

生成最优单毛坯条带 T 型布局方式的精确算法

季 君^{1*}, 陆一平¹, 查建中¹, 崔耀东²

(1. 北京交通大学 机械与电子控制工程学院, 北京 100044; 2. 广西大学 计算机与电子信息学院, 南宁 530004)

(* 通信作者电子邮箱 ji_jun2000@sina.com)

摘 要:为解决大规模矩形件布局问题,提出一个生成单毛坯条带 T 型布局方式的精确算法。该算法不仅可在合理时间内取得好的优化结果,而且在满足实际下料工艺的同时化简了切割工艺。该算法首先确定最优单毛坯条带,然后通过求解一维背包问题确定单毛坯条带在级中的布局方式和级在段中的最优布局方式,最后选择两个最优段生成布局方式。通过文献中的 63 道基准测题,将该算法与 5 种著名算法(经典两阶段、普通 T 型、同质块两阶段、普通布局算法和启发式算法 TABU500)进行了比较。实验结果表明,该算法在计算时间和材料利用率两方面都有效。

关键词:下料;二维无约束布局;单毛坯条带

中图分类号:TP391 **文献标志码:**A

Exact algorithm for generating optimal homogenous strip T-shape layouts

Ji Jun^{1*}, Lu Yi-ping¹, Zha Jian-zhong¹, Cui Yao-dong²

(1. School of Mechanical, Electronic and Control Engineering, Beijing Jiaotong University, Beijing 100044, China;

2. School of Computer, Electronics and Information, Guangxi University, Nanning Guangxi 530004, China)

Abstract: This paper presented an algorithm for generating the homogenous strip T-shape layouts for large-scale rectangular piece packing. The algorithm not only achieved good results within reasonable time, but also met the shearing and punching process need. The algorithm generated optimal homogenous strips, solved knapsack problems to obtain the strip layouts on the sections and the section layouts on the segments, and optimally selected two segments to compose the layouts. The algorithm was tested on 63 benchmark problems, and compared with five famous algorithms (the classic two-stage, the general T shape, the two-stage homogenous block, the general cutting pattern and the heuristic algorithm TABU500). The computational results indicate that the algorithm is efficient in both the computation time and the material utilization rate.

Key words: cutting stock; unconstrained two-dimensional layout; homogenous strip

0 引言

布局问题应用十分广泛,大量出现在机械制造、皮革服装、建筑设计、交通运输、航空航天、大规模集成电路设计等诸多领域。虽然很多学者对布局问题进行了研究^[1-13],但从计算复杂性理论上看,此问题已经被证明属于相当困难的组合优化问题。

本文讨论矩形件二维无约束布局(Unconstrained Two-Dimensional Cutting, UTDC)问题:将板材 $L \times W$ 切成 m 种毛坯,第 i 种毛坯尺寸为 $l_i \times w_i$,价值为 v_i ($1 \leq i \leq m$)。对每种毛坯在板材中出现的次数无约束,布局目标是使板材中所含毛坯的总价值最大。

针对 UTDC 问题的布局方式称为普通布局方式。目前虽然存在生成普通布局方式的精确算法^[5-6],但此类算法在解决大规模问题时所花费的时间无法容忍。因此,通常采用两种方法来解决 UTDC 问题,一种是应用特定布局方式,此类布局方式可在短时间获得好的优化结果,符合实际的下料工艺的要求,但板材利用率稍低,例如文献[7]提出的经典两阶段布局方式,文献[8]提出的普通 T 型布局方式,文献[9]中的同质块两阶段布局方式;另一种是通过启发式算法生成布局

方式,此类算法的优化结果接近于最优优化结果,但算法设计复杂,例如启发式算法 TABU500^[10]。

本文基于上述两种方法,提出了一个生成新型布局方式——单毛坯条带 T 型(Homogenous T-shape Strip, HTS)布局方式的精确算法来解决 UTDC 问题。

