

## 基于双字典集的信号稀疏分解算法

王树朋\*, 王文祥, 李宏伟

(中国地质大学 数学与物理学院, 武汉 430074)

(\* 通信作者电子邮箱 wangshupeng728@126.com)

**摘要:**为得到关于信号更为稀疏的表示,提出一种基于双字典集的信号稀疏分解算法。在算法过程中,建立如下两个字典集:已选字典集和待选字典集。该算法以重复加权提升搜索(RWBS)算法为基础,增加了一步更为严格的从待选字典集中选择最佳核函数的过程,故该算法在保留初始算法的优点的同时,可以产生更为稀疏的模型。通过仿真实验和真实数据实验验证了所提算法的性能。

**关键词:**双字典集;过完备字典集;匹配追踪;核匹配追踪;重复加权提升搜索

**中图分类号:**TP18;TN911.7 **文献标志码:**A

### Signal sparse decomposition based on the two dictionary sets

WANG Shu-peng\*, WANG Wen-xiang, LI Hong-wei

(School of Mathematics and Physics, China University of Geosciences, Wuhan Hubei 430074, China)

**Abstract:** A new sparse decomposition algorithm was presented to get a sparser representation of the signal. In the procedure of the algorithm, it established the two dictionary sets consisting of the selected dictionary set and the unselected dictionary set. The proposed algorithm added a more strict process which selected the best kernel from the unselected dictionary set to the original Repeated Weighted Boosting Search (RWBS), so the proposed algorithm could produce a sparser model while reserving the advantages of the original algorithm. The effectiveness of the proposed algorithm is illustrated through several examples.

**Key words:** two dictionary sets; redundant dictionary; Matching Pursuit (MP); Kernel Matching Pursuit (KMP); Repeated Weight Boosting Search (RWBS)

## 0 引言

寻求信号的稀疏表示是信号处理领域研究热点之一。1993年, Mallat等<sup>[1]</sup>提出匹配追踪(Matching Pursuit, MP)算法,将信号在过完备字典集上进行分解,从而得到信号的稀疏分解。MP算法本质在一个确定的字典集上逐步进行自适应选择最佳核函数来表示初始信号。通过该算法可以得到初始信号非常稀疏的表示,由于其具有的诸多优良特性(比如:对信号自适应的灵活表达、信号参数表示的灵活性等),稀疏分解已被应用到信号处理各个方面,比如:信号时频分析<sup>[2]</sup>、信号去噪<sup>[1]</sup>、信号编码<sup>[3]</sup>、波达方向估计<sup>[4]</sup>等。2002年,通过对MP算法的核函数进行改进, Vincent等<sup>[5]</sup>提出一种核匹配追踪(Kernel Matching Pursuit, KMP)算法,该算法利用同一核函数、不同的参数组合构成过完备字典集。与匹配追踪算法相比,在构建稀疏模型方面核匹配追踪算法更具备优越性。KMP算法中的参数即可采用固定的,也可通过优化算法得到,如遗传算法<sup>[6]</sup>(Genetic Algorithm, GA)、自适应模拟退火<sup>[7]</sup>(Adaptive Simulated Annealing, ASA)算法、粒子群(Particle Swarm Optimization, PSO)算法等优化算法<sup>[8]</sup>。1999年, Chen等<sup>[9]</sup>提出一种重复加权提升搜索(Repeated Weighted Boosting Search, RWBS)算法用于优化模型参数,较GA、ASA等全局搜索算法,该算法计算量小,需设置的参数少,同时不受字典集的限制,可以产生较为稀疏的模型。2006年, Xu等<sup>[10]</sup>从信号稀疏度角度出发,提出了基于两个字典集

的匹配追踪算法并将其应用到脑电信号中,较传统MP算法可以得到更为稀疏的模型,但是,同MP算法一样,该算法仍然要受初始字典集及其大小的限制<sup>[12]</sup>。

