Journal of Computer Applications
计算机应用,2012,32(10):2907 - 2910

ISSN 1001-9081
CODEN JYIIDU

2012-10-01
http://www.joca.cn

文章编号:1001 - 9081(2012)10 - 2907 - 04

doi:10.3724/SP.J.1087.2012.02907

九宫数独的方程求解算法研究

肖华勇,程海礁*,王月兴
(西北工业大学 理学院,西安 710072)
(*通信作者电子邮箱 jiamei328@163.com)

摘　要:首先从数独的要求出发建立方程组,该方程组的解与原数独的解完全等价。然后由该方程组推导出一系列数学性质,包括删除候选数性质、唯一确定法性质、矛盾性质和不变性性质。并说明数独的人工推理规则包含在这些性质之中。最后由这些性质提出求解该方程组的算法,算法中用一个三维矩阵来表示待求解九宫数独的候选数矩阵,根据上述性质对候选数矩阵进行删减,直到能够解出此九宫数独。此算法能够求解出许多数独软件无法进行推理计算的数独难题,并用两个数独难题进行验证,说明了该算法的有效性。

关键词:数独;智力游戏;推理性质;唯一解;算法性质

中图分类号: TP18　　　**文献标志码**:A

Research of equation solution algorithm about Sudoku puzzle

XIAO Hua-yong, CHENG Hai-jiao*, WANG Yue-xing
(*School of Science, Northwestern Polytechnical University, Xi'an Shaanxi 710072, China*)

Abstract: It began with the requirement of Sudoku to establish the system of equations. The solution of equation system was equivalent to the original Sudoku. And many mathematical properties were derived from equation system, including candidates elimination techniques, unique determination property, contradiction property and invariance property. It also illustrated that the artificial deductive rules included these properties. Finally this paper proposed a algorithm which calculated the solution of equation system from these properties. The algorithm used a three-dimensional matrix to express the candidate matrix of an unsolved Sudoku, and according to the above properties the candidate matrix could be deleted until Sudoku was solved. The algorithm can resolve many difficult Sudoku puzzles. Two difficult Sudoku puzzles were demonstrated and solved easily with the method in this paper, which shows the method is very effective.

Key words: Sudoku; intelligent game; deductive character; unique solution; algorithm character

0　引言

数独源于18世纪瑞士数学家欧拉发明的拉丁方阵,后经日本人的改良而得以流行。数独棋盘是一种特殊的拉丁方阵,棋盘由一个3×3的九宫格组成,每个格子又分成一个小九宫格,共九九八十一个小格子。游戏的规则很简单,就是将1~9这九个数字填入该棋盘,要求每个数字在每一行每一列或者每一小九宫格都只能出现一次。然而,尽管数独号称是一种数学问题,却几乎用不上数学运算方法。事实上,它只需要一定的逻辑推理加上必要的耐心就可以了。理论上,我们可以将数字代换成另外九种不同的符号,例如字母、颜色、图像等。数独游戏成功的原因除了它的趣味性和挑战性之外,更重要的原因其实是因为它很容易上手。不过,数独倒是提供给数学家和计算机科学家许多挑战性的课题。

目前求解数独的方法主要有两种,一种是基于计算机的回溯法或类似的全枚举方法,另一种方法就是基于人的思维,寻找求解的特殊技巧,如数独终结者软件分别总结了直观法和候选数法两大类,其中直观法有:单元唯一法、单元排除法、区块排除法、唯一余数法、组合排除法、矩形排除法;候选数法有:显式唯一法、隐式唯一法、区块删减法、显式数对法、显式三数集法、显式四数集法、隐式数对法、隐式三数集法、隐式四数集法、矩形对角线法、XY形态匹配法、XYZ形态匹配法、三链数删减法、WXYZ形态匹配法。这些方法过分注重具体的技巧,缺乏一般性。文献[1]使用约束规划问题求解数独问题;文献[2]使用候选数模式下的试探法求解数独问题;文献[3-4]对数独的解法、难度等级划分、如何生成等作了系统的研究;文献[5]对数独谜题的问题数目展开了深入的研究;文献[6]采用了回溯法求解,没有使用推理;文献[7]中的推理方法对高难度数独题不一定有效;文献[8]是一个数独网站,里面提供了多种不同类型的数独及其求解方法;文献[9]用遗传算法求解数独难题。本文从数独本身具有的性质出发,建立一套求解数独的线性方程组,根据方程组的唯一解与数独的唯一解等价设计算法进行求解,既避免了人为进行求解所使用的特殊技巧,又避免了计算机求解的完全枚举。将求解方程的一些性质同算法相结合来求解数独难题。通过大量实例检验,表明该方法是行之有效的。该方法可以解决文献中使用推理方法无法求解的数独难题。

