Journal of Computer Applications
计算机应用,2012,32(11):3100－3101,3106
ISSN 1001-9081
CODEN JYIIDU
2012-11-01
http://www.joca.cn

文章编号:1001－9081(2012)11－3100－02
doi:10.3724/SP.J.1087.2012.03100

快速检测低密度奇偶校验码围长的新算法

李炯城,李桂愉*,肖恒辉,黄海艺
(广东省电信规划设计院有限公司 广州市无线网络优化重点工程中心,广州 510630)
(*通信作者电子邮箱 liguiyu@gpdi.com)

摘　要:针对低密度奇偶校验码(LDPC)的围长计算复杂度较高的问题,结合 Dijkstra 算法及 Tanner 图的结构特点提出一种快速检测围长的新算法,该算法的时间复杂度较低。与目前的算法相比,该算法不仅计算速度快,且能一次性给出围长的大小及所经过的边,避免冗余计算。最后,通过实例仿真验证了该算法的可行性和高效性。

关键词:奇偶校验矩阵;低密度校验码;Dijkstra 算法;Tanner 图;围长
中图分类号:TN911.22　　**文献标志码**:A

New rapid algorithm for detecting girth of low-density Parity-check codes

LI Jiong-cheng, LI Gui-yu*, XIAO Heng-hui, HUANG Hai-yi
(*The Key Wireless Network Optimization Center of Guangzhou, Guangdong Planning and Designing Institute of Telecommunications Company, Guangzhou Guangdong 510630, China*)

Abstract: Concerning the girth problem of Low-Density Parity-Check(LDPC) codes, a new rapid algorithm for detecting the girth of LDPC codes in combination with Dijkstra algorithm and the feature of Tanner graph was proposed, and the time complexity of this algorithms was lower. Compared with known algorithms, this algorithm not only can calculate rapidly, but also return the girth and edges only one time, thus avoiding redundant computation. At last, the simulation verifies the feasibility and efficiency of this new algorithm.

Key words: parity check matrix; Low-Density Parity-Check (LDPC) code; Dijkstra algorithm; Tanner graph; girth

0　引言

低密度奇偶校验码[1](Low-Density Parity-Check code, LDPC 码)是 Gallager 在 1960 年提出,由于当时技术条件的限制,LDPC 一直没有得到编码界和工程界的重视。但在 1996 年,Mackay 等[2]发现,LDPC 是一个性能非常好的码,在一定条件下,码的性能距离 Shannon 极限[3]仅 0.004 5 dB,是距 Shannon 极限最近的码[4]。因此,LDPC 又引起学者们的高度重视。由于 LDPC 译码采用迭代译码,其算法的关键是基于在节点间传递的信息是统计独立的。当 LDPC 校验矩阵对应的 Tanner 图存在环时,某一节点发出的信息经过一个环长的传递会被传回自身,从而会对自身的信息造成一定程度的影响。因此,围长成为反映 LDPC 质量的一个重要指标。围长是图中最短环的长度,在构造 LDPC 时应尽量减少环的存在,或让围长尽可能大。同时,对于任意给定的 LDPC,快速计算围长具有非常重要的实际意义,对 LDPC 的译码有着不可估量的作用。目前已有学者研究围长的计算问题,文献[5]给出了一种根据指定环长的环在校验矩阵 $\boldsymbol{H}$ 中的形状来计算其个数的方法,但是该算法随着环长长度的增大,计算量急剧增大。文献[6]给出了一种基于 Tanner 图的邻接矩阵性质的算法,但是该算法要剔除很多不同种类的病态路径,且计算量也较大。文献[7]则给出一种基于逻辑代数算法进行计算围长的办法,该方法需要计算经过每个信息节点的所有环,再通过比较得到围长。

本文通过结合图论中求最短路的 Dijkstra 算法和 LDPC 的 Tanner 图结构的性质,提出了一种快速检测围长的新算法。该算法对有 n 个码元节点和 l 个校验节点的 LDPC 码,其算法复杂度只有 $O(m(m+n+l)\log(n+l))$,且由于 Tanner 图的邻接矩阵为稀疏矩阵,进而计算围长的复杂度还要更低。

