

基于 Priwitt 算子的偏微分方程图像去噪模型

刘西林, 王泽文*, 邱淑芳

(东华理工大学 理学院, 南昌 330013)

(* 通信作者电子邮箱 zwwang@ecit.cn)

摘要: 利用归一化的 Priwitt 微分算子作为权重, 提出了两种融合 Gauss 曲率和平均曲率扩散的偏微分方程去噪模型, 使得它们在去除噪声的同时能保持图像的重要特征。首先, 对噪声图像进行 Gauss 滤波并计算滤波后图像的 Priwitt 微分算子; 然后, 新模型根据归一化的 Priwitt 微分算子自适应地平衡于高斯曲率扩散去噪与平均曲率扩散去噪之间, 从而去除图像的噪声。利用偏微分方程有限差分法给出了新模型的离散迭代格式, 并进行了数值实验。实验结果表明, 新模型不仅迭代收敛的速度快, 而且在均方误差和峰值信噪比两个评价指标上均优于单一曲率扩散去噪模型, 并更好地保持了图像的细节特征。

关键词: 图像去噪; 高斯曲率; 平均曲率; Priwitt 算子

中图分类号: TP391.41 **文献标志码:** A

PDE-based image noise removal models based on Priwitt operator

LIU Xi-lin, WANG Ze-wen*, QIU Shu-fang

(School of Science, East China Institute of Technology, Nanchang Jiangxi 330013, China)

Abstract: Using the normal Priwitt operator as weights, two denoising models based on Partial Differential Equation (PDE), which integrated the Gauss curvature and mean curvature diffusion, were proposed for keeping important features effectively while removing noises. First, the normal Priwitt operator of the filtered image obtained by the Gauss filter from noise image was calculated; second, the proposed models adaptively obtain the balance between the Gauss curvature diffusion noise removal and the mean curvature diffusion noise removal, thus removing noises of image. The iterative schemes of the proposed models were presented by the difference method of PDE. Then some numerical experiments were carried out. Results of experiments show that the proposed models not only converge quickly, but also are better than the denoising model based on single curvature diffusion, and better maintain the image features.

Key words: image denoising; Gauss curvature; mean curvature; Priwitt operator

0 引言

图像处理的偏微分方程 (Partial Differential Equation, PDE) 方法大约是从 20 世纪 90 年代兴起。在实际图像成像过程中, 由于受到环境和感应元件等的影响, 获得的图像往往存在噪声, 所以图像去噪作为后续对图像加工的基础, 具有重要的作用。比如在遥感成像中, 由于受到大气状态、天气、成像传感器性能等不可避免因素的影响, 得到的遥感图像经常存在噪声, 这些噪声将干扰图像的结构、纹理等图像特征信息。为了更好地分析图像则需先对图像进行去噪, 并且在去噪后尽可能地保留图像的结构与细节特征。由于偏微分方程在图像处理过程中具有自适应性、灵活性等优点, 该方法在图像去噪研究领域引起了许多学者的极大兴趣, 如文献[1]中提出的一种非线性偏微分方程去噪模型(简称为 ROF 去噪模型), 以及随后发展起来的许多二阶或高阶偏微分方程的图像去噪模型^[2-8], 这些模型对噪声都有很好的抑制。图像去噪作为图像后期进行特征提取、目标识别和图像分析等研究的基础, 一直以来也是图像处理领域的一个重要研究内容。

基于热扩散原理提出的曲率扩散去噪模型^[9-15]不仅能

有效去噪, 而且在一定条件下还能保持图像的边缘、纹理等特征。其中, 文献[12]中提出了一种基于平均曲率的非线性扩散模型, 该模型能够有效去除图像中的噪声部分, 但在去除噪声的同时图像有些过分被平滑的现象, 表现在图像中的边缘和细节处很模糊。文献[13-14]则研究了一类基于高斯曲率驱动的扩散模型, 该模型能够很好地保持图像的纹理、结构等特征, 但是该模型在图像平坦区域去噪效果没有平均曲率有优势。另外, 还有些学者根据图像法曲率的几何特征, 提出了基于法曲率驱动的曲面演化模型^[15], 该模型在图像边缘与图像细节等信息保持方面具有很好的性能。

本文就是在分析平均曲率和高斯曲率去噪原理的基础上, 结合 Priwitt 边缘检测算子, 提出两种新的去噪模型。数值实验结果表明本文提出的图像去噪模型在去除图像噪声的同时又能有效地保持图像的结构等特征。