鉴于上述方法,结合RWBS算法的不受字典集限制和双字典集选择核函数的严格性这两种优点,本文提出一种基于双字典集的重复加权提升搜索(Two Dictionaries Repeated Weighted Boosting Search, TDRWBS)算法,该算法采用径向基函数(Radial Basis Function, RBF)作为核函数,核参数通过计算量小的RWBS算法搜索得到,在每步迭代过程中,只有当待选字典集中的最佳核函数优于已选字典集中核函数且相应残差也优于已选核函数残差时才将其添加到已选字典集 $D$ 中,否则仍在已选字典集 $D$ 中选择最佳核函数,这样该算法将得到更为稀疏的分解结果。通过实验验证,本文方法能产生更为稀疏的模型。

## 1 基于双字典集的稀疏分解算法

### 1.1 模型

基于给定 $N$ 组观测样本数据 $\{\mu(t), y(t)\}_{t=1}^N$ 的建模,在一定条件下,可以转化为用以下NARX模型<sup>[11]</sup>描述:

$$\begin{aligned} y(t) &= f(y(t-1), \dots, y(t-n_y), \\ &\quad \mu(t-1), \dots, \mu(t-n_\mu)) + \xi(t) = \\ &\quad \hat{f}(X(t)) + \xi(t) = \\ &\quad \sum_{m=1}^M \omega_m \varphi_m(X(t)) + \xi(t) = \Psi^T(t) \omega + \xi(t) \end{aligned} \quad (1)$$

收稿日期:2012-03-27;修回日期:2012-05-24。 基金项目:国家自然科学基金资助项目(61071188, 61102103);湖北省自然科学基金资助项目(2010CDB04205);中央高校基本科研业务费专项资金资助项目(CUG110407)。

作者简介:王树朋(1987-),男,河北衡水人,硕士研究生,主要研究方向:模式识别、信号稀疏表示; 王文祥(1987-),男,湖北天门人,硕士研究生,主要研究方向:盲源分离; 李宏伟(1965-),男,湖南汨罗人,教授,博士生导师,主要研究方向:模式识别、统计信号处理。

$$X(t) = [y(t-1), \dots, y(t-n_y), \\ \mu(t-1), \dots, \mu(t-n_\mu)]^T$$

$$\Psi(t) = [\varphi_1(t), \varphi_2(t), \dots, \varphi_M(t)]^T$$

其中:  $\mu(t)$ 、 $y(t)$ 、 $\xi(t)$  分别表示模型输入、模型输出以及噪声项;  $n_\mu$ 、 $n_y$  分别是模型的输入  $\mu(t)$  和输出  $y(t)$  的最大延迟;  $\xi(t)$  是一个服从独立同分布的白噪声序列;  $X(t)$  表示模型输入向量;  $f(\cdot)$  是未知的非线性映射;  $M$  是核函数的总个数,  $\varphi_m(X(t))$  ( $m = 1, 2, \dots, M$ ) 是模型核函数(核函数的选择有多种, 比如多项式、小波函数、高斯函数等);  $\omega_m$  ( $m = 1, 2, \dots, M$ ) 是模型权值系数;  $\Psi(t)$  表示核函数向量, 本文的核函数选用高斯核函数。故基于观测信号的建模过程可以看成由数据对  $\{\mu(t), y(t)\}_{t=1}^N$  寻找核函数的过程。

## 1.2 字典集的构造

在信号处理中, 通常采用的字典集是正交的, 这样得到的信号表示是唯一的, 然而这种表示并不稀疏, 为了得到信号的稀疏表示, 采用过完备的字典集对信号进行稀疏分解, 这样, 字典集的正交性就不能被保证, 由于字典集是稠密的, 通过这种字典集得到的信号表示是稀疏的。针对不同的问题采用合适的核函数可以得到相应信号的稀疏表示。本文采用的核函数为高斯函数, 一个高斯函数由两个参数确定: 中心和尺度。也就是说, 一旦中心和尺度参数确定, 高斯函数就是确定的。对于不同的中心参数, 不相同的尺度参数, 构造所得核函数也是不相同的。比如, 一个高斯函数的中心为 0, 尺度为 2; 另一个高斯函数的中心为 2, 尺度为 2。可知, 这两个核函数是不相同的。同理可知对于相同的中心参数, 不同尺度参数的核函数也是不相同的。如图 1 所示,  $g_1$  表示中心为 0, 尺度为 2 的核函数;  $g_2$  表示中心为 2, 尺度为 2 的核函数;  $g_3$  表示中心为 0, 尺度为 3 的核函数, 从中可看出这 3 个核函数是不同的。因此, 可通过不同的中心, 不同的尺度组合产生一系列的核函数来构成字典集。