1　本文计算围长的算法分析

校验矩阵 $\boldsymbol{H}$ 为稀疏矩阵的线性分组码称为低密度校验码(LDPC 码)。LDPC 码的校验矩阵可以用 Tanner 图来表示,图 1 中的节点为码元节点和校验节点,图 1 中的边则是码元节点与校验节点之间的约束关系。假设 LDPC 码的码元节点个数为 n,校验节点个数为 l,校验矩阵 $\boldsymbol{H}=[h_{ij}]_{l\times n}$,为稀疏 0-1 矩阵。先分析 Tanner 图的邻接矩阵 $\boldsymbol{A}$,当 Tanner 图中两个节点有边相连时,邻接矩阵相应元素取值为 1,否则为 0。由校验矩阵和邻接矩阵的定义可知,两者关系如下:

$$\boldsymbol{A}=\begin{bmatrix}0_{n\times n} & \boldsymbol{H}^{\mathrm{T}}\\ \boldsymbol{H} & 0_{l\times l}\end{bmatrix}$$

其中,$\boldsymbol{H}^{\mathrm{T}}$ 为矩阵 $\boldsymbol{H}$ 的转置,因此,矩阵 $\boldsymbol{A}$ 行数与列数均为 $n+l$。

计算出 Tanner 图的邻接矩阵 $\boldsymbol{A}$ 后,再考虑 LDPC 码的 Tanner 图结构特点。对有 n 码元节点和 l 校验节点的 Tanner 图,如图 1 所示。

观察 Tanner 图的结构,由于校验矩阵 $\boldsymbol{H}$ 是稀疏的,因此 Tanner 图中的边比较少。对正则 LDPC 码(n,λ,ρ),其中 λ 和 ρ 分别为校验矩阵的列重和行重,则 Tanner 图中的边数为 $n\lambda$。对非正则的 LDPC,Tanner 图的边数也可以通过校验矩阵计算出来。由于 Tanner 图的边数不多,因此要检测 LDPC 的围长,

收稿日期:2012-05-28;**修回日期**:2012-07-16。
基金项目:广东省教育部产学研结合项目(2009B090300393);广州市软件(动漫)产业发展资金资助项目(2060404)。
作者简介:李炯城(1972－),男,广东台山人,高级工程师,博士,主要研究方向:最优化算法、非线性数学物理方程、无线通信算法、软件系统架构;　李桂愉(1984－),女,广东韶关人,助理工程师,硕士,主要研究方向:数学最优化、无线通信;　肖恒辉(1980－),男,江西赣州人,助理工程师,博士,主要研究方向:最优化算法、无线通信;　黄海艺(1978－),男,广东台山人,高级工程师,博士,主要研究方向:宽带无线通信、纠错编码译码。

考虑将 Tanner 图中每条边所在的最小环长找出来，再比较各环长的大小取最小即可得到 LDPC 的围长。经过同一条边的环大多数情况下不止一个，要从中找出环长最小的环，可以考虑利用图论中的最短路算法。求出两点间的最短路，再补上这两点所在的边，则构成一个环，同时这个环也是经过这条边的最小环。

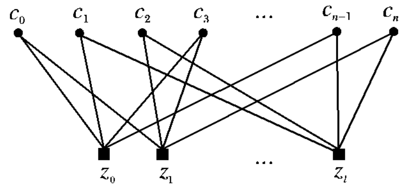

图 1　LDPC 的 Tanner 图

因此，对 Tanner 图中的每条边，如边 $c_iz_j(i=0,1,\cdots,n-1,j=0,1,\cdots,l-1)$，可以实施以下步骤：

1）将图中的边 c_iz_j 去掉，再求从顶点 c_i 到顶点 z_j 的最短路；

2）将所得的最短路的长加上 1，即得到每条边所在的最小环长；

3）比较每条边所在的最小环长，求最短即可得到围长。

而目前求最短路较好的算法是 Dijkstra 算法[8]，其算法主要是求一个节点到其他所有节点的最短路径，对于有 n 个节点的最短路问题，这个算法最多使用 $n-1$ 次迭代，在每次迭代中，加法运算执行的时间为 $O(n)$，比较执行的时间为 $O(n)$，因此，每次迭代执行的时间为 $O(n)$。故该算法时间复杂度是 $O(n^2)$[9]。假设图的边数为 m，当 m 较少时，即图稀疏时，利用二叉堆可使算法运行时间为 $O((m+n)\log n)$，因此，计算两点间的最短路径的复杂度也是 $O((m+n)\log n)$。求出顶点 c_i 到顶点 z_j 的最短路后，将之前去掉的边 c_iz_j 补上就是经过顶点 c_i 和顶点 z_j 的最小环长。对每条边都实行类似的操作，即可得到经过每条边的最小环长，比较所有环长，则可求出图的围长。