1 HTS 布局方式

1.1 单毛坯条带

单毛坯条带是由相同方向的同尺寸毛坯组成(见图 1)。



图 1 单毛坯条带

1.2 级

级由多个单毛坯条带组成(见图 2)。X 向级包括一系列从左往右水平排列的单毛坯条带,Y 向级由一系列从上往下竖直排列的单毛坯条带组成。

收稿日期:2012-03-07;修回日期:2012-07-3。 基金项目:国家自然科学基金资助项目(61063031, 60975046)。

作者简介:季君(1979-),女,山东泰安人,博士研究生,主要研究方向:智能设计与布局、优化计算; 陆一平(1965-),男,广西上林人,副教授,博士,主要研究方向:智能设计及布局、先进设计; 查建中(1947-),男,北京人,教授,博士,主要研究方向:智能工程、先进制造、网络制造; 崔耀东(1957-),男,河南林州人,教授,博士,主要研究方向:优化计算、CAD。

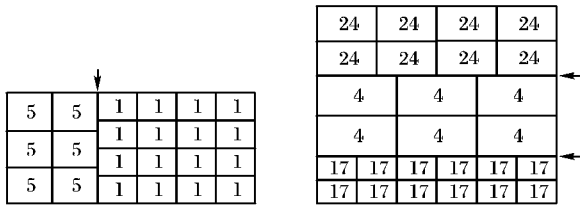


图2 级(数字为毛坯的编号,箭头为单毛坯条带的分界线)

1.3 段

段由多个级组成(见图3)。X向段由一系列从上往下竖排列的X向级组成,Y向段由一系列从左往右水平排列的Y向级组成。

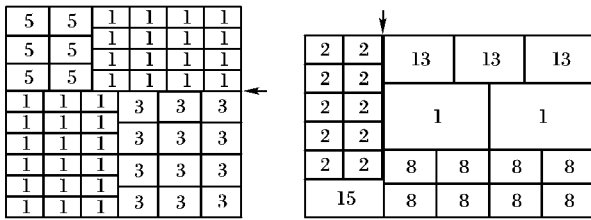
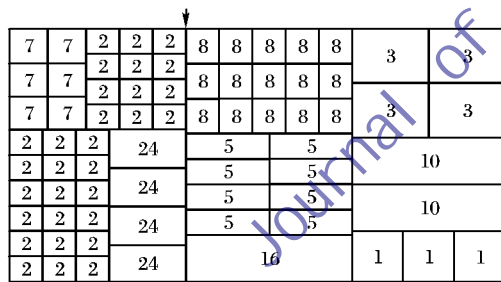


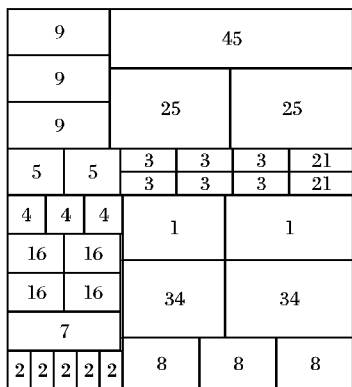
图3 段(箭头为级的分界线)

1.4 HTS 布局方式

图4所示为HTS布局方式,每个HTS布局方式由两个段组成,一个为X向段,另一个为Y向段。在HTS布局方式中,若一条竖直剪切线将板材分成左右两个段,称为X方式的HTS(HTSX)布局方式(见图4(a));若一条水平剪切线将板材分成上下两个段,称为Y方式的HTS(HTSY)布局方式(见图4(b))。HTS布局方式可以分四个阶段将板材分割成毛坯:第一阶段,将板材分成两个段;第二阶段,将段分割为级;第三阶段,将级分割成单毛坯条带;第四阶段,将单毛坯条带分割成毛坯。



(a) HTSX布局方式



(b) HTSY布局方式

图4 HTS 布局方式(箭头为段的边界)

在HTS布局方式中,当限制单毛坯条带由单个毛坯代替时,HTS布局方式就成了普通T型方式;当限制段的个数为1时,HTS布局方式就成了同质块两阶段方式。另外,同质块两

阶段布局方式是经典两阶段布局方式的子集^[9]。因此,针对HTS布局方式的解决方案好于以上3种布局方式的解决方案。

2 实现算法

假设板材的尺寸和矩形毛坯的尺寸都为整数,毛坯不允许转向。因此,尺寸 $L \times W$ 的板材与尺寸 $W \times L$ 的板材是一样的。假设 $L \geq W$ 。