1　方程组的建立

对一般的九宫数独问题,建立通用的0-1整数方程。

设每个格子的标号用$(i,j)(i,j=1,2,\cdots,9)$,表示该空格所在的行和列。

收稿日期:2012-05-02;**修回日期**:2012-06-20。　　**基金项目**:西北工业大学大学生创新项目。

作者简介:肖华勇(1970-),男,重庆人,副教授,博士,主要研究方向:图像与金融时间序列;　程海礁(1987-),女,辽宁本溪人,硕士研究生,主要研究方向:图像与金融时间序列;　王月兴(1989-),男,河北石家庄人,主要研究方向:土木工程。

建立决策变量为：

$$x_{ijk}=\begin{cases}1, & \text{空格}(i,j)\text{ 处填 } k\\ 0, & \text{空格}(i,j)\text{ 处不填 } k\end{cases},\ i,j,k=1,2,\cdots,9$$

建立如下约束：

1）每个空格恰好填一个数字：

$$\sum_{k=1}^{9}x_{ijk}=1\ ;\ i,j=1,2,\cdots,9 \tag{1}$$

2）每行每个数字恰好填一次：

$$\sum_{j=1}^{9}x_{ijk}=1;\ i,k=1,2,\cdots,9 \tag{2}$$

3）每列每个数字恰好填一次：

$$\sum_{i=1}^{9}x_{ijk}=1;\ j,k=1,2,\cdots,9 \tag{3}$$

4）每个九宫格每个数字恰好填一次：

$$\sum_{(i,j)\in B_t}^{9}x_{ijk}=1;\ t,k=1,2,\cdots,9 \tag{4}$$

设格子从左到右、从上到下依次表示为(1,1)，(1,2)，(1,3)，…，(9,9)。

则格子(i,j)到各区B_t的转换公式的表达为：

$$t=\lfloor(i-1)/3\rfloor\times3+\lfloor(j-1)/3\rfloor+1 \tag{5}$$

其中$\lfloor\ \rfloor$为向下取整。

格子(i,j)到区中序号k转换公式的表达式为：

$$\begin{cases}u=\lfloor(i-1)/3\rfloor+1\\ v=\lfloor(j-1)/3\rfloor+1\end{cases} \tag{6}$$

$$k=3\times i-3\times(3\times u-2)+j-(3\times v-3) \tag{7}$$

则与九宫完全对应的方程组为：

$$\begin{cases}\sum_{k=1}^{9}x_{ijk}=1;\ i,j=1,2,\cdots,9\\ \sum_{j=1}^{9}x_{ijk}=1;\ i,k=1,2,\cdots,9\\ \sum_{i=1}^{9}x_{ijk}=1;\ j,k=1,2,\cdots,9\\ \sum_{(i,j)\in B_t}^{9}x_{ijk}=1;\ t,k=1,2,\cdots,9\\ x_{ijk}=0\text{ 或 }1,\ i,j,k=1,2,\cdots,9\end{cases} \tag{8}$$

初始条件为某些格子给出的已知数。如某格子(3,5)为7，则令$x_{3,5,7}=1$。

为表达方便，设所有解未确定的变量都取$x_{ijk}=-1$，表示数字k为格子(i,j)的候选数。

2　方程组解性质[10]