$$g = \exp\left(-\frac{(x-c)^2}{2\sigma^2}\right) \quad (2)$$

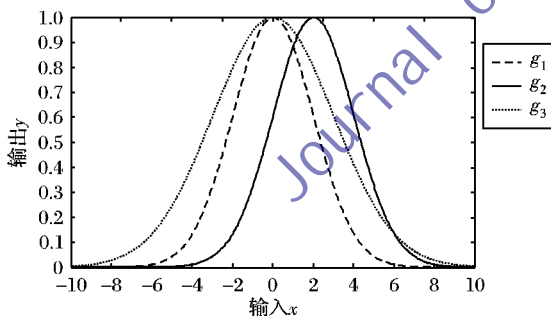


图1 3个不同核函数的比较

## 1.3 重复加权提升搜索算法<sup>[13]</sup>

在信号处理领域, 诸多信号处理问题都采用下面的优化模型:

$$\min_{u \in U} J(u) \quad (3)$$

其中:  $u = [u_1, u_2, \dots, u_n]^T$  是需要进行优化的  $n$  维参数向量,  $U$  为  $u$  的可行集。在本文中,  $u$  由中心  $u_k$  和对角协方差矩阵  $\Sigma_k$  组成, 而相应的损失函数取为核函数与信号之间的相关度。核函数和训练数据集之间的相关函数如下给定义:

$$J(u) = \frac{\sum_{t=1}^N \varphi(X(t)) y_t}{\sqrt{\sum_{t=1}^N \varphi(X(t))^2} \sqrt{\sum_{t=1}^N (y_t)^2}} \quad (4)$$

通过最大化该相关函数可确定当前信号最佳核函数的参

数  $u$ 。

较 GA 和 ASA 两种优化算法, RWBS 算法要调整的参数少, 计算速度快, 可以较快地收敛, 故本文拟将采用 RWBS 算法对核函数的参数进行估计。该算法可详见文献[13], 此处不再进行详细叙述, 仅列出图 2 说明 RWBS 算法流程。

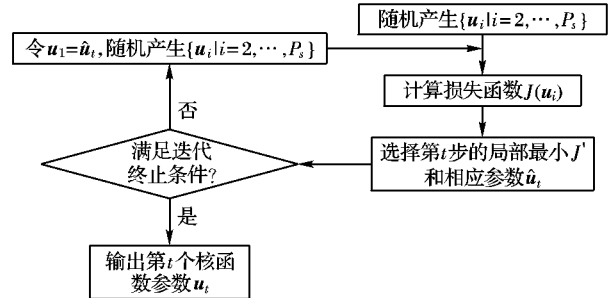


图2 RWBS 算法流程

## 1.4 TDRWBS 算法思想

考虑信号表示的稀疏度, 用来表示信号的核函数越少, 其稀疏度越大。故在算法进行过程可以考虑将已选择的核函数形成一个新的字典集: 字典集  $D$ 。如果  $D$  中最佳核函数的相关度大于等于新产生核函数的相关度, 此时继续选择  $D$  中核函数; 否则, 分别计算相应的残差, 并计算相对误差  $r$ 。如果相对误差小于一个预先给定的阈值函数  $T$ , 则仍选  $D$  中核函数; 否则将选取新的核函数作为当前最佳核函数, 同时将该核函数添加到字典集  $D$  中。在模型训练开始阶段, 字典集  $D$  为空, 随着模型训练的进程, 每次迭代后均将所新选核函数添加到字典集  $D$  中, 这样字典集  $D$  就会被逐步扩充变大, 当字典集  $D$  足够大时, 被选择的核函数可能是通过搜索得到, 也可能是从字典集  $D$  中选择。从稀疏角度看, 选用新的核函数不利于模型的稀疏性, 而选择字典集  $D$  中的核函数则有利于稀疏。因此, 应尽可能地字典集  $D$  中选择核函数, 这样最终得到的模型较传统方法得到的模型更为稀疏。故在初始 RWBS 算法基础上引入一阈值函数用来调整核函数选择过程, 即可得到改进的 TDRWBS 算法。算法流程如图 3 所示。