对有 n 个码元节点和 l 个校验节点的 LDPC 码，设 Tanner 图的边数为 m，利用上述算法求围长可计算出其复杂度。由于校验矩阵为稀疏矩阵，因而首先利用 Dijkstra 算法求顶点间最短路的复杂度是 $O((m+n+l)\log(n+l))$；其次，对每条边，均要执行上述操作，即一共要迭代 m 次；最后，每次迭代后要与当前的最小环长比较，因而共要比较 m 次。因此，计算 LDPC 码的围长的复杂度即为 $O(m(m+n+l)\log(n+l))$。具体计算过程如表 1。

表 1　计算围长新算法迭代次数

边迭代次数	Dijkstra 算法迭代次数	比较次数	总执行次数
m	$O((m+n+l)\log(n+l))$	m	$O(m(m+n+l)\log(n+l))$

2　快速计算围长的新算法

综上，快速计算 LDPC 围长的新算法步骤如下：

1）初始化：输入 n 个码元节点，l 个校验节点，及校验矩阵 $\boldsymbol{H}$；

2）利用如下关系校验矩阵 $\boldsymbol{H}$ 计算 Tanner 的邻接矩阵 $\boldsymbol{A}$：

$$\boldsymbol{A}=\begin{bmatrix}\boldsymbol{0}_{n\times n} & \boldsymbol{H}^{\mathrm{T}}\\ \boldsymbol{H} & \boldsymbol{0}_{l\times l}\end{bmatrix}$$

3）对顶点 $c_i(i=1,\cdots,n)$ 和顶点 $z_j(j=1,\cdots,l)$，若其有边相连，则先去掉边 c_iz_j，以顶点 c_i 为起点，利用 Dijkstra 算法求出 c_i 到 z_j 的最短路，其中 Dijkstra 算法的具体过程如下：

输入：具有非负权值的一个图，起始顶点为 c_i。边 c_iz_j 的权值记为 $w(c_iz_j)$（在本算法中，各条边的权值均为 1）；如果 c_iz_j 不是一条边，则记 $w(c_iz_j)=\infty$。

策略：维护一个顶点集合 S，c_i 到 S 中的各个顶点的最短路径是已知的，扩充 S 直到包含所有顶点，为此，对于任意 $z\notin S$，要维护从 c_i 到其试探距离 $t(z)$，即目前找到的最短 c_i,z 路径的长度。

初始化：设 $S=\{c_i\}$；$t(c_i)=0$；对 $z\neq c_i$，设 $t(z)=w(c_iz)$。

迭代：在 S 之外选择顶点 v 使得 $t(v)=\min\limits_{z\in S}t(z)$，将 v 加入 S。检查从 v 出发的各条边以修改那些试探距离：对满足 $z\notin S$ 的每条边 vz，用 $\min\{t(z),t(v)+w(vz)\}$ 来更新 $t(z)$。迭代进行到 S 为 Tanner 图的所有顶点或对任意 $z\notin S$ 有 $t(z)=\infty$ 为止。最后对所有顶点 v 设 $d(c_i,v)=t(v)$。

4）补充边 c_iz_j，记录其所在的所有环的最小环长为 $c(c_i,z_j)$，则 $c(c_i,z_j)=t(v)+1$，在每次计算过程中，记录当前最小的环长，即若 $c(c_{i_1},z_{j_1})\geq c(c_{i_2},c_{j_2})$，则只保留 $c(c_{i_2},z_{j_2})$。

5）上述计算迭代完后，最后记录的最小环长即为 LDPC 码的围长，算法结束。

综上，求 LDPC 码的围长计算复杂度仅为 $O(m(m+n+l)\log(n+l))$，这是能快速检测围长的一种新算法。目前已有的一些算法中，要计算围长，需先检测是否存在环长为 4 的环，再检测环长 6，8，… 的环，这种方法不仅计算复杂度很高，还不能一次性得到围长。而本文所提供的算法，不仅计算速度快，而且能一次性检测出围长的大小，方便简单。下面将以实例仿真本算法的效果。

3　实例验证

使用 Matlab2009b 根据上述算法进行编程计算。测试电脑配置 CPU 为 2.10 GHz，内存为 2 GB。

对文献[1]中 Gallager 给出的(20,3,4)正则 LDPC 进行分析，Matlab 显示计算时间为 0.028 s，LDPC 的围长为 6，并给出如图 2，其中，虚线部分为环长最小为 6 的环，即围长经过的路径：$c_0\rightarrow z_{20}\rightarrow c_1\rightarrow z_{26}\rightarrow c_5\rightarrow z_{30}\rightarrow c_0$。

