文章编号:1001 -9081(2012)10 -2745 -03
doi:10.3724/SP.J.1087.2012.02745

二维双曲守恒律标量方程的三阶 CWENO-型熵相容算法

郑素佩[1*],封建湖[1],刘彩侠[2]
(1.长安大学 理学院,西安 710064; 2.河南工业大学 理学院,郑州 450001)
(*通信作者电子邮箱 zspnwpu@gmail.com)

摘 要:应用提出的中心加权基本无振荡(CWENO)-型熵相容格式求解了二维双曲守恒律方程初边值问题,对所得数值结果进行了分析与讨论,并通过与准确解的比较发现该数值求解格式稳定性条件可以取到0.6,而激波过渡带只有1~2个网格单元。实验结果表明该数值求解格式分辨率高且数值稳定性好。

关键词:熵守恒格式;熵相容格式;三阶优化龙格库塔方法;半离散;双曲守恒律
中图分类号:TP301.6;TP391.4 **文献标志码**:A

CWENO-type entropy consistent scheme for two dimensional scalar hyperbolic conservation laws

ZHENG Su-pei[1*], FENG Jian-hu[1], LIU Cai-xia[2]
(1. *School of Science, Chang' an University, Xi' an Shaanxi* 710064, *China*;
2. *School of Science, Henan University of Technology, Zhengzhou Henan* 450001, *China*)

Abstract: This paper advanced the Central Weighted Essentially Nonoscillatory (CWENO)-type entropy consistent schemes to simulate the two-dimensional conservation laws of the initial boundary value problem. The numerical results were analyzed and compared with the exact solutions. It is pointed out that the courant-friedrich-lewy can attain 0.6 and shock transition zone is one or two cells. The results indicate that the new numerical method in this paper has high-resolution and strong stability.

Key words: entropy conservative schemes; entropy consistent schemes; third order optimal Runge-Kutta method; semi-discrete; hyperbolic conservation laws

0 引言

二维双曲守恒律标量方程:

$$u_t + f(u)_x + g(u)_y = 0 \tag{1}$$

其中 $u \in \mathbf{R}$。对该类方程的数值求解,即便在初始条件充分光滑的情况下,解在某一时刻也会出现间断[1-2],因而如何准确捕捉间断是该类方程数值求解研究的核心内容。近年来出现了多种高精度、高分辨率的数值求解格式,如基本无振荡(Essentially Non-Oscillatory, ENO)和加权基本无振荡(Weighted Essentially Non-Oscillatory, WENO)[1-2],CWENO[3],中心-迎风类格式[4]等。为准确捕捉间断且有效抑制间断区域非物理振荡的产生,这些格式均引入了一定的数值粘性。为构造出更符合物理特征的数值求解格式,Tadmor[5]首次提出了熵格式的概念。后来由Tadmor[6],LeFloch等[7],Lukáčová等[8-11]对熵相容、熵稳定格式进行了进一步研究。国内茅德康教授[12-13]、封建湖教授[14]课题组也对该类格式进行了探讨,构造了行之有效的熵稳定(耗散)格式。

本文针对二维双曲守恒律标量方程的数值求解,构造出新的CWENO-型熵相容格式,最后通过若干数值算例验证了该格式的有效性。从数值结果可以看出该数值求解格式数值稳定性好,可以准确捕捉间断,且能有效地抑制非物理振荡的产生。

此外,本文采用的CWENO重构无需黎曼解算器和特征值分解(方程组问题),算法易于编程实现。

1 格式构造

为简单起见,本文空间方向采用均匀网格,记:

$$I_{ij} = \left[x_{i-\frac{1}{2}}, x_{i+\frac{1}{2}}\right] \times \left[y_{j-\frac{1}{2}}, y_{j+\frac{1}{2}}\right]$$

$$\Delta x = x_{i+\frac{1}{2}} - x_{i-\frac{1}{2}}$$

$$\Delta y = y_{j+\frac{1}{2}} - y_{j-\frac{1}{2}}$$

$$\bar{u}^n_{ij}(t) = \frac{1}{\Delta x \Delta y}\int_{y_{j-\frac{1}{2}}}^{y_{j+\frac{1}{2}}}\int_{x_{i-\frac{1}{2}}}^{x_{i+\frac{1}{2}}} u(x,y,t^n)\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y$$