生成HTS最优布局方式的算法(下面简称HTSA)包括以下步骤:1)求解最优单毛坯条带;2)确定单毛坯条带在级上的最优布局方式;3)确定级在段上的最优布局方式;4)确定最优HTSX布局方式;5)确定最优HTSY布局方式;6)确定最优HTS布局方式。

2.1 规范尺寸

规范尺寸已经被很多学者使用^[7-10]。在布局研究^[11]已经证实,矩形板块 $x \times y$ 中所含毛坯的最大价值,等于矩形板块 $x_0 \times y_0$ 中所含毛坯的最大价值,其中 x_0 为不大于 x 的最大规范尺寸, y_0 为不大于 y 的最大规范尺寸。对于不同类型的布局方式,应该根据其特点定义适当的规范尺寸,以加快算法的求解速度。

定义1 单毛坯条带的规范尺寸。

单毛坯条带的规范长度为毛坯的长度的集合,规范宽度为毛坯的宽度的集合,分别设为 $P_s^{(i)}$ 和 $Q_s^{(i)}$ 。

$$P_s^{(i)} = \{x = z_i l_i \mid z_i \in \mathbf{N}; 0 \leq x \leq L\} \quad (1)$$

$$Q_s^{(i)} = \{y = z_i w_i \mid z_i \in \mathbf{N}; 0 \leq y \leq W\} \quad (2)$$

假设集合 $P_s^{(i)}$ 中的元素记为 $p_0^s, p_1^s, \dots, p_M^s$,且 $0 \leq p_0^s < \dots < p_M^s \leq L$ 。集合 $Q_s^{(i)}$ 中的元素记为 $q_0^s, q_1^s, \dots, q_N^s$,且 $0 \leq q_0^s < \dots < q_N^s \leq W$ 。

定义2 级的规范尺寸。

级是由单毛坯条带组成。级的规范长度是各种毛坯长度的集合,级的规范宽度是各种毛坯宽度的集合,假设分别设为 P 和 Q :

$$P = \{x = \sum_{i=1}^m z_i l_i \mid z_i \in \mathbf{N}; i = 1, 2, \dots, m; 0 \leq x \leq L\} \quad (3)$$

$$Q = \{y = \sum_{i=1}^m z_i w_i \mid z_i \in \mathbf{N}; i = 1, 2, \dots, m; 0 \leq y \leq W\} \quad (4)$$

假设集合 P 中的元素记为 p_0, p_1, \dots, p_M ,且 $0 \leq p_0 < \dots < p_M \leq L$ 。集合 Q 中的元素记为 q_0, q_1, \dots, q_N ,且 $0 \leq q_0 < \dots < q_N \leq W$ 。

定义3 段的规范尺寸。

段是由方向相同的级组成,因此,段的规范尺寸等于级的规范尺寸。

2.2 最优单毛坯条带 $x \times y$ 的价值

2.2.1 确定单毛坯条带 $x \times y$ 中所含毛坯数量的最大值

设 $F_i(x, y)$ 为单毛坯条带 $x \times y$ 中含第 i 种毛坯数量的最大值,有如下递推公式:

$$F_i(x, y) = \text{int}(x/l_i) \times \text{int}(y/w_i); 0 \leq x \leq L, 0 \leq y \leq W \quad (5)$$

2.2.2 确定单毛坯条带 $x \times y$ 所含毛坯的最大价值

设 $S(x, y)$ 为单毛坯条带 $x \times y$ 的最大价值,这里 v_i 为第 i 种毛坯的单价,则:

$$S(x, y) = \max_i [F_i(x, y) \times v_i] \quad (6)$$

其中: $i = 1, 2, \dots, m; x \in P_s^{(i)}; y \in Q_s^{(i)}$ 。

2.3 确定单毛坯条带在级中的最优布局方式

1) 确定单毛坯条带在 X 向级的最优布局方式:

$$u(x, y) = \left\{ \max \left[\sum_{i=1}^M d_i S(p_i, y) \right]; \sum_{i=1}^M d_i p_i \leq x; d_i \in \mathbf{N} \right\} \quad (7)$$