2.1　删除候选数性质

性质1　若$x_{ijk}=1$，则$x_{ijl}=0,l\neq k$。当格子(i,j)的数字确定时，利用该性质可删除该格子上的其余候选数。

该性质由方程(1)得到。

性质2　若$x_{ijk}=1$，则$x_{ilk}=0,l\neq j$。当格子(i,j)的数字确定时，利用该性质可删除该格子所在行其余格子上的候选数k。

该性质由方程(2)得到。

性质3　若$x_{ijk}=1$，则$x_{ljk}=0,l\neq i$。当格子(i,j)的数字确定时，利用该性质可删除该格子所在列其余格子上的候选数k。

该性质由方程(3)得到。

性质4　若$x_{ijk}=1$，则$x_{pqk}=0$，其中$(p,q)\neq(i,j)$，且$(p,q)\in B_t,(i,j)\in B_t$。当格子$(i,j)$的数字确定时，利用该性质可删除该格子所在区其余格子上的候选数k。

该性质由方程(4)得到。

2.2　唯一确定法性质

为表示方便，建立函数$s(x)=\begin{cases}1, & x=0\\ 0, & x\neq0\end{cases}$。

性质5　若$\sum_{k=1}^{9}s(x_{ijk})=8$，则存在某$x_{ijr}=-1$，必有$x_{ijr}=1$。该性质表示当某格子$(i,j)$删除了8个候选数，则该格子所填数字必为剩下的那个候选数r。该性质对应数独规则中的显式唯一法。

该性质由方程(1)得到。

性质6　若$\sum_{j=1}^{9}s(x_{ijk})=8$，则存在某$x_{irk}=-1$，必有$x_{irk}=1$。该性质表示若第$i$行有8个格子都删除了候选数$k$，则该行剩下的那个格子必填数字$k$。该性质对应数独规则中用于行的隐式唯一法。

该性质由方程(2)得到。

性质7　若$\sum_{i=1}^{9}s(x_{ijk})=8$，则存在某$x_{rjk}=-1$，必有$x_{rjk}=1$。该性质表示若第$j$列有8个格子都删除了候选数$k$，则该列剩下的那个格子必填数字$k$。该性质对应数独规则中用于列的隐式唯一法。

该性质由方程(3)得到。

性质8　若$\sum_{(i,j)\in B_t}s(x_{ijk})=8$，则存在某$x_{pqk}=-1$，必有$x_{pqk}=1$。该性质表示若第$t$区有8个格子都删除了候选数$k$，则该区剩下的格子$(p,q)$必填数字$k$。该性质对应数独规则中用于区的隐式唯一法。

该性质由方程(4)得到。

2.3　矛盾性质

性质9　若对某固定格子(i,j)，对任意数字k，都有$x_{ijk}=0$或1。若$\sum_{k=1}^{9}x_{ijk}\neq1,i,j=1,2,\cdots,9$，则该数独导致矛盾。该性质表明任何一个格子所填的数只能有1个。

该性质由方程(1)得到。

性质10　若对某固定行i及数字k，对任意列j，都有$x_{ijk}=0$或1。若$\sum_{j=1}^{9}x_{ijk}\neq1,i,k=1,2,\cdots,9$，则该数独导致矛盾。该性质表明任何一个数在任何一行只能填1次。

该性质由方程(2)得到。

性质11　若对某固定列j及数字k，对任意行i，都有$x_{ijk}=0$或1。若$\sum_{i=1}^{9}x_{ijk}\neq1,j,k=1,2,\cdots,9$，则该数独导致矛盾。该性质表明任何一个数在任何一列只能填1次。

该性质由方程(3)得到。

性质12　若对某固定区t及数字k，对任意格子$(i,j)\in B_t$，都有$x_{ijk}=0$或1。若$\sum_{(i,j)\in B_t}^{9}x_{ijk}\neq1,k=1,2,\cdots,9$，则该数独导致矛盾。该性质表明任何一个数在任何一个区只能填1次。