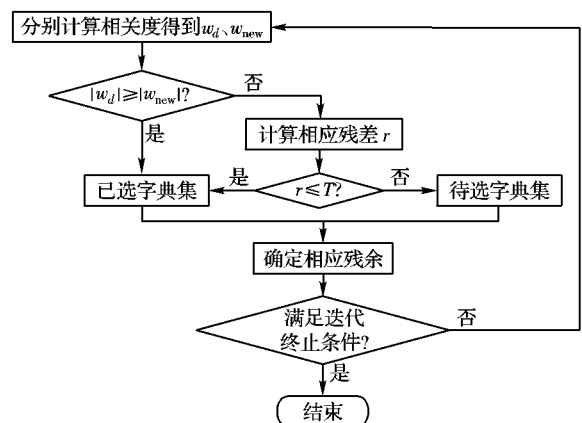


图3 双字典集算法流程

## 1.5 具体算法步骤

本文算法具体步骤如下描述:

设  $D$  字典为  $\Phi^d$ , 原始信号为  $y$ , 且  $y_0 = y$ , 通过 RWBS 算法得到的核函数为  $\varphi_{new}$ , 相关度为  $w_{new}$ ,  $\Phi^d$  中与当前残差信号相关度最大的信号为  $\varphi_d$ , 相关度为  $w_d$ ,  $T$  为预先给定的阈值函数。

算法具体步骤如下:

在选择第  $k$  个核函数阶段时, 分别计算得到  $w_d$  和  $w_{new}$ , 并进行比较。

第1步 如果  $|w_d| \geq |w_{new}|$ , 则选  $\varphi_d$  为全局最优核函数, 更新  $w_{opt} = w_d$ ,  $\varphi_{opt} = \varphi_d$ , 同时将其权值添加到相应核函数原来权值上进行更新, 且  $y_{k+1} = y_k - w_{opt}\varphi_{opt}$ ,  $k = k + 1$ 。

第2步 如果  $|w_d| < |w_{new}|$ , 则第  $k$  步的全局最优核函数如下选择:

1) 分别计算采用两个核函数后所得的残余信号:

$$y_d = y_k - w_d\varphi_d \quad (5)$$

$$y_{new} = y_k - w_{new}\varphi_{new} \quad (6)$$

2) 计算两个残余信号的相对误差:

$$r = \frac{\|y_d - y_{new}\|}{\|y_{new}\|} \quad (7)$$

3) 通过给定的阈值函数  $T$  来确定全局最优核函数。如果  $r \leq T$ , 则选  $\varphi_d$  为全局最优核函数, 更新  $w_{opt} = w_d$ ,  $\varphi_{opt} = \varphi_d$ , 同时将其权值添加到相应核函数原来权值上进行更新; 如果  $r > T$ , 则选  $\varphi_{new}$  为全局最优核函数, 更新  $w_{opt} = w_{new}$ ,  $\varphi_{opt} = \varphi_{new}$ , 同时将新核函数添加到字典集  $D$  中。

4) 更新残差信号:

$$y_{k+1} = y_k - w_{opt}\varphi_{opt} \quad (8)$$

$$k = k + 1$$

第3步 判定是否满足终止条件。如果满足, 算法结束; 否则转到第1步。

## 1.6 复杂度分析

TDRWBS 算法和 RWBS 算法的主要不同之处在于选择最优核函数的过程。如果  $T = 0$ , 则 TDRWBS 算法就退化为传统的 RWBS 算法。为保证收敛性, 阈值函数  $T$  应为一随着迭代次数增加而逐步递减的函数, 根据不同的问题可以选择不同的阈值  $T$  函数, 本文借用的是模拟退火算法中的退火函数<sup>[8]</sup>:

$$T(k) = T_0 \times \alpha^{k/N} \quad (9)$$

其中:  $0.6 \leq \alpha < 1$ ;  $T_0$  为初始温度, 且小于 1;  $k$  为迭代次数;  $N$  为退火速度因子。这样随着算法的进行,  $T \rightarrow 0$ , 在后期阈值函数的影响就会变得很小。因此信号稀疏分解的收敛性得到保证。