假定在 t^n 时刻单元 I_{ij} 的函数均值 $\{\bar{u}^n_{ij}\}$ 已知。令 $\chi_l(x,y)$ 为单元 I_l 上的特征函数,构造分段多项式 $\tilde{u}(x,y,t^n) := \sum_l P^z_{ij}(x,y)\chi_l$,其中 $z=\{x,y\}$,$l=\{i,j\}$,$P^z_{ij}(x,y)$ 是某一确定幂次的插值多项式。记:

$$u^+_{i+\frac{1}{2},j} := P^x_{i+1,j}(x_{i+\frac{1}{2}}, y_j)$$

$$u^-_{i+\frac{1}{2},j} := P^x_{i,j}(x_{i+\frac{1}{2}}, y_j)$$

$$u^+_{i,j+\frac{1}{2}} := P^y_{i,j+1}(x_i, y_{j+\frac{1}{2}})$$

$$u^-_{i,j+\frac{1}{2}} := P^y_{i,j}(x_i, y_{j+\frac{1}{2}})$$

收稿日期:2012-04-05;**修回日期**:2012-05-21。
基金项目:国家自然科学基金资助项目(11171043);中央高校基本科研业务费资助项目(CHD2012TD015;CHD2010JC060)。

作者简介:郑素佩(1978-),女,河南许昌人,讲师,博士,主要研究方向:偏微分方程数值解法、计算流体力学; 封建湖(1960-),男,陕西子洲人,教授,博士,主要研究方向:偏微分方程数值解法、计算流体力学、图像处理; 刘彩侠(1978-),女,河南夏邑人,讲师,硕士,主要研究方向:偏微分方程数值解法、空气动力学。

这些量表示单元 I_{ij} 边界上 $\tilde{u}(x,y,t^n)$ 的值。

1.1 熵相容格式

本节介绍二维双曲守恒律方程熵相容格式的构造过程,先介绍相关概念,然后介绍格式的构造过程。

1.1.1 相关概念

定义[6] 如果存在一个凸函数 $E:\mathbf{R}^n\to\mathbf{R}$ 和函数 $F:\mathbf{R}^n\to\mathbf{R}$,使得对所有的 $\boldsymbol{u}\in\mathbf{R}^n$,均有 $(F'(\boldsymbol{u}))^{\mathrm{T}}=(E'(\boldsymbol{u}))^{\mathrm{T}}f'(\boldsymbol{u})$,则$(E,F)$称为双曲型守恒律方程的一组熵对。$E$ 称为熵函数,F 称为熵通量。而熵势 ψ 满足:

$$\psi(v(\boldsymbol{u}))=v(\boldsymbol{u})f(\boldsymbol{u})-F(\boldsymbol{u}),且\ \psi'(v)=f(v)\tag{2}$$

其中 v 表示熵变量,且 $v(\boldsymbol{u})=E'(\boldsymbol{u})$。

对二维标量方程(1),x,y 方向的熵函数可取为 $E^x=E^y=u^2/2$(详见文献[6])(上标 x,y 表示两个空间方向,下同),则对应的熵变量 $v^x(u)=v^y(u)=E'(u)=u$。依据该定义,下面分别推导出当方程(1)中通量函数 $f(u),g(u)$ 不同时对应的熵通量和熵势表达式。

当 $f(u)=g(u)=\dfrac{u^2}{2}$ 时,熵通量 $F(u)=G(u)=\dfrac{u^3}{3}$,熵势 $\psi^x(u)=\psi^y(u)=u\times\dfrac{u^2}{2}-\dfrac{u^3}{3}=\dfrac{u^3}{6}$。

