

基于控制的低能耗多跳分簇路由协议

邓亚平, 唐 骏*

(重庆邮电大学 计算机科学与技术学院, 重庆 400065)

(*通信作者电子邮箱 02528354@163.com)

摘 要:针对无线传感器网络(WSN)的多跳分簇协议中, Sink 节点附近的簇头能量消耗过快, 簇头分布不够均匀, 多跳链路不够高效等关键问题, 提出了基于控制的低能耗多跳分簇路由协议。通过控制簇头数量与大小、多跳链路能耗、轮数与每一轮中的数据传输量来解决以上问题。仿真结果表明: 所提协议与低功耗自适应分簇(LEACH)协议和基于非均匀分簇的无线传感器网络路由协议(EEUC)相比, 网络稳定期分别延长了 138% 和 13%, 网络生命期分别延长了 13% 和 8%, 因此能够有效地降低网络能耗, 均衡网络负载, 延长网络生存时间。

关键词:无线传感器网络; 路由协议; 多跳; 簇头; 生命期

中图分类号: TP393; TN915.04 **文献标志码:** A

Multi-hop clustering routing protocol with low energy consumption based on control

DENG Yaping, TANG Jun*

(College of Computer Science and Technology, Chongqing University of Posts and Telecommunications, Chongqing 400065, China)

Abstract: In multi-hop routing protocol of Wireless Sensor Network (WSN), the cluster heads near the Sink node consumes faster than other cluster heads, the cluster heads are uneven distributed, and multi-hop links are not effective. To solved these problems, a low energy consumption multi-hop routing protocol based on control was proposed. The clusters' number and size, the multi-hop links' energy consumption, the number of rounds and the quantity of the data transmission were controlled. The simulation results show that this routing protocol prolongs the network's stable period time by 138% and 13%, and it also prolongs the network's lifetime by 13% and 8% in comparison with the Low Energy Adaptive Clustering Hierarch (LEACH) and uneven cluster-based routing protocol for wireless sensor networks (EEUC). Therefore, the proposed protocol can reduce the energy consumption of the network, balances network load, and prolongs the survival time of the network efficiently.

Key words: Wireless Sensor Network (WSN); routing protocol; multi-hop; cluster node; lifetime

0 引言

无线传感器网络(Wireless Sensor Network, WSN)是新型的传感器网络,其目的是协作地感知、采集和处理网络覆盖区域中感知对象的信息,并发送给监控者。由于无线传感器节点的能量有限,所以需要有效地安排节点能量以延长网络的生命周期^[1-3]。已有的一些研究表明,分簇协议中簇头与基站通信时,多跳的方式比直接传输方式更节约能量^[4]。

Heinzelman 等^[5]于 2000 年提出低功耗自适应分簇(Low Energy Adaptive Clustering Hierarch, LEACH)协议之后,相继产生了高效率的无线传感器网络路由协议(routing protocol for enhanced efficiency in wireless sensor networks, TEEN)^[6],有效综合信息获取的无线传感器网络混合路由协议(hybrid protocol for efficient routing and comprehensive information retrieval in wireless sensor networks, APTEEN)^[7],实时通信传感器网络中的一种无状态协议(stateless protocol for real time communication in sensor networks, SPEED)^[8],传感器信息系统中的高能效采集(power efficient gathering in sensor information systems, PEGASIS)^[9],Ad Hoc 网络的一种混合节能分布式的聚类方法(hybrid, energy-efficient, distributed clustering approach for Ad Hoc sensor networks, HEED)^[10]等多种经典的无线传感器路由协议。

LEACH 协议随机地选取节点作为簇头的分簇方式来降低网络能耗,通过式(1)结合轮的方式来均衡负载:

$$T(n) = \begin{cases} \frac{P}{1 - p * (r \bmod \frac{1}{p})}, & n \in G \\ 0, & \text{其他} \end{cases} \quad (1)$$

其中: P 为簇头节点占有所有节点百分比的期望值; r 为当前轮数; G 为最近的 $1/P$ 轮中未担任过簇头节点的节点集。而 LEACH 协议最大的缺点是所有簇头都以直接传送的方式向基站传送信息,而能耗较大。文献[11]提出使用两个层次的体系结构来降低能量消耗:第一个层次的簇头通过与 LEACH 类似的方式成簇;第二个层次的簇头通过第一个层次的簇头成簇。它提供了更多的分布式算法,因此网络负载更均衡,传感器网络的寿命得到了延长。文献[12]首次提出利用非均匀分簇的思想来解决这个“热区”问题。但是它考虑的是一个异构网络,簇头为超级节点,而且位置是事先计算好的,无需动态构造簇的操作。文献[13]提出了通过候选节点广播自己剩余能量来竞选簇头,其中簇到基站的距离是成簇的重要因素,它的问题在于远离基站的簇比靠近基站的簇要求更多的能量。文献[14]提出了一种基于非均匀分簇的无线传感器网络路由协议(uneven cluster-based routing protocol for wireless sensor networks, EEUC),通过非均匀分簇来均衡网络