1 新模型的提出及实现算法

1.1 平均曲率扩散模型

文献[12]中提出的平均曲率扩散 (Mean Curvature Diffusion, MCD) 模型为:

收稿日期: 2012-06-25; **修回日期:** 2012-08-06。 **基金项目:** 江西省自然科学基金资助项目(2010GZS0010); 江西省青年科学家培养计划项目(20122BCB23024); 江西省教育厅科技项目(GJJ12385); 江西省研究生创新基金资助项目(DYCA11007)。

作者简介: 刘西林(1986-), 男, 山西忻州人, 硕士研究生, 主要研究方向: 基于偏微分方程的图像处理; 王泽文(1974-), 男, 江西上饶人, 教授, 博士, 主要研究方向: 数学物理反问题及其数值解法、基于偏微分方程的图像处理; 邱淑芳(1972-), 江西进贤人, 副教授, 硕士, 主要研究方向: 数学建模、基于偏微分方程的图像处理。

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \operatorname{div} \left(\frac{1}{\sqrt{1+u_x^2+u_y^2}} \nabla u(x,y) \right)$$

其中 u 为含噪声的图像。该模型对于纹理较少的或比较平滑的图像具有良好的去噪效果。但是对于纹理图像和边缘较多的图像,由于平均曲率在边缘处不为零,这就使得该模型在迭代计算中随着迭代次数的增加图像的边也变得越来越大。

1.2 Gauss 曲率驱动扩散模型

由于 Gauss 曲率是两个主曲率的乘积,因此它考虑到了图像在极小曲率与极大曲率两个方向上的信息,特别是对那些极大曲率远远大于极小曲率的图像边缘,此时平均曲率则表现得比高斯曲率大,而图像中的边缘信息往往具有这种性质。因此,文献[13]中提出了如下 Gauss 曲率驱动扩散 (Gauss Curvature Driven Diffusion, GCDD) 去噪模型:

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \operatorname{div} \left(\varphi \left(\frac{u_{xx}u_{yy} - u_{xy}^2}{(1+u_x^2+u_y^2)^2} \right) \nabla u(x,y) \right)$$

其中: u 为含噪声的图像, $\varphi(\cdot): \mathbf{R} \rightarrow \mathbf{R}^+ \cup \{0\}$, 且 $\varphi(0) = 0$, $(u_{xx}u_{yy} - u_{xy}^2)/(1+u_x^2+u_y^2)^2$ 即为图像的 Gauss 曲率。该模型在去噪的同时能够有效地保持图像的边与纹理,但在图像平坦区域,它的去噪效果则不及平均曲率。

1.3 Priwitt 微分算子

定义归一化的 Priwitt 微分算子为:

$$\lambda(x,y) = \frac{\sqrt{D_x^2 + D_y^2} - m}{M}$$

其中

$$\begin{aligned} D_x &= f(x+1,y-1) - f(x-1,y-1) + f(x+1,y) - \\ &\quad f(x-1,y) + f(x+1,y+1) - f(x-1,y+1) \\ D_y &= f(x-1,y+1) - f(x-1,y-1) + f(x,y+1) - \\ &\quad f(x,y-1) + f(x+1,y+1) - f(x+1,y-1) \\ m &= \min_{x,y} \sqrt{D_x^2 + D_y^2} \\ M &= \max_{x,y} (\sqrt{D_x^2 + D_y^2} - m) \end{aligned}$$

这里 $f(x,y)$ 为待边缘检测的图像。显然, $0 \leq \lambda(x,y) \leq 1$ 。利用 Priwitt 微分算子对图像运算后,将得到图像边缘的轮廓。

1.4 新的去噪模型提出及实现算法

根据上述对 MCD 去噪模型和 GCDD 去噪模型的分析,结合归一化的 Priwitt 微分算子,本文提出如下两种新的图像去噪模型。

1.4.1 新模型一

将归一化的 Priwitt 微分算子函数作为 GCDD 去噪模型和 MCD 去噪模型的权重,得到如下一种简单的加权去噪模型:

$$\begin{aligned} \frac{\partial u}{\partial t} &= (1 - \lambda(x,y))^2 \nabla \cdot \\ &\quad \left(\frac{1}{\sqrt{1+u_x^2+u_y^2}} \nabla u(x,y) \right) + \lambda(x,y) \nabla \cdot \\ &\quad \left(\varphi \left(\frac{u_{xx}u_{yy} - u_{xy}^2}{(1+u_x^2+u_y^2)^2} \right) \nabla u(x,y) \right) \end{aligned}$$