当 $f(u)=g(u)=-\dfrac{u^2}{2}$,此时熵通量 $F(u)=G(u)=-\dfrac{u^3}{3}$,熵势 $\psi^x(u)=\psi^y(u)=-u\times\dfrac{u^2}{2}+\dfrac{u^3}{3}=-\dfrac{u^3}{6}$。

1.1.2 格式构造

对二维双曲守恒律标量方程(1),其半离散格式为:

$$\frac{\mathrm{d}\bar{u}_{ij}}{\mathrm{d}t}=-\frac{H^x_{i+1/2,j}-H^x_{i-1/2,j}}{\Delta x}-\frac{H^y_{i,j+1/2}-H^y_{i,j-1/2}}{\Delta y}:=L_{ij}(u_{ij})\tag{3}$$

基于文献[3,9],本文构造出二维双曲守恒律方程的三阶 CWENO-型熵相容格式,该格式的数值通量函数 $H^x_{i+1/2,j}$,$H^y_{i,j+1/2}$ 的表达式如下:

$$H^x_{i+1/2,j}=f^{EC}_{i+1/2,j}-\frac{1}{4}|u^+_{i+1/2,j}+u^-_{i+1/2,j}|(u^+_{i+1/2,j}-u^-_{i+1/2,j})-\frac{1}{12}|u^+_{i+1/2,j}-u^-_{i+1/2,j}|(u^+_{i+1/2,j}-u^-_{i+1/2,j})\tag{4}$$

$$H^y_{i,j+1/2}=f^{EC}_{i,j+1/2}-\frac{1}{4}|u^+_{i,j+1/2}+u^-_{i,j+1/2}|(u^+_{i,j+1/2}-u^-_{i,j+1/2})-\frac{1}{12}|u^+_{i,j+1/2}-u^-_{i,j+1/2}|(u^+_{i,j+1/2}-u^-_{i,j+1/2})\tag{5}$$

式(4)、(5)中第一项为熵守恒数值通量函数,用于保证格式的熵守恒性,其具体的表达式如下(详见文献[9]),

$$f^{EC}_{i+1/2,j}=\frac{\psi^x(u^+_{i+1/2,j})-\psi^x(u^-_{i+1/2,j})}{u^+_{i+1/2,j}-u^-_{i+1/2,j}}$$

$$f^{EC}_{i,j+1/2}=\frac{\psi^y(u^+_{i,j+1/2})-\psi^y(u^-_{i,j+1/2})}{u^+_{i,j+1/2}-u^-_{i,j+1/2}}$$

针对不同类型方程熵势 ψ 的具体表达式详见 1.1.1 节,而 $u^+_{i+1/2,j},u^-_{i+1/2,j},u^+_{i,j+1/2},u^-_{i,j+1/2}$ 的求解公式参见 1.2 节。式(4)、(5)中的第二、三项用来保证格式的熵相容性。

1.2 三阶 CWENO 格式

函数 $P^z_{ij}(x,y)$ 通过三个插值多项式 P^x_L,P^x_C,P^x_R 的凸组合来求得,其中 $z=\{x,y\}$。

$$P^z_{ij}(x)=\omega^z_LP^z_L+\omega^z_CP^z_C+\omega^z_RP^z_R\tag{6}$$

其中:$\omega^z_i\geq 0,\forall i\in\{L,C,R\},\sum_i\omega_i=1$。

具体地,$\omega^z_i=\dfrac{\alpha_i}{\sum_m\alpha_m}$,$\alpha^z_i=\dfrac{C_i}{(\varepsilon+IS_i)^p}$,其中 $m,n\in\{L,C,R\}$。为防止分母为零,ε 取为一个很小的正数,一般取 $\varepsilon=10^{-6}$;p 为正整数,一般取 $p=2$。为保证解在光滑区域具有三阶精度,取 $C_L=C_R=1/4,C_C=1/2$。x,y 方向分别求解。