由于本文算法是基于初始 RWBS 算法进行改进, 改进之处在于选择最优核函数的严格性。只有满足一定要求才进行核函数的添加, 这就使得新算法可以产生更为稀疏的信号表示。该算法较初始算法的计算量是同等的, 这是因为本文算法仅仅比初始算法多了一个相关度大小比较步骤, 而该步骤所产生的计算量较搜索算法本身的计算量是可以忽略的。故本文算法可以在保证初始算法计算量不进一步加大的前提下, 得到更为稀疏的表示。

## 2 实验

通过 3 个实验对算法进行了验证。第一个实验采用的是—维单变量函数, 通过上述算法对该函数进行了拟合; 第二个实验采用的是高维数据; 第三个实验为从 TIMIT 数据库中提取第 31 号真实语音信号数据。分别采用本文算法 (TDRWBS 算法) 和初始 RWBS 算法对以上 3 个实验数据进行了处理, 实验所得结果与理论相符合, 验证了本文算法的可行性。

### 实验1 一维信号。

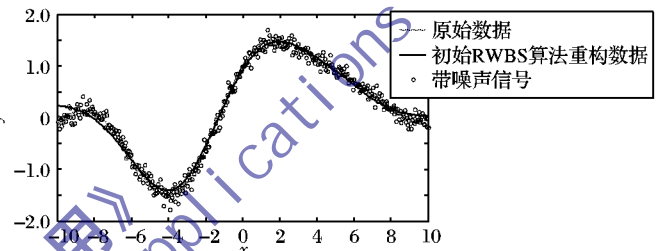
通过式(10)产生 500 个训练数据集:

$$y(x) = 0.1x + \frac{\sin(x)}{x} + \sin(0.5x) + \xi \quad (10)$$

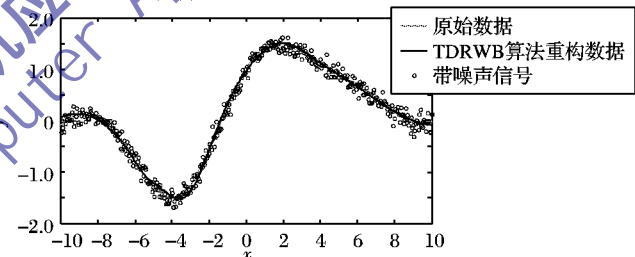
其中:  $x$  中的元素服从  $[-10, 10]$  上的均匀取样,  $\xi$  为服从零均值、标准差为 0.1 的高斯白噪声。算法运行过程中的参数设置如同文献<sup>[12]</sup>设置, 最后本文算法所得模型参数如表 1 所示, 采用本文方法得到的数据模型仅需要 5 项, 而采用初始 RWBS 算法需要 6 项<sup>[12]</sup> (如图 4(a) 所示)。TDRWBS 算法所得结果如图 4(b) 所示。

表1 本文算法参数

中心	尺度	权值
2.6316	1.8630	1.4938
-4.0852	1.8630	-1.5259
-0.1754	0.9315	0.6466
6.3409	0.9315	0.4678
-7.8947	0.9315	0.3595



(a) 初始RWBS算法重构效果



(b) TDRWBS算法重构效果

图4 TDRWBS 算法和 RWBS 算法在一维数据上的对比效果

### 实验2 二维信号。

考虑如下非线性系统:

$$\begin{aligned} \mu(t) = & (0.8 - 0.5 \exp(-\mu^2(t-1)))\mu(t-1) - \\ & (0.3 + 0.9 \exp(-\mu^2(t-1)))\mu(t-2) + \\ & 0.1 \sin(\pi\mu(t-1)) \end{aligned} \quad (11)$$

$$y(t) = \mu(t) + \xi(t) \quad (12)$$

其中:  $\xi(t)$  是服从零均值、标准差为 0.3 的高斯白噪声。以  $\mu(0) = \mu(-1) = 0.0$  为初值, 产生 1000 个带噪声数据, 前 500 个数据点用于训练 RBF 网络, 后 500 个数据用于测试。图 5(a) 为 500 个带噪声训练数据, 图 5(b) 为以  $\mu(0) = \mu(-1) = 0.1$  为初值产生的 1000 个无噪声原始数据。输入  $X(t) = [y(t-1), y(t-2)]^T$ 。核函数取二维高斯函数。