2) 确定单毛坯条带在 Y 向级的最优布局方式:

$$v(x, y) = \left\{ \max \left[\sum_{i=1}^N d_i S(x, q_i) \right]; \sum_{i=1}^N d_i q_i \leq y; d_i \in \mathbf{N} \right\} \quad (8)$$

背包问题解法详见文献[14]。

2.4 确定级在段上的最优布局方式

假设 $f_X(x, W)$ 是 X 向段 $x \times W$ 的价值, $f_Y(x, W)$ 是 Y 向段 $x \times W$ 的价值, 则:

$$f_X(x, W) = \left\{ \max \left[\sum_{i=1}^N d_i u(x, q_i) \right]; \sum_{i=1}^N d_i q_i \leq W; d_i \in \mathbf{N} \right\} \quad (9)$$

$$f_Y(x, W) = \left\{ \max \left[\sum_{i=1}^N d_i v(W, q_i) \right]; \sum_{i=1}^N d_i q_i \leq x; d_i \in \mathbf{N} \right\} \quad (10)$$

2.5 最优 HTS 布局方式

1) 最优 HTSX 布局方式。

对于 HTSX 布局方式, 假设竖直分割线的位置为 x , 左侧为 X 向段 $x \times W$, 右侧为 Y 向段 $(L - x) \times W$; 设最优 HTSX 布局方式的值为 $V_X(x)$, 则:

$$V_X(x) = \max \{ f_X(x, W) + f_Y(L - x, W) \} \quad (11)$$

2) 最优 HTSY 布局方式。

对于 HTSY 布局方式, 假设水平分割线的位置为 y , 上边为 X 向段 $L \times y$, 下边为 Y 向段 $L \times (W - y)$; 设最优 HTSY 布局方式的值为 $V_Y(y)$, 则有:

$$V_Y(y) = \max \{ f_X(L, y) + f_Y(L, W - y) \} \quad (12)$$

3) 最优 HTS 布局方式。

设最优 HTS 布局方式的值为 V_{\max} , 则:

$$V_{\max} = \max \{ V_X(x), V_Y(y) \} \quad (13)$$

2.6 HTSA 的时间复杂度

在式(1) ~ (4) 确定规范长度和宽度时, 所花费的时间为 $O(mL)$ 。

在式(5) ~ (6) 确定最优单毛坯条带时, 所花费的时间为 $O(mLW)$ 。

在式(7) ~ (8) 确定最优级中, 所花费的时间为 $O(LW^2 + WL^2)$ 。

在式(9) ~ (10) 确定最优段中, 所花费的时间为 $O(LW^2 + WL^2 + L^2 + W^2)$ 。

在 2.5 节中, 求解最优 HTS 布局方式所花费的时间为 $O(L + W)$ 。

HTSA 总花费的时间为 $O(mL + mLW + 2LW^2 + 2WL^2 + WL^2 + L^2 + W^2 + L + W)$, 由 $WL^2 \gg L^2$, HTSA 的时间复杂度可表示为 $O[LW(m + 2L + 2W)]$, 而文献[13] 的普通布局方式的算法的时间复杂度为 $O(L^2 W^2)$ 。

3 实验结果

实验用计算机为 Pentium 4 主频 2.8 GHz CPU, 512 MB 内存。基准测题数据来自: <http://www.laria.u-picardie.fr/hifi/OR-Benchmark/>。

3.1 第一组测题的实验结果

本节包含 43 道基准测题, 具体参考文献[7]。对于每道测题, 本文算法生成最优 HTS 布局方式 (简称 HTSA), 文献[9]中的算法可生成最优同质块两阶段布局方式 (简称 2SHB), 文献[8]中的算法可生成最优普通 T 型布局方式 (简称 T-shape), 文献[7]中的算法生成最优两阶段布局方式 (简称 2STAGE), 文献[12]中的算法生成最优普通布局方式 (简称 GENERAL)。设 V_{HTSA} 、 V_{2SHB} 、 $V_{T-shape}$ 、 V_{2STAGE} 和 $V_{GENERAL}$ 分别为各算法得到的布局价值, 表 1 为不同算法的计算结果。

表 1 第一组测题的实验结果 (43 道测题)