式(6)中 $P^x_m,P^y_n,m,n\in\{L,C,R\}$ 的具体表达式如下,详细推导过程见文献[3]。

$$P^x_R(x)=\bar{u}^n_{i,j}+\frac{\bar{u}^n_{i+1,j}-\bar{u}^n_{i,j}}{\Delta x}(x-x_i)$$

$$P^x_L(x)=\bar{u}^n_{i,j}+\frac{\bar{u}^n_{i,j}-\bar{u}^n_{i-1,j}}{\Delta x}(x-x_i)$$

$$P^x_C(x)=\bar{u}^n_{i,j}-\frac{\bar{u}^n_{i+1,j}-2\bar{u}^n_{i,j}+\bar{u}^n_{i-1,j}}{12}+\frac{\bar{u}^n_{i+1,j}-\bar{u}^n_{i-1,j}}{2\Delta x}(x-x_i)+\frac{\bar{u}^n_{i+1,j}-2\bar{u}^n_{i,j}+\bar{u}^n_{i-1,j}}{12\Delta x^2}(x-x_i)^2$$

$$P^y_R(y)=\bar{u}^n_{i,j}+\frac{\bar{u}^n_{i,j+1}-\bar{u}^n_{i,j}}{\Delta y}(y-y_j)$$

$$P^y_L(x)=\bar{u}^n_{i,j}+\frac{\bar{u}^n_{i,j}-\bar{u}^n_{i,j-1}}{\Delta y}(y-y_j)$$

$$P^y_C(x)=\bar{u}^n_{i,j}-\frac{\bar{u}^n_{i,j+1}-2\bar{u}^n_{i,j}+\bar{u}^n_{i,j-1}}{12}+\frac{\bar{u}^n_{i,j+1}-\bar{u}^n_{i,j-1}}{2\Delta y}(y-y_j)+\frac{\bar{u}^n_{i,j+1}-2\bar{u}^n_{i,j}+\bar{u}^n_{i,j-1}}{12\Delta y^2}(y-y_j)^2$$

$IS^x_i,IS^y_j,i,j\in\{L,C,R\}$ 为光滑因子,其具体表达式如下:

$$IS^x_L=(\bar{u}^n_{i,j}-\bar{u}^n_{i-1,j})^2$$

$$IS^x_R=(\bar{u}^n_{i+1,j}-\bar{u}^n_{i,j})^2$$

$$IS^x_C=\frac{13}{3}(\bar{u}^n_{i+1,j}-2\bar{u}^n_{i,j}+\bar{u}^n_{i-1,j})^2+\frac{1}{4}(\bar{u}^n_{i+1,j}-\bar{u}^n_{i-1,j})^2$$

$$IS^y_L=(\bar{u}^n_{i,j}-\bar{u}^n_{i,j-1})^2$$

$$IS^y_R=(\bar{u}^n_{i,j+1}-\bar{u}^n_{i,j})^2$$

$$IS^y_C=\frac{13}{3}(\bar{u}^n_{i,j+1}-2\bar{u}^n_{i,j}+\bar{u}^n_{i,j-1})^2+\frac{1}{4}(\bar{u}^n_{i,j+1}-\bar{u}^n_{i,j-1})^2$$

1.3 TVD Runge-Kutta 方法

对双曲守恒律方程的半离散形式(式(3)),本文采用具有强稳定特点的优化三阶 TVD Runge-Kutta 方法[1]进行数值离散,具体表达式如下:

$$\bar{u}^{(0)}_{i,j}=\bar{u}^n_{i,j}$$

$$\bar{u}^{(1)}_{i,j}=\bar{u}^{(0)}_{i,j}+\Delta tL(\bar{u}^{(0)}_{i,j})$$

$$\bar{u}^{(2)}_{i,j}=\frac{3}{4}\bar{u}^{(0)}_{i,j}+\frac{1}{4}\bar{u}^{(1)}_{i,j}+\frac{1}{4}\Delta tL(\bar{u}^{(1)}_{i,j})$$

$$\bar{u}^{(3)}_{i,j}=\frac{1}{3}\bar{u}^{(0)}_{i,j}+\frac{2}{3}\bar{u}^{(2)}_{i,j}+\frac{2}{3}\Delta tL(\bar{u}^{(2)}_{i,j})$$