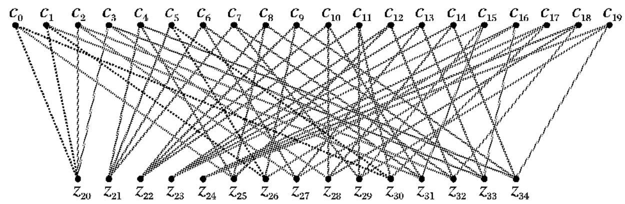

图 2　(20,3,4)正则 LDPC 的围长

一般而言，LDPC 的码长大于 1000，因此再使用此算法对文献[10]所给的 Gallager 码(1008,504,504)进行检测围长，在 Matlab 中编程计算，仅需 12 s 就得出计算结果，得出 LDPC 的围长为 6，且经过的路径为：$c_1\rightarrow z_{405}\rightarrow c_{849}\rightarrow z_{208}\rightarrow c_{38}\rightarrow z_{168}\rightarrow c_1$。

对比文献[5]所给的算法，此算法不能一次性检测出围长的大小，只能依次检测是否有环长为 4、6、8… 的环。并且该算法是根据校验矩阵 $\boldsymbol{H}$ 的图形来检测的，要检测环长为 $2k$ 的环，其计算复杂度大概为 $O(n^{k+1})$，如表 2 所示。因此，随着校验矩阵 $\boldsymbol{H}$ 规模的增大以及检测环长的增大，文献[5]所给的算法运算时间急剧增大。文献[6]曾用此算法检测一个非正则 LDPC(1008,504,504)的围长，计算时间为 12083 s，而用本文的算法计算出此 LDPC 的围长为 8，仅需要 12 s，比前者快了 1000 倍。因此，本文所提的算法确实能快速检测 LDPC 的围长。

（下转第 3106 页）

原始数据包数量。

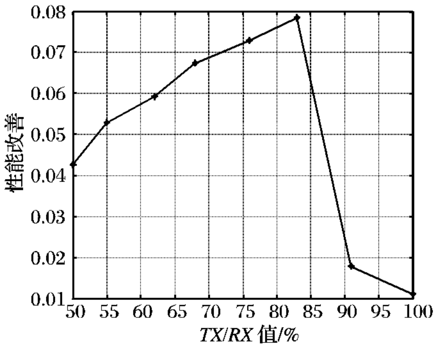

图 8 各链路质量下 M-Growth Codes 的性能改善

可以看出,*TX/RX* 为 55% ~83% 之间时,M-Growth Codes 的改善效果最明显,最高可达到 7.85%。当 TX/RX 为其他值时,M-Growth Codes 也有不同程度的改善。

7 结语

本文提出了一种适应于无线传感器网络的可靠数据传输方案——M-Growth Codes,该策略引入了基于梯度的路由策略,保证所有数据都朝着 sink 方向汇聚;另外提出了一种利用编码包来解码编码包的方案,提高了解码成功概率。从最后的仿真结果分析,M-Growth Codes 可以更大程度上保证数据传输的可靠性,提高数据传输的效率。

参考文献:

[1] AHLSWEDE R, CAI N, LI S R, *et al*. Network information flow [J]. IEEE Transactions on Information Theory, 2000, 46(4): 1204 - 1216.

[2] HO T, LEONG B, MÉDARD M, *et al*. On the utility of network coding in dynamic environments[C]// Processing International Workshop on Wireless Ad Hoc Networks. Tokyo: IEEE, 2004: 232 - 238.

[3] LIN S, COSTELLOD J, MILLER M J. Automatic-repeat-request error-control schemes[J]. IEEE Communications Magazine, 1984, 22(12): 831 - 842.

[4] DEMIR U, AKTAS O. Raptor versus Reed Solomon forward error correction codes[C]// Proceedings of the 7th International Symposium on Computer Networks. Washington, DC: IEEE Computer Society, 2006: 264 - 269.

[5] SUKUN K, FONSECA R, CULLER D. Reliable transfer on wireless sensor networks[C]// 2004 First Annual IEEE Communications Society Conference on Sensor and Ad Hoc Communications and Networks. Washington, DC: IEEE Computer Society, 2004: 449 - 459.