ID	$V_{GENERAL}$	V_{HTSA}	V_{2SHB}	$V_{T-shape}$	V_{2STAGE}	ID	$V_{GENERAL}$	V_{HTSA}	V_{2SHB}	$V_{T-shape}$	V_{2STAGE}
H	12 348	▲	12 192	12 132	11 988	HZ2	8 226	▲	▲	▲	8 145
HZ1	5 226	▲	▲	▲	▲	MW1	3 882	▲	▲	▲	▲
M1	15 024	▲	▲	▲	▲	MW2	24 950	▲	▲	▲	▲
M2	73 176	▲	72 564	72 564	72 172	MW3	37 068	▲	▲	▲	35 486
M3	142 817	▲	▲	▲	141 922	MW4	59 576	▲	▲	▲	59 382
M4	265 768	▲	▲	▲	▲	MW5	189 924	▲	▲	▲	▲
M5	577 882	▲	▲	▲	▲	BW	2 307 817	▲	▲	▲	▲
B	8 997 780	▲	▲	▲	▲	W1	162 867	▲	▲	161 424	161 424
U1	22 370 130	22 363 541	22 351 950	22 351 950	22 338 048	W2	35 159	▲	34 656	34 656	34 556
U2	20 232 224	20 135 340	20 118 655	20 118 655	20 001 327	W3	234 108	▲	▲	▲	▲
U3	48 142 840	48 095 058	48 095 058	48 029 748	47 977 258	UW1	6 036	▲	▲	▲	▲
UU1	242 919	▲	241 260	241 260	239 076	UW2	8 468	▲	▲	▲	▲
UU2	595 288	▲	▲	▲	▲	UW3	6 302	▲	▲	6 226	6 226
UU3	1 072 764	▲	▲	▲	▲	UW4	8 326	▲	▲	▲	▲
UU4	1 179 050	1 178 295	1 178 295	1 178 295	1 175 431	UW5	7 780	▲	▲	▲	▲
UU5	1 868 999	▲	1 868 985	1 868 985	1 868 985	UW6	6 615	▲	▲	▲	▲
UU6	2 950 760	▲	▲	▲	2 944 368	UW7	10 464	▲	▲	▲	▲
UU7	2 930 654	▲	▲	▲	2 925 848	UW8	7 692	▲	▲	▲	▲
UU8	3 959 352	▲	▲	▲	3 924 280	UW9	7 038	▲	▲	▲	▲
UU9	6 100 692	▲	▲	▲	▲	UW10	7 507	▲	▲	▲	▲
UU10	11 955 852	▲	▲	▲	11 674 068	UW11	15 747	▲	▲	▲	▲
UU11	13 157 811	13 147 305	13 141 175	13 127 726	13 107 194						

注: “▲” 为布局方式价值达到最优布局结果。

各种算法得到的最优化结果的测题数目如下: HTSA 为 38 道, 2SHB 为 34 道, T-shape 为 31 道, 2STAGE 为 23 道。因此, HTSA 在最优化结果上好于其他算法。

各种算法在布局价值的相对较好和相等优化结果的测题数目如下: 1) HTSA 的优化结果有 20 道测题好于 2STAGE, 其余的 23 道相等; 2) HTSA 的优化结果有 11 道测题好于 T-shape, 其余的 32 道相等; 3) HTSA 的优化结果有 8 道测题 2SHB, 其余的 35 道相等。

HTSA 解决 43 道测题的总时间为 22.79 s, 每题的平均计算时间为 0.53 s, 计算时间在实际应用中合理。

综上可看出: 1) HTSA 的布局价值等于或接近 GENERAL; 2) HTSA 在布局价值好于 2SHB、T-shape 和 2STAGE。

3.2 第二组测题的实验结果

本节包含 20 道测题, 具体参考文献[10]。 V_{TABU500} 表示 TABU500 得出的布局价值。表 2 为具体的实验结果。

表 2 第二组测题的实验结果(20 道测题)