$$\bar{u}^{n+1}_{i,j}=\bar{u}^{(3)}_{i,j}$$

稳定性条件 $CFL\leqslant 1$(CFL 条件数,即 Courant-Friedrichs-Lewy 条件数),其中 $CFL=\max_{ij}\left(S^n_{i,j}\dfrac{\Delta t}{\Delta x}\right)$,而 $S^n_{i,j}$ 为 t^n 时刻单元 I_{ij} 上的最大传播速度。

2 数值算例

二维双曲守恒律标量方程,$f(u)=g(u)=-u^2/2$,在满

足算例 1 所述初边值条件下问题的数值解。由式(4) 得方程的 CWENO- 型熵守恒通量函数如下。

$$f^{EC}_{i+1/2,j}=\frac{\psi^{x}(u^{+}_{i+1/2,j})-\psi^{x}(u^{-}_{i+1/2,j})}{u^{+}_{i+1/2,j}-u^{-}_{i+1/2,j}}=-\frac{1}{6}\frac{(u^{+}_{i+1/2,j})^{3}-(u^{-}_{i+1/2,j})^{3}}{u^{+}_{i+1/2,j}-u^{-}_{i+1/2,j}}=-\frac{(u^{+}_{i+1/2,j})^{2}+u^{+}_{i+1/2,j}u^{-}_{i+1/2,j}+(u^{-}_{i+1/2,j})^{2}}{6}$$

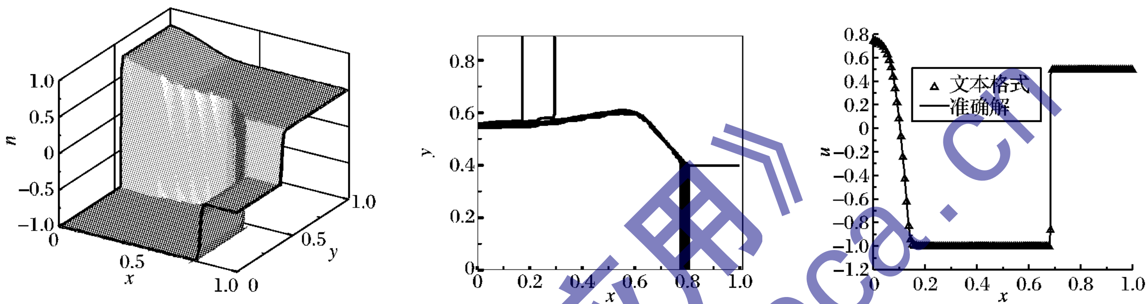
$$f^{EC}_{i,j+1/2}=\frac{\psi^{y}(u^{+}_{i,j+1/2})-\psi^{y}(u^{-}_{i,j+1/2})}{u^{+}_{i,j+1/2}-u^{-}_{i,j+1/2}}=-\frac{1}{6}\frac{(u^{+}_{i,j+1/2})^{3}-(u^{-}_{i,j+1/2})^{3}}{u^{+}_{i,j+1/2}-u^{-}_{i,j+1/2}}=-\frac{(u^{+}_{i,j+1/2})^{2}+u^{+}_{i,j+1/2}u^{-}_{i,j+1/2}+(u^{-}_{i,j+1/2})^{2}}{6}$$

将上面的表达式分别代入到式(4)、(5) 中,即得到用于求解双曲守恒律方程的 CWENO- 型熵相容数值求解格式。

算例 1　双曲守恒律方程具有如下初边值条件的混合问题[15]:

$$u(x,y,0)=\begin{cases}-1, & x<0.5,y\leqslant 0.5\\ -0.2, & x\geqslant 0.5,y\leqslant 0.5\\ 0.5, & x\geqslant 0.5,y>0.5\\ 0.8, & x<0.5,y>0.5\end{cases}$$