[6] KAMRA A, FELDMAN J, MISRA V, *et al*. Growth codes: Maximizing sensor network data persistence[C]// Proceedings of the 2006 Conference on Applications, Technologies, Architectures, and Protocols for Computer Communications. New York: ACM, 2006: 255 - 266.

[7] JIAO WEIWEI, CHEN CANFENG. Efficient data collection in wireless sensor networks by applying network coding[C]// IEEE International Conference on Broadband Network & Multimedia Technology. Washington, DC: IEEE Computer Society, 2009: 1463 - 1470.

[8] GHOSH R. Network coding-aware data aggregation for a distributed wireless sensor network [C]// International Conference on Industrial and Information Systems. Washington, DC: IEEE Computer Society, 2009: 311 - 320.

[9] LUO CHONG, SUN JUN, WU FENG. Compressive network coding for approximate sensor data gathering [C]// IEEE Globecom 2011. Washington, DC: IEEE Computer Society, 2011: 2166 - 2172.

[10] SHWE H Y, ADACHI F. Power efficient adaptive network coding in wireless sensor networks [C]// IEEE International Conference on Communications. Washington, DC: IEEE Computer Society, 2011: 667 - 672.

[11] DUNKELS A, GRONVALL B, VOIGT T. Contiki - a lightweight and flexible operating system for tiny networked sensors[C]// IEEE International Conference on Local Computer Networks. Washington, DC: IEEE Computer Society, 2004: 386 - 393.

(上接第 3101 页)

表 2 计算结果比较

算法	计算复杂度	计算围长为 8 的时间/s
本文的算法	$O(m(m+n+l)\log(n+l))$	12
文献[5]的算法	$O(n^{k+1})$	12 083

4 结语

LDPC 的围长是衡量其性能的一个重要指标,快速检测围长,对信道编码具有非常重要的作用。本文通过结合图论的经典算法 Dijkstra 算法以及 LDPC 的 Tanner 图的结构特点,提出一种快速检测 LDPC 围长的新算法,该算法思想简单,很容易实现,且算法复杂度不高,仅为 $O(m(m+n+l)\log(n+l))$。同时,目前学术界对于稀疏图的 Dijkstra 算法也有很多的研究成果[11-12],算法复杂度也较低,因此本文所提的算法还可以充分利用这些成果以进一步降低算法的复杂度。最后,通过实例进行仿真和对比,验证了本文所提的算法确实能快速计算 LDPC 的围长。

参考文献:

[1] 赵晓群. 现代编码理论[M]. 武汉: 华中科技大学出版社, 2007.

[2] MACKAY D J C, NEAL R M. Near shannon limit performance of low-density parity-check codes[J]. Electron Letter, 1996, 32(18): 1645 - 1646.

[3] SHANNON C E. A mathematical theory of communication[J]. The Bell System Technical Journal, 1948, 27: 379 - 423.

[4] CHUNG, S Y, FORNEY G D, RICHARDSON T J, *et al*. On the design of low-density parity check codes within 0.0045 dB of the Shannon limit[J]. IEEE Communication Letters, 2001, 5(2): 58 - 60.

[5] FAN JUN, XIAO YANG. A method of counting the number of cycles in LDPC codes[C]// 2006 8th International Conference on Signal Processing. Washington: IEEE Computer Society, 2006: 2183 - 2186.

[6] 张志亮, 刘英, 周红. 基于二分图低密度奇偶校验码围长计算方法[J]. 信息与电子工程, 2009, 7(2): 119 - 122.

[7] 李博, 王钢, 杨洪娟, 等. 一种 LDPC 双向图环路检测新算法[J]. 哈尔滨工业大学学报, 2010, 42(7): 1051 - 1055.

[8] 李建中, 骆吉洲. 图论导引[M]. 北京: 机械工业出版社, 2006.

[9] 殷剑宏, 吴开亚. 图论及其算法[M]. 合肥: 中国科学技术大学出版社, 2006.

[10] MACKAY. D J C. Encyclopedia of sparse graph codes[EB/OL]. [2012 - 04 - 15]. http://www.inference.Phy.cam.ac.uk/mackay/codes/data.html.

[11] 王战红, 孙明明, 姚瑶. Dijkstra 算法的分析与改进[J]. 湖北第二师范学院学报, 2008, 25(8): 12 - 14.

[12] 王智广, 王兴会, 李妍. 一种基于 Dijkstra 最短路径算法的改进算法[J]. 内蒙古师范大学学报, 2012, 41(2): 195 - 200.