该性质由方程(4)得到。

2.4　不变性性质

性质 13　若 $x_{ijk}=1$ 导致数独矛盾，则有 $x_{ijk}=0$；若 $x_{ijk}=0$ 导致数独矛盾，则有 $x_{ijk}=1$。

证明　x_{ijk} 只取 0 或 1。当取 $x_{ijk}=1$ 时导致数独矛盾，则必有 $x_{ijk}=0$；当取 $x_{ijk}=0$ 时导致数独矛盾，则必有 $x_{ijk}=1$。

这里的矛盾是指当取 $x_{ijk}=1$ 或 0 时，运用性质 1 ~ 8 进行推理计算，然后用性质 9 ~ 12 判断数独矛盾。

性质 14　若 $x_{ijk}=-1$，当取 $x_{ijk}=0$ 或 1，某个格子 (p,q) 都不能填 r，则 $x_{pqr}=0$。

证明　若 $x_{pqr}=1$，表示格子 (p,q) 必填 r，这与 $x_{ijk}=0$ 或 1 两种情况下，格子 (p,q) 都不能填 r 相矛盾。

若 $x_{pqr}=-1$，表示 r 是格子 (p,q) 的候选数，不能确定该格子一定填 r 或不能填 r，这与 $x_{ijk}=0$ 或 1 两种情况下，格子 (p,q) 都不能填 r 相矛盾。

故当 $x_{ijk}=0$ 或 1，某个格子 (p,q) 都不能填 r，则有 $x_{pqr}=0$。

由 $x_{ijk}=0$ 或 1，都推出某个格子 (p,q) 不能填 r，是指综合运用性质 1 ~ 12 都得到 $x_{pqr}=0$。

性质 15　对某固定格子 (i,j)，若 $x_{ijk}=-1, k\in\{k_1,k_2,\cdots,k_l\}$，即格子 (i,j) 候选数为 $k_1,k_2,\cdots,k_l$。对所有候选数 k，当 $x_{ijk}=1$ 时，某个格子 (p,q) 都不能填 r，则 $x_{pqr}=0$。对某个候选数 k，当 $x_{ijk}=1$ 时导致数独矛盾，则必有 $x_{ijk}=0$。

性质 16　对某固定格子 (i_1,j_1) 和格子 (i_2,j_2)，若 $x_{i_1j_1k}=-1, k\in\{k_1,k_2,\cdots,k_l\}, x_{i_2j_2u}=-1, u\in\{u_1,u_2,\cdots,u_f\}$。即格子 (i_1,j_1) 候选数为 $k_1,k_2,\cdots,k_l$；格子 (i_2,j_2) 候选数为 $u_1,u_2,\cdots,u_f$。对所有 k_i 和 u_j，当 $x_{i_1j_1k_i}=1, x_{i_2j_2u_j}=1$ 时，某个格子 (p,q) 都不能填 r，则 $x_{pqr}=0$。

性质 17　对某 $r(r=2,3,4,\cdots)$ 个固定格子 (i_1,j_1)、(i_2,j_2)，…，(i_r,j_r)，其中 $x_{i_1j_1k_1}=-1,\cdots,x_{i_rj_rk_r}=-1$，且其中第 l 个格子候选数集为 $A_l=\{h_1^{(l)},h_2^{(l)},\cdots,h_{pl}^{(l)}\}, l=1,2,\cdots,r$。当取遍 $k_1\in A_1, k_2\in A_2,\cdots,k_r\in A_r$，某个格子 (p,q) 都不能填 r，则 $x_{pqr}=0$。