计算区域$[0,1]\times[0,1]$,边界条件满足$\frac{\partial u}{\partial n}=0$,在 $t=0.5$ 时刻的数值结果如图 1 所示。



(a) 速度变化　(b) 等值线图　(c) y=0.55剖面图

图 1　算例 1 在 $t=0.5$,$CFL=0.6$ 时的云图、等值线图和剖面图

由图 1(a) 所示结果可以看出,数值格式稳定,在间断区域没有伪振荡产生。从图 1(b) 的等值线图可以看出,数值结果激波过渡区域非常小,表明该数值求解格式能准确捕捉间断,激波过渡带很窄。图 1(c) 再次证实了该数值求解格式"锐利" 捕捉激波的特点,图 1(c) 中实线表示准确解(Exact,下同),小圆圈表示用 CWENO- 型熵相容格式(CWENO Entropy Consistent,下同) 所得结果。

二维无粘 Burgers 方程,$f(u)=g(u)=u^2/2$,在满足算例 2 所述初边值条件下问题的数值解。由式(4) 得 Burgers 方程的 CWENO- 型熵守恒通量函数为:

$$f^{EC}_{i+1/2,j}=\frac{\psi^{x}(u^{+}_{i+1/2,j})-\psi^{x}(u^{-}_{i+1/2,j})}{u^{+}_{i+1/2,j}-u^{-}_{i+1/2,j}}=\frac{1}{6}\frac{(u^{+}_{i+1/2,j})^{3}-(u^{-}_{i+1/2,j})^{3}}{u^{+}_{i+1/2,j}-u^{-}_{i+1/2,j}}=\frac{(u^{+}_{i+1/2,j})^{2}+u^{+}_{i+1/2,j}u^{-}_{i+1/2,j}+(u^{-}_{i+1/2,j})^{2}}{6}$$

$$f^{EC}_{i,j+1/2}=\frac{\psi^{y}(u^{+}_{i,j+1/2})-\psi^{y}(u^{-}_{i,j+1/2})}{u^{+}_{i,j+1/2}-u^{-}_{i,j+1/2}}=\frac{1}{6}\frac{(u^{+}_{i,j+1/2})^{3}-(u^{-}_{i,j+1/2})^{3}}{u^{+}_{i,j+1/2}-u^{-}_{i,j+1/2}}=\frac{(u^{+}_{i,j+1/2})^{2}+u^{+}_{i,j+1/2}u^{-}_{i,j+1/2}+(u^{-}_{i,j+1/2})^{2}}{6}$$

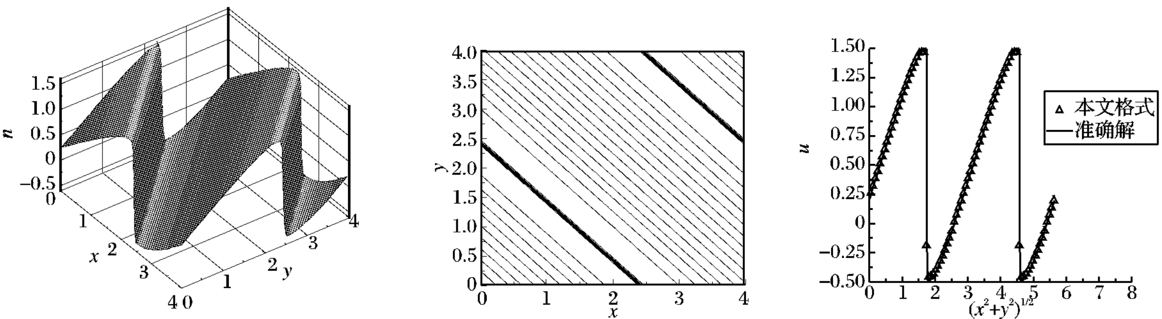
将该式代入到式(4)、(5),即得到用于求解 Burgers 方程的 CWENO- 型熵相容数值求解格式。