收稿日期:2012-08-01;修回日期:2012-08-29。

作者简介:邓亚平(1948-),男,重庆人,教授,主要研究方向:计算机网络与通信、信息安全;唐骏(1985-),男,重庆荣昌人,硕士研究生,主要研究方向:计算机网络与通信。

能耗,成簇规则导致簇头之间距离都大于单跳距离,多跳传输数据的过程中能耗比较大,并且会因多跳路径选择的不合理浪费不必要的能量。文献[15]通过控制最优簇数目与簇成员数量均衡了网络中的能耗。由于通过随机数来给每个节点分配一个临时的 ID,节点必须向基站发送 ID,导致有可能出现重复 ID,基站在出现重复 ID 时会发送重选消息,如果多次出现重复 ID 节点需要多次向基站发送信息从而导致不必要的能量消耗。

本文针对 EEUC^[13] 的不足,提出了基于控制的低能耗多跳分簇路由协议(low energy consumption multi-hop clustering routing protocol based on control, CLMP)。通过控制成簇的大小,均匀所有簇头的分布,并实现以单跳通信为基础的选择能耗低的多跳链路,并通过将所有轮划分为两个阶段,以减少总轮数来解决 EEUC 中的不足。仿真实验表明,CLMP 比 LEACH 和 EEUC 更能有效地减少了能量消耗,均衡负载,进一步延长网络生命周期。

1 网络模型

考虑一个由 N 个传感器节点随机分布的一个传感器网络,本文假设:

- 1) 在一个方形观测区域内,传感器节点和基站在部署后均不发生位置移动;
- 2) 所有节点都是同构的;
- 3) 链路是对称的,若已知对方发射功率,节点能够根据接收信号的强度(Received Signal Strength Indication, RSSI)来计算到发送者的近似距离;
- 4) 根据接收者的距离远近,节点可以调整其发射功率节约能量。

本文采用与 LEACH 协议^[4] 相同的无线通信能量消耗模型。节点发送 l 比特数到距离为 d 的位置,消耗的能量为发射电路损耗加上功率放大损耗的和,如式(2):

$$E_{Tx}(l, d) = \begin{cases} lE_{elec} + l\epsilon_{fs}d^2, & d < d_0 \\ lE_{elec} + l\epsilon_{mp}d^4, & d \geq d_0 \end{cases} \quad (2)$$

其中: E_{elec} 表示发射电路损耗的能量; ϵ_{fs} 和 ϵ_{mp} 分别为自由空间模型和多路径衰减模型中功率放大所需的能量。节点接收 l 比特的数据消耗的能量如式(3):

$$E_{Rx}(l) = lE_{elec} \quad (3)$$

本文用 E_{DF} 表示融合单位比特数据消耗的能量。假设邻近节点采集的数据具有较高的冗余度,每个成员发送长度 b 的数据包,簇头可以将其成员的数据融合成长度 b 的数据包,而簇间通信冗余度很低,不能融合。

2 基于控制的低能耗多跳分簇路由协议

2.1 EEUC 算法

EEUC 是李法成等^[14] 提出的一种非均匀分簇多跳路由协议的核心算法。该算法采用 LEACH 协议中轮的概念,在每一轮成簇阶段,利用式(4) 计算出节点 s_i 的竞争半径,通过节点竞争半径和使用式(1) 计算出的限定阈值选出候选簇头,然后通过每个候选簇头找出它们的邻居节点建立邻居表,通过对比自己和邻居的剩余能量选择最终簇头。在多跳链路建立阶段,当簇头选取下一跳簇头时,通过比较各个簇头到 Sink 节点的距离,再利用竞争半径选出多个符合条件的下一跳簇头,然后随机选择其中一个作为该簇头的最终下一跳簇头。链路建立完成进入数据传输阶段,当该轮数据传输结束后进入下一轮重新选择簇头。

$$s_i, Rc = \left(1 - c \frac{d_{max} - d(s_i, Sink)}{d_{max} - d_{min}}\right) d_0 \quad (4)$$

EEUC 算法通过非均匀分簇的方法部分解决了 Sink 节点附近容易出现热区的问题,并且簇头分布比较均匀,从一定程度上均衡了网络的能耗。

EEUC 算法的不足如下。

1) 选择候选簇头时没有考虑节点的剩余能量,使一些能量较低的节点被选为候选簇头,虽然最终它不能成为簇头,但会导致这些节点进入筛选过程进一步消耗能量。

2) 竞争半径设置过大,范围在 $(2/3)d_0 \sim d_0$, 导致成簇结束后相邻簇头之间的距离在 $(4/3)d_0 \sim 2d_0$, 在多跳链路建立阶段,由于成簇规则导致各个簇头之间的距离都超过单跳距离,因此多跳链路建立后传输数据的能耗比较大。