该性质表明，当 r 个空格取遍所有候选数组合，若某个格子始终不能取某候选数，则该格子可删除该候选数。实际上，性质 17 是性质 16 的推广。

3　九宫数独的方程求解算法设计

3.1　算法实现

根据前面由方程组(8)得到的四类性质，本文提出求解该方程组的算法设计如下：

步骤 1　导入数独数据并赋值；

步骤 2　方程变量初始态的确定，即初始化候选数矩阵；

步骤 3　根据 funpanding( ) 函数的结果，循环执行删除候选数和空格确定操作，直到 funpanding( ) 函数为真；

步骤 4　执行单变量枚举；

步骤 5　执行单空格枚举，转步骤 3，若全部解出转步骤 7；

步骤 6　执行多空格枚举，转步骤 3；

步骤 7　最终输出数独答案。

3.2　算法应用举例

按照上述的算法思想，用 C 语言编写程序实现了 3.1 节中的算法，并用两个数独难题进行验证，说明了该算法的有效性。

例 1　一道法国决赛题有 24 个数字的求解过程，该问题利用数独终结者的所有算法都无法求出解，使用性质和步骤见图 1 ~ 图 4。

例 2　文献[11]一个只有 17 个数字的数独难题求解过程如下，该问题利用数独终结者的所有算法都无法求出解，使用性质和步骤见图 5 ~ 8。

	1	2	3	4	5	6	7	8	9
A				7	5				
B		3			4	8		2	
C	1								6
D		4							8
E	7	9						3	1
F	2							7	
G	5								7
H		8		3	2			4	
I					6	9			

图 1　例 1

	1	2	3	4	5	6	7	8	9
A	8			7	5				3
B		3			4	8		2	
C	1								6
D	3	4			7				8
E	7	9		4	8			3	1
F	2		8					7	4
G	5			8	1	4			7
H		8		3	2	7		4	
I	4			5	6	9			2

图 2　性质 1 ~ 8 的结果(填 15 个数字)

	1	2	3	4	5	6	7	8	9
A	8	6		7	5				3
B		3			4	8		2	
C	1								6
D	3	4			7				8
E	7	9		4	8			3	1
F	2		8					7	4
G	5			8	1	4			7
H		8		3	2	7		4	
I	4			5	6	9			2

图 3　性质 13 ~ 17 的结果(填 1 个数字)

	1	2	3	4	5	6	7	8	9
A	8	6	2	7	5	1	4	9	3
B	9	3	7	6	4	8	1	2	5
C	1	5	4	2	9	3	7	8	6
D	3	4	6	1	7	2	9	5	8
E	7	9	5	4	8	6	2	3	1
F	2	1	8	9	3	5	6	7	4
G	5	2	9	8	1	4	3	6	7
H	6	8	1	3	2	7	5	4	9
I	4	7	3	5	6	9	8	1	2

图 4　利用性质 5 ~ 8 与性质 13 ~ 17(全部求出)的结果

4 结语

本文利用了数独具有唯一解的性质进行推理,把数独的求解转化为完全等价于求解该方程组。在数独有唯一解时,该方程也有唯一解。本文综合运用上述性质通过对候选数进行删减可以最终得到数独的解,并且获得了一个求解一般数独问题的快速算法。用此算法可以求解大量的数独难题,并且只到其中的几个性质。然而本文算法只能求解九宫数独,对于其他类型数独的求解用此算法思想也应该可以求解,即是下一步研究的问题。

	1	2	3	4	5	6	7	8	9
A		1	8				7		
B				3			2		
C		7							
D					7	1			
E	6							4	
F	3								
G	4			5					3
H		2			8				
I								6	

图 5 例 2[11]

	1	2	3	4	5	6	7	8	9
A		1	8				7	3	
B				3		7	2		
C		7	3						
D					7	1	3		
E	6				3			4	
F	3								
G	4			5					3
H		2			8	3			
I		3						6	

图 6 性质 5 ~ 8 的结果(填出 7 个数字)

	1	2	3	4	5	6	7	8	9
A		1	8				7	3	
B				3		7	2		
C		7	3						
D					7	1	3		
E	6				3			4	
F	3								
G	4			5					3
H		2			8	3			
I		3						6	

图 7 利用性质 16 的结果(删除了 202 个候选数)

	1	2	3	4	5	6	7	8	9
A	5	1	8	9	2	6	7	3	4
B	9	6	4	3	5	7	2	8	1
C	2	7	3	1	4	8	6	5	9
D	8	5	2	4	7	1	3	9	6
E	6	9	7	2	3	5	1	4	8
F	3	4	1	8	6	9	5	2	7
G	4	8	6	5	1	2	9	7	3
H	7	2	9	6	8	3	4	1	5
I	1	3	5	7	9	4	8	6	2

图 8 再次运用性质 5 ~ 8 的结果(全部求出)

参考文献:

[1] BRODERICK C, MARY A, CARLOS C, *et al*. Using constraint programming to solve Sudoku puzzles [C]// ICCIT'08: Proceedings of the 2008 Third International Conference on Convergence and Hybrid Information Technology. Washington, DC: IEEE Computer Society, 2008, 2: 926 -931.