设算法参数如下: 种群大小  $P_s = 37$ , 重复搜索的代数  $N_c = 60$ , 权值提升迭代次数  $N_b = 20$ , 终止权值提升搜索过程的迭代精度  $\xi_b = 0.09$ 。最后所得结果如图 5 所示, 采用初始 RWBS 需要使用 18 项核函数 (见图 5(c)), 而采用本文方法需要使用 15 项可达到拟合要求 (见图 5(d))。

### 实验3 语音信号。

语音信号通常较为复杂且需要进行高度压缩, 故需对其进行高度的稀疏化表示。从 TIMIT 数据库中提取第 31 号语音信号, 如图 6(a), 并对该语音信号进行抽样后进行本文算



法的验证。抽样后所得样本数据含有 512 个抽样点,均采用高斯函数对其进行稀疏分解。算法参数设置如下:种群大小  $P_s = 40$ , 重复搜索的代数  $N_G = 60$ , 权值提升迭代次数  $N_B = 25$ , 终止权值提升搜索过程的迭代精度  $\xi_B = 0.02$ 。采用本文方法的效果如图 6(b) 所示, 初始 RWBS 算法得到的效果如图 6(c) 所示。

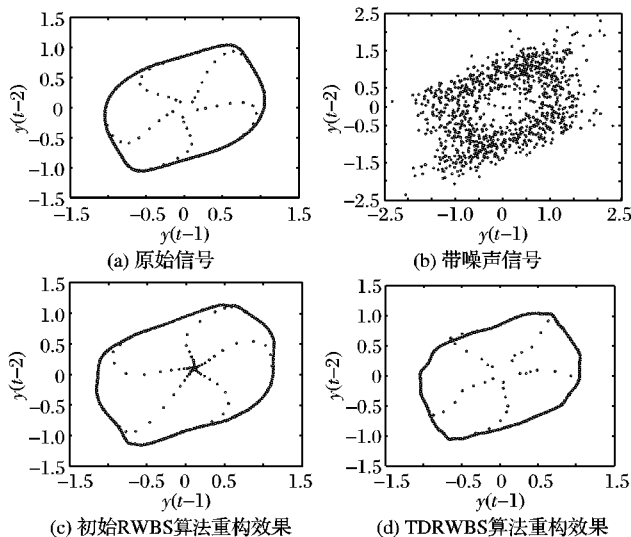


图5 TDRWBS 算法和 RWBS 算法在二维数据上的对比效果

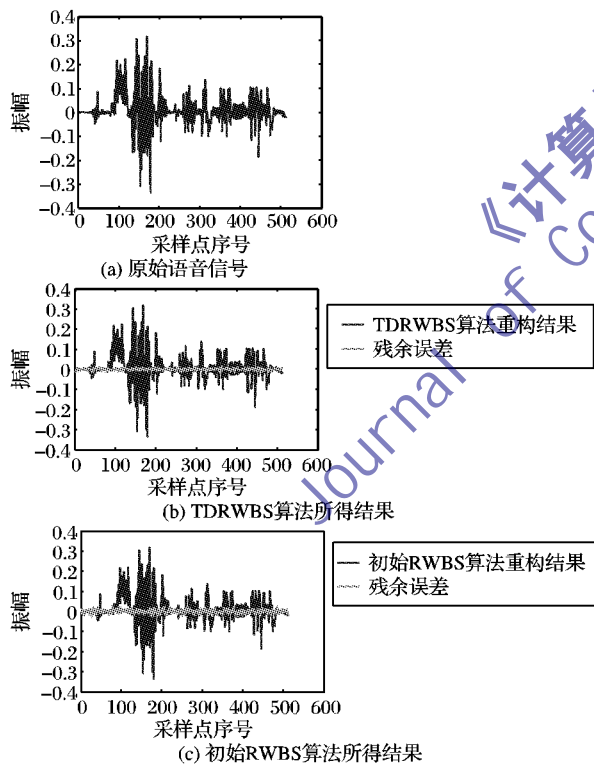


图6 TDRWBS 算法和 RWBS 算法在真实数据上的对比效果

为达到残余误差为原始信号 2% 的仿真要求,采用 RWBS 算法需要用到 50 项核函数,而本文 TDRWBS 算法只需要 40 项即可达到仿真要求。

从以上 3 个实验可看出,本文算法在对信号进行稀疏分解时确实可以产生更为稀疏的表示。在对较简单的信号进行表示时,本文算法尽管有优势但并不明显;而在对较复杂的信号(比如语音信号)进行稀疏分解时,可以明显地看出本文算法的优越性。这是因为:如果信号简单,稀疏分解所得核函数较少,仅仅需要很少几个核函数就可以对其进行表示,就几乎