算例 2　Burgers 方程具有如下初边值条件的混合问题[13]:

$$u(x,y,0)=0.5+\sin\frac{\pi(x+y)}{2}$$

计算区域为$[0,4]\times[0,4]$,周期性边界条件,$t=1.5/\pi$ 时刻的数值结果如图 2 所示。

从图 2(a) 可以看出,所构造的数值求解格式不仅在光滑区域与准确解符合很好,而且在间断区域能够准确捕捉间断,且有效地防止了非物理振荡的产生。由等值线图(图 2(b)) 和 $y=x$ 剖面图(图 2(c),图中线形表示同例 1) 都可以看出该数值求解格式在间断区域能够准确捕捉间断,数值抹平现象很少。



(a) 速度变化　(b) 等值线图　(c) $y=x$剖面图

图 2　算例 2 在 $t=1.5/\pi$,$CFL=0.6$ 时刻的云图、等值线图和剖面图

(下转第 2751 页)

方式自适应地对系统进行恢复,实现整个系统在不可靠通信信道下生存性的提高。

参考文献:

[1] GUPTA B, RAHIMI S, YANG Y. A novel roll-back mechanism for performance enhancement of asynchronous checkpointing and recovery[J]. Informatica, 2007, 3(11): 1 - 13.

[2] ELNOZAHY E N, ALVISI L, WANG Y M, *et al.* A survey of rollback-recovery protocols in message-passing systems[J]. ACM Computing Surveys, 2002, 34(3): 375 - 408.

[3] WANG Y M, CHUNG P Y, LIN I J, *et al.* Checkpoint space reclamation for uncoordinated checkpointing in message-passing systems [J]. IEEE Transactions on Parallel and Distributed Systems, 1995, 6(5): 546 - 554.

[4] RUSCIO J F, HEFFNER M A, VARADARJAN S. DejaVu: Transparent user-level checkpointing, migration, and recovery for distributed systems[C]// SC'06: Proceedings of the 2006 ACM/IEEE Conference on Supercomputing. New York: ACM, 2006: 158.

[5] MALONEY A, GOSCINSKI A. A survey and review of the current state of rollback-recovery for cluster systems[J]. Concurrency and Computation: Practice and Experience, 2009, 21(12): 1632 - 1666.

[6] TRIPATHY M, TRIPATHY C R. A new coordinated checkpointing and rollback recovery scheme for distributed shared memory clusters [J]. International Journal of Distributed and Parallel Systems, 2011, 2(1): 49 - 58.

[7] PRIYA S B, RAVICHANDRAN T. Fault tolerance and recovery for grid application reliability using check pointing mechanism[J]. International Journal of Computer Applications, 2011, 26(5): 32 - 37.

[8] BOUTEILLER A, HERAULT T, BOSILCA G, *et al.* Correlated set coordination in fault tolerant message logging protocols[C]// Euro-Par'11: Proceedings of the 17th International Conference on Parallel Processing. Berlin: Springer-Verlag, 2011: 51 - 64.

[9] CHANDY K M, LAMPORT L. Distributed snapshots: Determining global states of distributed systems[J]. ACM Transactions on Computer Systems, 1985, 3(1): 63 - 75.

[10] ELNOZAHY E N, JOHNSON D B, ZWAENEPOEL W. The performance of consistent checkpointing[C]// Proceedings of the 11th Symposium on Reliable Distributed Systems. [S. l.]: IEEE, 1992: 39 - 47.

[11] 魏晓辉, 鞠九滨. 分布式系统中的检查点算法[J]. 计算机学报, 1998, 21(4): 367 - 375.

[12] 慈轶为, 张展, 左德承, 等. 可扩展的多周期检查点设置[J]. 软件学报, 2010, 21(2): 218 - 230.

[13] RANA M, PANGHAL A, PANGHAL S. Checkpointing based rollback recovery in distributed systems[J]. Journal of Current Computer Science and Technology, 2011, 1(6): 45 - 49.

[14] 汪东升, 沈美明, 郑纬民, 等. 一种基于检查点的卷回恢复与进程迁移系统[J]. 软件学报, 1999, 10(1): 68 - 73.