其中: $u(x,y)$ 为含有噪声的图像,而 $\lambda(x,y)$ 则是噪声图像经滤波处理后的归一化的 Priwitt 微分算子,函数 $\varphi(\cdot): \mathbf{R} \rightarrow \mathbf{R}^+ \cup \{0\}$, 且 $\varphi(0) = 0$ 。

通过偏微分方程的有限差分解法,我们得到新模型的离散格式为:

$$\begin{aligned} u_{i,j}^{n+1} &= u_{i,j}^n + dt \cdot (1 - \lambda_{i,j}) \nabla \cdot \\ &\quad \left(\frac{1}{\sqrt{1+u_x^2+u_y^2}} \nabla u(x,y) \right)_{i,j} + dt \cdot \lambda_{i,j} \nabla \cdot \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} &\left(\varphi \left(\frac{u_{xx}u_{yy} - u_{xy}^2}{(1+u_x^2+u_y^2)^2} \right) \nabla u(x,y) \right)_{i,j} = \\ &u_{i,j}^n + (1 - \lambda_{i,j})^2 (F_{i+\frac{1}{2},j} (u_{i+1,j} - u_{i,j}) - \\ &F_{i-\frac{1}{2},j} (u_{i,j} - u_{i-1,j}) + F_{i,j+\frac{1}{2}} (u_{i,j+1} - u_{i,j}) - \\ &F_{i,j-\frac{1}{2}} (u_{i,j} - u_{i,j-1})) + \lambda_{i,j} (\varphi_{i+\frac{1}{2},j} (G(u_{i+1,j} - u_{i,j}) - \\ &\varphi_{i-\frac{1}{2},j} (G(u_{i,j} - u_{i-1,j})) + \varphi_{i,j+\frac{1}{2}} (G(u_{i,j+1} - u_{i,j}) - \\ &\varphi_{i,j-\frac{1}{2}} (G(u_{i,j} - u_{i,j-1}))) \end{aligned}$$

其中: $F = \frac{1}{\sqrt{u_x^2+u_y^2+1}}$, $G = \frac{u_{xx}u_{yy} - u_{xy}^2}{(1+u_x^2+u_y^2)^2}$, F 和 G 的半

值则用其相邻两个整点的平均值近似。这样, Priwitt 微分算子(即图像的边轮廓)刚好可以作为 MCD 去噪模型和 GCDD 去噪模型之间的一个权重。在图像的边轮廓图像中,边部分的像素值 $\lambda(x,y)$ 接近 1,非边部分的图像像素 $\lambda(x,y)$ 接近 0。在新的图像去噪模型一中,当位于图像边缘处时,即 $\lambda(x,y)$ 趋近 1 时,则新模型以 GCDD 去噪模型为主;反之则以 MCD 去噪为主。

1.4.2 新模型二

利用 Priwitt 微分算子融合 GCDD 去噪模型和 MCD 去噪模型中的扩散系数,则得到第二个非线性的偏微分方程去噪模型:

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \nabla \cdot (D \nabla u(x,y))$$

其中: $u(x,y)$ 为含噪声的图像, D 为扩散系数:

$$\begin{aligned} D &= (1 - \lambda(x,y))^2 \frac{1}{\sqrt{1+u_x^2+u_y^2}} + \\ &\quad \lambda(x,y) \varphi \left(\frac{u_{xx}u_{yy} - u_{xy}^2}{(1+u_x^2+u_y^2)^2} \right) \end{aligned}$$

$\lambda(x,y)$ 是噪声图像经滤波处理后的归一化的 Priwitt 微分算子,函数 $\varphi(\cdot): \mathbf{R} \rightarrow \mathbf{R}^+ \cup \{0\}$, 且 $\varphi(0) = 0$ 。

同理,利用有限差分法得到新模型二的离散迭代格式为:

$$\begin{aligned} u_{i,j}^{n+1} &= u_{i,j}^n + dt \nabla \cdot (D \nabla u(x,y))_{i,j} = u_{i,j}^n + \\ &dt ((D_{i+\frac{1}{2},j} - D_{i-\frac{1}{2},j}) (u_{i+\frac{1}{2},j} - u_{i-\frac{1}{2},j}) + \\ &(D_{i,j+\frac{1}{2}} - D_{i,j-\frac{1}{2}}) (u_{i,j+\frac{1}{2}} - u_{i,j-\frac{1}{2}}) + \\ &D_{i,j} (u_{i+1,j} + u_{i-1,j} - 2u_{i,j} + u_{i,j+1} + u_{i,j-1} - 2u_{i,j})) \end{aligned}$$