3) 多跳链路选择中,仅仅依据各簇头距离 Sink 节点的距离和它们的竞争半径,选择可能成为下一跳簇头的簇头集合,然后随机从集合中选取一个簇头成为下一跳簇头,这种方式建立的多跳链路总体能耗比较大。

4) 过多的轮数导致过多地成簇与建立多跳链路,大大浪费了能量。

2.2 CLMP 算法

针对 EEUC 算法的不足,经过改进提出了 CLMP 算法如下。

1) 成簇阶段。采用非均匀分簇的方式解决基站附近容易出现热区的问题,通过式(1) 改进得到式(5),通过式(5) 设定一个阈值 T ,对节点 s_i 产生一个随机数 t ,选出 $t < T$ 并且剩余能量大于网络平均能量的节点,组成候选簇头集合 $S\{\}$,根据 $S\{\}$ 加入先后顺序给节点一个 id。

$$T(n) = \begin{cases} \frac{E_i}{E_{av}} * \frac{p}{1 - p * \left(\text{rmod} \frac{1}{p}\right)}, & n \in G \\ 0, & \text{其他} \end{cases} \quad (5)$$

其中: E_i 为节点 s_i 的剩余能量, E_{av} 为全网平均剩余能量。通过改进,提高了剩余能量大的节点成为簇头的几率,均衡了网络能耗。

通过 EEUC 中计算竞争半径的公式改进得到式(6),计算出 $S\{\}$ 中的节点 s_i 竞争半径 s_i, Rc ,这样使相邻簇头可以在单跳距离内通信。

$$s_i, Rc = \frac{1}{2} \left(1 - c \frac{d_{max} - d(s_i, Sink)}{d_{max} - d_{min}}\right) d_0 \quad (6)$$

其中: d_{max} 和 d_{min} 分别为网络中节点到 Sink 节点的最大距离和最小距离, $d(s_i, Sink)$ 为 s_i 到 Sink 节点的距离, c 为竞争系数 $1/3$, d_0 为单跳最大距离。计算出所有簇头的竞争半径在 $(1/3)d_0 \sim (1/2)d_0$, 相邻簇头之间的距离为 $(2/3)d_0 \sim d_0$ 。

如果 $S\{\}$ 中的节点 s_j 到 s_i 节点的距离 $d(s_j, s_i) < s_j, Rc$ 或 $d(s_j, s_i) < s_i, Rc$, 那么 s_j 和 s_i 就互为邻居节点,以此方式建立所有 $S\{\}$ 中节点的邻居表。在邻居表建立完成后,根据 id 先后顺序进行下面操作:

对第一个 $S\{\}$ 中的节点 s_1 判断其邻居和它自身能量的大小,选择能量最大的为簇头, s_1 和 s_1 的邻居都退出簇头选举并广播给它们的邻居一个消息 QUIT_MSG(id),收到该消息的节点都把 s_1 和 s_1 的邻居从这些节点的邻居表中删除;然后对下一个 s_i 进行以上操作,直到所有节点都退出选举,至此所有簇头都选出。

节点加入簇头成簇过程与 LEACH 协议中相同。

2) 多跳路径建立阶段。

在簇头 CH 的 n 倍单跳范围内选出比 CH 距离 Sink 近的全部簇头,如图 1 所示,RCH1、RCH2 和 RCH3 组成集合 RCH

(n 是保证 RCH 非空的最小正整数, 正常情况下 n 为 1, 在网络节点死亡较多的特殊情况下 n 可能大于 1, 因此多跳链路建立主要考虑单跳范围内的情况)。

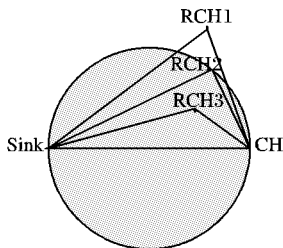


图1 中继簇头的选择

簇头 CH 到这些簇头的距离和这些簇头到基站的距离有如下关系:

$$d_{CH-RCH1}^2 + d_{BS-RCH1}^2 = H_1 > d_{CH-RCH2}^2 + d_{BS-RCH2}^2 = H_2 > d_{CH-RCH3}^2 + d_{BS-RCH3}^2 = H_3 \quad (7)$$

其中: H_3 最小, CH 选择 RCH3 作为其中继簇头。由于采用和 LEACH 相同的无线能量损耗模型, 在单跳范围内, 传输能量的消耗和距离的平方成正比, H 越小最后形成后的多跳链路能耗越小。