[15] 汪东升, 邵明珑. 具有O(n)消息复杂度的协调检查点设置算法[J]. 软件学报, 2003, 14(1):43 - 48.

(上接第 2747 页)

3 结语

本文针对二维标量双曲守恒律方程的数值求解,构造出CWENO型-熵相容数值求解格式,通过对两个数值算例的分析与讨论,所得结论如下:

1)该数值求解格式能准确捕捉激波,对稀疏波计算结果与准确解吻合很好,且能有效避免非物理振荡的产生;

2)该数值求解格式具有强稳定性,CFL条件数可以取为0.6,所得结果依旧可靠。

本文所构造的数值求解格式是针对二维标量双曲型方程设计的,但文中所采用的CWENO格式以及优化TVD Runge-Kutta格式均易于向高维和方程组推广。本文作者正在将该高性能算法向高维双曲型方程及方程组情形推广。

参考文献:

[1] JIANG GUANG-SHAN, WANG SHUN CHI. Efficient implementation of weighted ENO schemes [J]. Journal of Computational Physics, 1996, 126(1): 202 - 228.

[2] ZHANG XIANGXIONG, LIU YUANYUAN, SHU CHI-WANG. Maximum-principle-satisfying high order finite volume weighted esseneially nonoscillatory schemes for convection-diffusion equations [J]. SIAM Journal on Scientific Computing, 2012, 34(2): 627 - 658.

[3] LEVY D, PUPPO G, RUSSO G. A third order central WENO scheme for 2D conservation laws [J]. Applied Numerical Mathematics, 2000, 33(1/2/3/4): 415 - 421.

[4] KURGANOV A, LEVY D. A third-order semi-discrete central scheme for conservation laws and convection diffusion equations [J]. SIAM Journal on Scientific Computing, 2000, 22(4): 1461 - 1488.

[5] TADMOR E. Numerical viscosity and the entropy condition for conservative difference schemes [J]. Mathematics of Computation, 1984, 43(168): 369 - 381.

[6] TADMOR E. The numerical viscosity of entropy stable schemes for systems of conservation laws [J]. Mathematics of Computation, 1987, 49(179): 91 - 103.

[7] LEFLOCH P-G, ROHDE C H. High-order schemes, entropy inequalities and nonclassical shocks [J]. SIAM Journal on Numerical Analysis, 2000, 37(6): 2023 - 2060.

[8] LUKÁĚOVÁ M, TADMOR E. On the entropy stability of Roe-type finite volume methods [EB/OL]. [2012 - 01 - 01]. http://www.docin.com/p-75822789.html.

[9] ISMAIL F, ROE P L. Affordable, entropy-consistent Euler flux functions II: Entropy production at shocks [J]. Journal of Computational Physics, 2009, 228(15): 5410 - 5436.

[10] FJORDHOLM U-S, MISHRA S, TADMOR E. Entropy stable ENO scheme [EB/OL]. [2012 - 02 - 01]. ftp://ftp.sam.math.ethz.ch/pub/sam-reports/.../2011 - 05.pdf.

[11] FJORDHOLM U-S, MISHRA S, TADMOR E. Arbitrarily high-order accurate entropy stable essentially non-oscillatory schemes for systems of conservation laws [J]. SIAM Journal on Numerical Analysis, 2012, 50(2): 544 - 573.

[12] 李红霞. 一维守恒型方程(组)的熵耗散格式[D]. 上海: 上海大学, 2000.

[13] 陈荣三. 双曲守恒型方程若干数值方法研究 [D]. 上海: 上海大学, 2009.

[14] 罗力, 封建湖, 唐小娟, 等. 求解双曲守恒律方程的高分辨率熵稳定格式 [J]. 计算物理, 2010, 27(5): 671 - 678.

[15] LEVY D, PUPPO G, RUSSO G. A fourth-order central WENO scheme for multi-dimensional hyperbolic systems of conservation laws [J]. SIAM Journal on Scientific Computing, 2002, 24(2): 480 - 506.