不需要进行本文算法改进之处的计算,本文算法核函数选择过程是在已被选核函数达到一定程度时才会进行下一步有效的再次选择,如果已被选核函数较少,本文算法的改进之处就很难得到体现。故同初始 RWBS 算法相比,本文算法不仅适合于简单的信号,同样也适合比较复杂信号的稀疏分解。

### 3 结语

从信号表示稀疏性的角度看,要求还原原始信号时应用尽可能少的核函数。由于已选核函数不会降低模型表示的稀疏性,故考虑在信号稀疏分解时尽可能采用已选核函数来对信号进行稀疏分解;同时为了克服匹配追踪算法受字典集限制的缺点,采用了一种计算量小、收敛速度快的搜索算法——RWBS 算法。在进行稀疏分解过程中,迭代次数越多,信号越复杂时,本文方法的优越性就会越明显。最后通过实验验证了本文算法的优越性,同时说明数据越复杂本文算法的优越性越突出。

#### 参考文献:

- [1] MALLAT S, ZHANG Z. Matching pursuit with time-frequency dictionaries[J]. IEEE Transactions on Signal Processing, 1993, 41(12): 3397–3415.
- [2] 邹红星, 周小波, 李衍达. 时频分析: 回溯与前瞻[J]. 电子学报, 2000, 28(9): 78–84.
- [3] 张文耀. 基于匹配跟踪的低速率语音编码研究[D]. 北京: 中国科学院研究生院, 2002.
- [4] ARTHUR P L, PHILIPPOS C L. Voiced/unvoiced speech discrimination in noise using Gabor atomic decomposition[C]// Proceedings of IEEE International Conference on Acoustics, Speech and Signal Processing. Piscataway, NJ: IEEE Press, 2003: 820–828.
- [5] VINCENT P, BENGIO Y. Kernel matching pursuit[J]. Machine Learning, 2002, 48(1): 169–191.
- [6] CHEN S, COWAN D F N, GRANT P M. Orthogonal least squares learning algorithm for radial basis function networks[J]. IEEE Transactions on Neural Networks, 1991, 2(2): 302–309.
- [7] CHEN S, HONG X, HARRIS C J. Sparse kernel regression modeling using combined locally regularized orthogonal least squares and D-optimality experimental design[J]. IEEE Transactions on Automatic Control, 2003, 48(6): 1029–1036.
- [8] CHEN S, WU Y, LUK B L. Combined genetic algorithm optimization and regularized orthogonal least squares learning for radial basis function networks[J]. IEEE Transactions on Neural Networks, 1999, 10(5): 1239–1243.
- [9] CHEN S, LUK B L. Adaptive simulated annealing for optimization in signal processing application[J]. Signal Processing, 1999, 79(1): 177–128.
- [10] XU P, YAO D Z. Two dictionaries matching pursuit for sparse decomposition of signals[J]. Signal Processing, 2006, 86(11): 3472–3480.
- [11] CHEN S, HONG X, LUK B L, et al. A tunable radial basis function model for nonlinear system identification using particle swarm optimization[C]// IEEE Conference on Decision and Control. Piscataway, NJ: IEEE Press, 2009: 6762–6767.
- [12] CHEN S, WANG X X, BROWN D J. Sparse incremental regression modeling using correlation criterion with boosting search[J]. IEEE Signal Processing Letters, 2005, 12(3): 198–201.
- [13] CHEN S, WANG X X, HARRIS C J. Experiments with repeating weighted boosting search for optimization[J]. IEEE Transactions on System, Man, and Cybernetics, Part B, 2005, 35(4): 682–693.