其中: D, u 的半点值取为相邻两整点的平均值。根据归一化的 Priwitt 微分算子的定义,显然在图像边缘处 $\lambda(x,y)$ 趋近 1,新模型二的扩散系数趋于 GCDD 去噪模型的扩散系数;反之,在图像非边缘处 $\lambda(x,y)$ 趋近 0,新模型二的扩散系数则趋于 MCD 去噪模型的扩散系数。

2 数值实验及结果分析

本章给出图像去噪新模型的数值实验结果,并与 MCD 去噪模型和 GCD 去噪模型的结果进行比较。分别在原图像上加上均值为 0、方差为 20 的随机噪声和均值为 0、方差为 30 的随机噪声进行数值实验。实验中,取函数 φ 为:

$$\varphi \left(\frac{u_{xx}u_{yy} - u_{xy}^2}{(1+u_x^2+u_y^2)^2} \right) = \left(\frac{u_{xx}u_{yy} - u_{xy}^2}{(1+u_x^2+u_y^2)^2} \right)^2$$

时间步长 dt 为 0.05。归一化的 Priwitt 微分算子 $\lambda(x,y)$ 则由噪声图像经高斯函数:

$$G(x,y) = \frac{1}{2\pi\sigma^2} \exp \left(-\frac{x^2+y^2}{2\sigma^2} \right)$$

滤波后所得图像计算得到。在专门的边缘检测过程中,一般需要对图像进行二值化来提高实际应用中边缘检测的效果。

但是,在本文的去噪模型中,为了避免对图像细节结构提取的丢失,不对图像进行二值化处理。

在 GCDD 去噪模型的数值实验中,用文献[13]中提出的 NSDE(Normalized Step Difference Energy)来衡量迭代过程是否终止,即:

$$NSDE = \frac{|u^{k+1} - u^k|^2}{|u^{k+1}|^2} \leq 3.0 \times 10^{-9}$$

其中: u^k 和 u^{k+1} 分别指迭代计算中第 k 步与第 $k+1$ 步的图像。对于 MCD 去噪模型和本文提出的两个新模型,迭代终止条件是:

$$\max_{i,j} |u^{k+1}[i,j] - u^k[i,j]| \leq 0.02$$

其中: u^k 和 u^{k+1} 分别为迭代计算中第 k 步和第 $k+1$ 步的图像。

分别用 Camera man(256×256)和 Bridge(512×512)图像进行实验。对实验结果的用均方误差(Mean Squared Error, MSE)和峰值信噪比(Peak Signal-to-Noise Ratio, PSNR)来评价,其中 MSE、PSNR 分别定义如下:

$$MSE = \frac{1}{MN} \int_{\Omega} (f - u)^2 dx dy$$

$$PSNR = 10 \cdot \lg \left(\frac{\sum_{i,j} 255^2}{\sum_{i,j} (f_{ij} - u_{ij})^2} \right)$$

2.1 较低噪声水平下的数值实验

分别在 Camera man、Bridge 清晰图像中加入均值为 0、方差为 20 的高斯噪声。

1) 利用各去噪模型对 Camera man 图像进行实验,结果见图 1 和表 1。



图 1 Camera man 图像实验对比图(噪声方差为 20)

表 1 Camera man 图像实验 MSE 和 PSNR 数据(噪声方差为 20)

方法	MSE	PSNR/dB	迭代次数
噪声图像	366.7585	22.4870	—
MCD 模型	191.0928	25.3184	11
GCDD 模型	185.4537	25.4484	449
Gauss 滤波模型	321.9217	23.0533	—
新模型一	121.4085	27.2883	11
新模型二	120.8890	27.3069	11