ID	V_{GENERAL}	V_{HTSA}	V_{TABU500}	ID	V_{GENERAL}	V_{HTSA}	V_{TABU500}
AP10	3 589 703	3 589 455	3 585 450	AP20	5 545 818	5 532 197	5 521 885
AP11	4 188 915	4 185 432	4 148 798	AP21	3 484 406	▲	▲
AP12	5 156 065	5 153 818	5 137 069	AP22	4 145 317	4 140 487	4 116 075
AP13	3 486 302	3 485 944	3 483 722	AP23	3 546 535	3 539 116	3 535 623
AP14	4 463 550	▲	▲	AP24	3 948 037	3 943 235	3 939 485
AP15	6 047 188	6 044 283	5 997 899	AP25	3 507 615	▲	3 500 380
AP16	7 566 719	7 560 189	7 513 717	AP26	2 683 689	2 664 507	2 656 729
AP17	4 535 302	4 535 262	4 512 417	AP27	2 438 174	2 429 052	2 435 046
AP18	5 825 956	5 820 472	5 759 831	AP28	4 065 011	▲	▲
AP19	6 826 674	6 825 808	6 763 810	AP29	3 652 858	▲	▲

注:“▲”为布局方式价值达到最优布局结果。

在 20 道测题中, HTSA 的优化结果有 14 道测题好于 TABU500, 有 5 道与 TABU500 相等, 有 1 道差于 TABU500。

HTSA 解决 20 道测题的总时间为 43.20 s, 每题的平均计算时间为 2.16 s, 计算时间在实际应用中合理。

综上可看出: 1) HTSA 的布局价值等于或接近 GENERAL; 2) HTSA 在优化结果好于 TABU500。

4 结语

本文提出了一种新型布局方式——HTS 布局方式, 并通过高效算法 HTSA 来生成此种布局方式。HTS 布局方式可以作为一种特定布局方式, 其优化结果好于经典两阶段布局方式、普通 T 型布局方式和同质块两阶段布局方式。另一方面, HTSA 也可作为一种启发式算法, HTSA 总体优化结果好于启发式 TABU500。因此, HTSA 在解决大规模二维布局问题具有高效性。

参考文献:

- [1] 姜永亮, 杨志强, 张诚一. 基于两阶段的分段单一毛坯矩形优化布局[J]. 计算机应用, 2011, 31(6): 1689–1691.
- [2] 季君, 陆一平, 查建中, 等. 生成矩形毛坯最优两段布局方式的确定型算法[J]. 计算机学报, 2012, 35(1): 183–191.
- [3] 蒋兴波, 吕肖庆, 刘成城. 二维矩形条带装箱问题的底部左齐择优匹配算法[J]. 软件学报, 2009, 6(20): 1528–1538.
- [4] 黄文奇, 刘景发. 基于欧氏距离的矩形 Paking 问题的确定性启发式求解算法[J]. 计算机学报, 2006, 29(5): 735–739.
- [5] SEONG Y J, KANG M K. A best-first branch and bound algorithm for unconstrained two-dimensional cutting problems[J]. Operations

Research Letters, 2003, 31(4): 301–307.

- [6] HIFI M, ZISSIMOPOULOS V. A recursive exact algorithm for weighted two-dimensional cutting[J]. European Journal of Operational Research, 1996, 91(3): 553–564.
- [7] HIFI M. Exact algorithms for large-scale unconstrained two and three staged cutting problems[J]. Computational Optimization and Applications, 2001, 18(1): 63–88.
- [8] CUI Y. Generating optimal T-shape cutting patterns for rectangular blanks[J]. Journal of Engineering Manufacture, 2004, 218(8): 857–866.
- [9] 季君. 基于块结构的矩形件两阶段优化布局[D]. 桂林: 广西师范大学, 2006.
- [10] ALVAREZ-VALDES R, PARAION A, TAMARIT J M. A tabu search algorithm for large-scale guillotine (un) constrained two-dimensional cutting problems[J]. Computers and Operations Research, 2002, 29(7): 925–947.
- [11] 崔耀东. 计算机布局及应用[M]. 北京: 机械工业出版社, 2004.
- [12] CUI Y, WANG Z, LI J. Exact and heuristic algorithms for staged cutting problems[J]. Journal of Engineering Manufacture, 2005, 219(2): 201–208.
- [13] GILMORE P C, GOMORY R E. Multistage cutting stock problems of two and more dimensions[J]. Operations Research, 1965, 13(1): 94–119.
- [14] KELLERER H, PFERSCHY U, PISINGER D. Knapsack problems[M]. Berlin: Springer-Verlag, 2004.