[2] GUSTAVO S-G, MIGUEL P. Solving Sudoku puzzles with rewriting rules [J]. Electronic Notes in Theoretical Computer Science, 2007, 176(4): 79 -93.

[3] TIMO M, JANNE K. Solving, rating and generating Sudoku puzzles with GA [C]// Proceedings of IEEE Congress on Evolutionary Computation. [S. l.]: IEEE, 2007: 1382 -1389.

[4] 王琼, 邹晟. 数独问题的求解、评价与生成算法的研究[J]. 南京师范大学学报: 工程技术版, 2010, 10(1): 76 -79.

[5] 赵志芳, 郭静鑫, 杨璐. 生成 Sudoku 的算法探究[J]. 内江科技, 2008, 29(7): 22 -23.

[6] 刘晓宝. 数独游戏的解题算法[J]. 电脑编程技巧与维护, 2007, (5): 64 -67.

[7] 顾雏军. 顾氏不动点解法—数独题通用解法[J]. 北华航天工业学院学报, 2008, 18(1) :27 -29.

[8] 数独[EB/OL]. [2012 -03 -01]. http: //www. sd9981. com.

[9] 刘延风, 刘三阳. 基于遗传算法求解数独难题[J]. 计算机科学, 2010, 37(3): 225 -233.

[10] 肖华勇, 田铮, 马雷. 数独基于规则的逐步枚举算法设计[J]. 计算机工程与设计, 2010, 31(5):1035 -1037.

[11] LEI LEI, SHEN FU-KE. The design and implementation of the algorithm about Sudoku [J]. Computer Knowledge and Technology, 2007(2): 481 -482, 523.

[12] MARTIN H, CHRISTOPHER P, GEORGE T. Difficulty-driven Sudoku puzzle generation [J]. The UMAP Journal, 2008, 29(3): 343 -362.

[13] MO HUI-DONG, XU RU-GEN. Sudoku square — a new design in field experiment [J]. Acta Agronomica Sinica, 2008, 34(9): 1489 -1493.

[14] LAUREN A. Sudoku science [J]. IEEE Spectrum, 2006, 43(2): 16 -17.

[15] RHYD L. Metaheuristics can solve Sudoku puzzles [J]. Journal of Heuristics, 2007, 13(4):387 -401.

[16] AGNES M, HERZBERG M, RAM M. Sudoku squares and chromatic polynomials [J]. Notices of the AMS, 2007, 54(6):708 -717.

(上接第 2906 页)

[13] 曹承志,张坤,郑海英,等. 基于人工鱼群算法的 BP 神经网络速度辨识器[J]. 系统仿真学报,2009,21(4):1047 -1050.

[14] 张梅凤,邵诚. 多峰函数优化的生境人工鱼群[J]. 控制理论与应用, 2008, 25(4): 773 -776.

[15] 姚祥光,周永权,李咏梅. 人工鱼群与微粒群混合优化算法[J]. 计算机应用研究,2010,27(6):2084 -2086.

[16] 廖灿星,张平,李行善,等. 基于混合人工鱼群算法的传感器网络优化[J]. 北京航空航天大学学报,2010,36(3):373 -377.

[17] 陈广洲,徐晓春,汪家权,等. 改进的人工鱼群算法在水质参数识别中的应用[J]. 水力发电报,2010,29(2):108 -113.

[18] 王联国,施秋红. 人工鱼群算法的参数分析[J]. 计算机工程, 2010, 36(24): 169 -171.