2) 利用各去噪模型对 Bridge 图像进行实验,结果见图 2 和表 2。

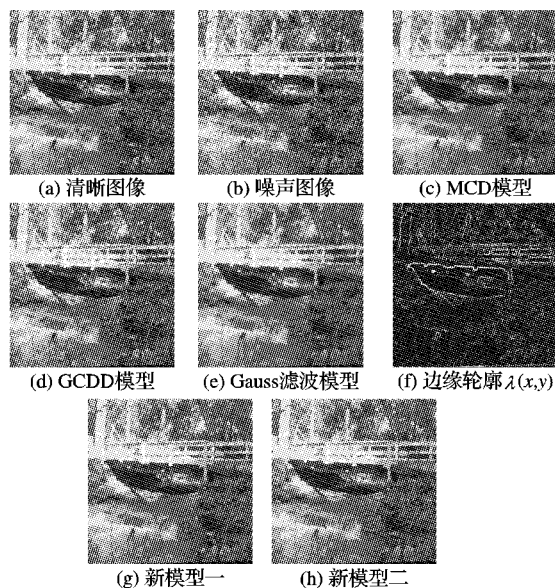


图 2 Bridge 图像实验对比图(噪声方差为 20)

表 2 Bridge 图像实验 MSE 和 PSNR 数据(噪声方差为 20)

方法	MSE	PSNR/dB	迭代次数
噪声图像	389.2817	22.2282	—
MCD 模型	162.0448	26.0345	8
GCDD 模型	166.8772	25.9068	481
Gauss 滤波模型	284.8869	23.5841	—
新模型一	149.1171	26.3955	11
新模型二	143.8009	26.5532	9

2.2 较高噪声水平下的数值实验

分别在 Camera man、Bridge 清晰图像中加入均值为 0、方差为 30 的高斯噪声。

1) Camera man 图像的数值实验,实验结果见图 3 和表 3。



图 3 Camera man 图像实验对比图(噪声方差为 30)

表 3 Camera man 图像实验 MSE 和 PSNR 数据(噪声方差为 30)

方法	MSE	PSNR/dB	迭代次数
噪声图像	817.0463	19.0083	—
MCD 模型	232.9988	24.4573	12
GCDD 模型	272.8640	23.7713	556
Gauss 滤波模型	355.2806	22.6251	—
新模型一	185.9158	25.4376	12
新模型二	184.3264	25.4749	12

2) Bridge 图像的数值实验,实验结果见图 4 和表 4。

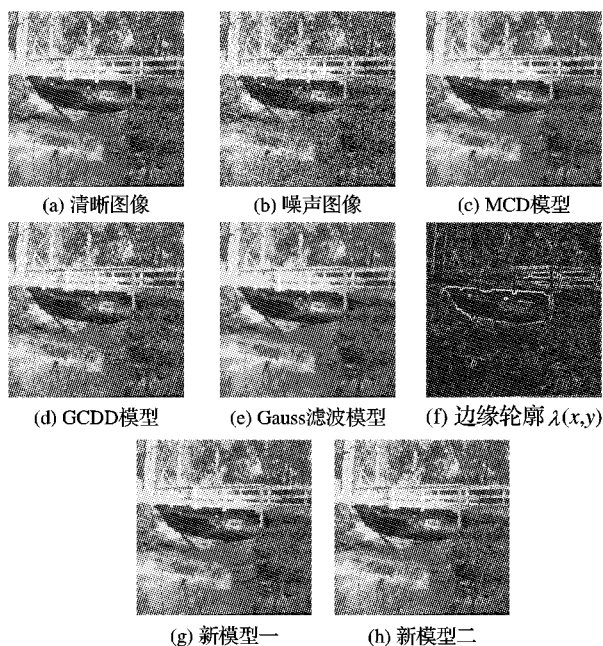


图 4 Bridge 图像实验对比图(噪声方差为 30)

表 4 Bridge 图像实验 MSE 和 PSNR 数据(噪声方差为 30)

方法	MSE	PSNR/dB	迭代次数
噪声图像	849.6050	18.8386	-
MCD 模型	224.6279	24.6162	12
GCDD 模型	254.8716	24.0676	562
Gauss 滤波模型	311.1877	23.2006	-
新模型一	212.6637	24.8539	11
新模型二	220.0360	24.7059	9

图 1~4 分别给出了 Camera man 图像和 Bridge 图像在两种不同噪声水平下去噪的结果,包括 MCD 模型、GCDD 模型、本文所提出的两种新模型与 Gauss 滤波后的图像,以及经 Priwitt 微分算子检测的边缘轮廓图像。

从图 1~4 可以看出,MCD 模型的去噪能力强,GCDD 模型则在保持图像边缘等细节特征方面更具有优势,而本文所提出的模型则能利用 Priwitt 微分算子自适应地发挥 MCD 和 GCDD 的作用,从而实现在去除噪声的同时能很好地保持图像边缘等细节特征。

