pi t)$ 进行去噪,使用 sym7 小波进行 6 层分解。heavy sine 去噪前 SNR 为 22.5227 dB,正弦函数去噪前 SNR 为 6.9596 dB,方法一、二中 $a = 0.5, b = 0.5$,新函数中 $n = 1.7$,确定参数后对以上各方法仿真。图 1 是不同阈值函数对 heavy sine 去噪效果。表 1 是各种小波阈值去噪方法经过 10 次实验的信噪比和最小均方误差的平均值。

由图 1 和表 1 可知:在这类非高斯噪声背景下,在传统阈值函数去噪中,硬函数的去噪性能优于软阈值去噪,新函数对非平稳信号和周期信号都有比较好的去噪能力,尤其对正弦信号去噪可以发现信噪比提高不少,整体来看信噪比和最小

均方误差上都优于传统的阈值去噪算法。

表 1 两种信号阈值去噪后的 SNR 和 MSE

方法	heavy sine		$\sin(16\pi t)$	
	SNR/dB	MSE	SNR/dB	MSE
软阈值	36.1081	0.0840	23.4264	0.0818
硬阈值	36.2889	0.0806	24.4682	0.0643
方法一	36.4160	0.0783	24.5008	0.0639
方法二	37.0410	0.0678	24.5534	0.0631
Garrote 阈值	37.0772	0.0672	24.5767	0.0627
新阈值	38.1745	0.0657	24.7509	0.0587

4 结语

在一类非高斯噪声背景下对传统的软、硬阈值算法,两类改进的算法,Garrote 阈值和新的阈值函数进行的仿真结果表明新函数一定程度上改善了传统阈值的不足之处,在去噪性能上也优于方法一、二和 Garrote 阈值。新阈值去噪函数在这类非高斯噪声背景下是有效和可行的。但是这只是在一类非高斯噪声背景下进行的仿真,如何建立一种通用的非高斯噪声模型仍需要研究。再者,调节因子的选取基本是通过经验来选择,如何自适应的精确选择是还需研究的问题。

参考文献:

- [1] DONOHO D L. De-noising by soft-thresholding[J]. IEEE Transactions on Information Theory, 1995, 41(3): 613-627.
- [2] PHINYOMARK A, LIMSAKUL C, PHUKPATTARANTON P. A comparative study of wavelet denoising for multifunction myoelectric control [C]// ICCAE '09: Proceedings of the 2009 International Conference on Computer and Automation Engineering. Washington, DC: IEEE Computer Society, 2009: 21-25.
- [3] 薛伟,关福宏,陈良章,等.基于一种新的小波阈值函数的雷达信号去噪[J].计算机仿真,2008,25(8):319-322.
- [4] 门涛,陈建安.基于平滑阈值函数的小波图像去噪[J].计算机工程与科学,2004,26(8):50-52.
- [5] 山拜·达拉拜,黄玉划.几类非高斯噪声模型的转换研究[J].电子学报,2004,32(7):1091-1093.
- [6] 张维强,宋国乡.基于一种新的阈值函数的小波域信号去噪[J].西安电子科技大学学报:自然科学版,2004,31(2):296-299.
- [7] 叶重元,黄永东.小波阈值去噪算法的新改进[J].计算机工程与应用,2011,47(12):141-145.
- [8] 李敏.小波阈值去噪中新函数的研究[J].长春理工大学学报:自然科学版,2011,34(3):176-178.
- [9] 付伟,彭光剑.基于小波阈值去噪的改进方法[J].电子测量技术,2006,29(6):46-47.
- [10] 金宝龙,李辉,赵乃杰,等.一种新的小波阈值去噪算法[J].弹箭与制导学报,2011,32(1):167-169.
- [11] 叶裕文,戴文战.一种基于新阈值函数的小波信号去噪方法[J].计算机应用,2006,26(7):1617-1619.
- [12] 王旭,刘文生,王昶.一种改进小波阈值去噪方法的研究[J].测绘科学,2011,36(5):179-180.
- [13] GAO H Y. Wavelet shrinkage denoising using the nonnegative garrote [J]. Journal of Computational and Graphical Statistics, 1998, 7(4): 469-488.

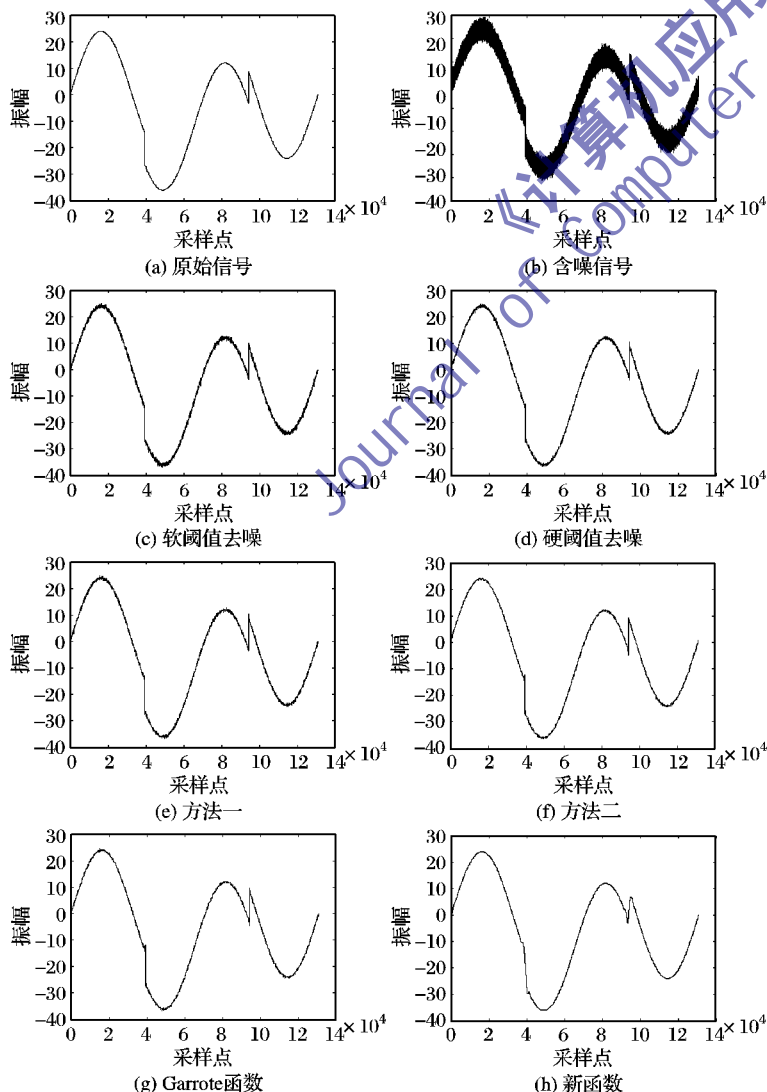


图 1 不同阈值函数对 heavy sine 去噪效果