表 1~4 分别给出了 MCD 模型、GCDD 模型、本文所提出的两种新模型在 MSE 和 PSNR 两个指标上的表现。从表中可以看出,两个新模型得到的去噪图像 MSE 更小,PSNR 更大。对于 Camera man 图像而言,图像的结构明显,纹理偏少,从表 1 和表 3 可知,本文提出的新模型显示出强大的优势,且无论是较低噪声水平(噪声方差为 20)还是较高噪声水平(噪声方差为 30),新模型二表现最好;对于 Bridge 图像来说,图像的纹理更多,虽然新模型均表现更好,但当噪声水平较高(噪声方差为 30)时,新模型一比新模型二表现稍好。从迭代次数上来看,新模型的运行速度与 MCD 模型相当,而大大高于 GCDD 模型。

3 结语

本文利用归一化的 Priwitt 微分算子作为权重,将 MCD 去

噪模型和 GCDD 去噪模型融合起来,提出两种新的非线性偏微分方程图像去噪模型,新模型吸取 MCD 模型和 GCDD 模型各自的优点。

首先,本文利用高斯滤波对噪声图像进行滤波处理,由滤波后的图像计算出归一化的 Priwitt 微分算子(即滤波后图像的边缘轮廓);然后,新的去噪模型利用所得到的 Priwitt 微分算子自适应地平衡于高斯曲率扩散和平均曲率扩散之间,从而在有效去噪的同时保持图像边缘等重要特征。数值实验结果表明,本文所提出的两种去噪模型去噪能力明显优于 MCD 去噪模型和 GCDD 去噪模型,吸取了它们各自的优点,即去噪能力强且收敛速度快,又能很好地保持图像边缘等图像特征信息。

参考文献:

- [1] RUDIN L, OSHER S, FATEMI E. Nonlinear total variation based noise removal algorithms[J]. Physical D, 1992, 60(1/2/3/4): 259-268.
- [2] YOU Y L, KAVEH M. Fourth-order partial differential equations for noise removal[J]. IEEE Transactions on Image Processing, 2000, 9(10): 1723-1730.
- [3] KIM S, LIM H. Fourth-order partial differential equations for effective image denoising[EB/OL]. [2012-05-20]. <http://www.emis.de/journals/EJDE/conf-proc/17/k2/kim.pdf>.
- [4] YI D, LEE S. Fourth-order partial differential equations for image enhancement[J]. Applied Mathematics and Computation, 2006, 175(1): 430-440.
- [5] CHAN T, OSHER S, SHEN J. The digital TV filter and nonlinear denoising[J]. IEEE Transactions on Image Processing, 2001, 10(2): 231-241.
- [6] 王艳红, 李维国. 一种高斯曲率策动和高阶微分相融合的去噪方法[J]. 中国图象图形学报, 2009, 14(2): 260-266.
- [7] 丛维, 郭定辉. 用于图像去噪的改进型非线性扩散方程[J]. 计算机应用, 2008, 28(7): 1764-1765.
- [8] 郭茂银, 田有先. 改进的 LIP 偏微分方程图像去噪方法[J]. 计算机应用, 2011, 31(2): 383-385.
- [9] ROMENY B. Geometry driven diffusion in computer vision[M]. Berlin: Springer, 1994.
- [10] PERONA P, MALIK J. Scale, space and edge detection using anisotropic diffusion[J]. IEEE Transactions on Pattern Analysis and Machine Intelligence, 1990, 12(7): 629-639.
- [11] CHEN Q, MONTESINOS P, SUN Q S, et al. Adaptive total variation denoising based on difference curvature[J]. Image and Vision Computing, 2010, 28(3): 298-306.
- [12] EI-FALLAH A I, FORD G. Mean curvature evolution and surface area scaling in image filtering[J]. IEEE Transactions on Image Processing, 1997, 6(5): 750-753.
- [13] LEE S, SEO J K. Noise removal with Gauss curvature driven diffusion[J]. IEEE Transactions on Image Processing, 2005, 14(7): 904-909.
- [14] 王智峰, 李小毛, 唐延东. 一种改进的基于高斯曲率和偏微分方程的图像降噪算法[J]. 红外与激光工程, 2006, 35(24): 156-159.
- [15] 朱立新, 罗子娟. 法曲率驱动曲面演化图像去噪模型研究[J]. 计算机工程与应用, 2011, 47(15): 191-193.