3) 在整个网络所有轮中, 本文把所有轮分为前 A 轮和后 B 轮。在前 A 轮, 由于网络才开始运作时, 各个节点能量十分充足, 因此可以尽量在每轮多传输数据, 延长每轮时间, 来减少总轮数, 同时减少在分簇和建立多跳链路的能耗, 从而降低整个网络能耗, 前 A 轮每轮传输数据量是后 B 轮的 k 倍。本文限定网络中平均能量低于网络开始时平均能量的 $1/q$ 的时候进入后 B 轮, 网络中各个节点剩余能量分布不是很均匀, 但是所有节点都还拥有相当的能量可以工作很久, 只是前 A 轮中能耗过大的一些节点在后 B 轮中主要担当簇成员, 因此再通过 LEACH 中轮的方式对网络均衡负载。

4) 数据传输阶段采用与 EEUC 相同的方式建立通信, 簇头接收簇成员数据进行数据融合, 然后利用多跳链路发送给 Sink 节点, 当该轮数据发送完毕后, 进入下一轮重新成簇。

2.3 CLMP 算法相对 EEUC 增加的控制与开销成本

成簇阶段, CLMP 中采用控制减小 EEUC 中竞争半径的值, 通过 EEUC 中的非均匀分簇方式控制了成簇数量和大小, 使多跳链路建立时能使各簇头在单跳范围内通信, 减少了多跳链路的数据传输成本, 而开销成本并没有增加; 多跳链路建立阶段, EEUC 中簇头采用随机选择一个比自己靠近 Sink 节点的簇头作为下一跳簇头, 而 CLMP 采用计算出最小能耗的下一跳簇头, 虽然 CLMP 增加了一定的计算开销, 但是总体建立的多跳链路能在大量数据传输阶段减少更多的能耗; CLMP 在整个网络的所有轮中, 把所有轮分为前 A 轮和后 B 轮, 通过增加前 A 轮的数据传输量, 减少了总轮数, 因此减少了用在成簇和建立多跳链路时能量开销, 而前 A 轮中每轮传送的数据量通过一个阈值限定就可以实现, 因此基本没有增加开销成本, 而后 B 轮基本和 EEUC 相同, 因此总体减少了网络能耗。

总体而言 CLMP 比 EEUC 仅在多跳链路选择时增加了很少的计算开销, 在整个网络周期中却减少了大量能量消耗。

3 仿真实验

使用 Matlab 对该协议进行仿真实验, 并与 LEACH 和 EEUC 进行对比分析, 评估 CLMP 的性能。仿真环境的参数如表 1 所示。

表 1 仿真环境参数

参数名称	参数值	参数名称	参数值
节点分布区域范围	200 m × 200 m	Sink 节点位置	(100 m, 220 m)
节点总数	150	E_{elec}	50 nJ · b ⁻¹
节点初始能量	0.5 J	ϵ_{fs}	10 pJ · (b · m ²) ⁻¹
数据包长度	4000 b	ϵ_{mp}	0.0013 pJ · (b · m ⁴) ⁻¹
控制信息长度	100 b	p	0.05
$1/q$	0.4	k	4

图 2 给出了随机抽取到的某一轮的节点分布图。由图中可以看出, CLMP 分簇算法的成簇比较均匀。

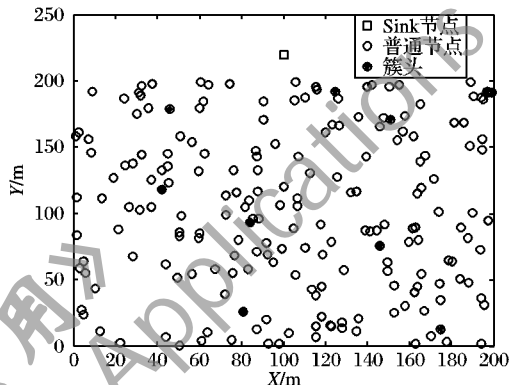


图2 某一轮簇头的分布

图 3 为节点死亡图, LEACH 和 EEUC 协议的第一个死亡节点分别出现在 348 轮秒(轮秒为传送有效数据量的单位)和 733 轮秒, 而 CLMP 的第一个节点死亡出现在 828 轮秒。假设节点死亡数达到 70% 时网络死亡, 则 LEACH、EEUC 和 CLMP 网络死亡分别在 756 轮秒、788 轮秒和 854 轮秒。网络中第一个节点死亡之前为稳定期, 之后为衰亡期。相对于 LEACH 和 EEUC 协议, CLMP 下网络的稳定期分别延长了 (480 轮秒)138% 和 (95 轮秒)13%, 生命周期分别延长了 (98 轮秒)13% 和 (66 轮秒)8%。

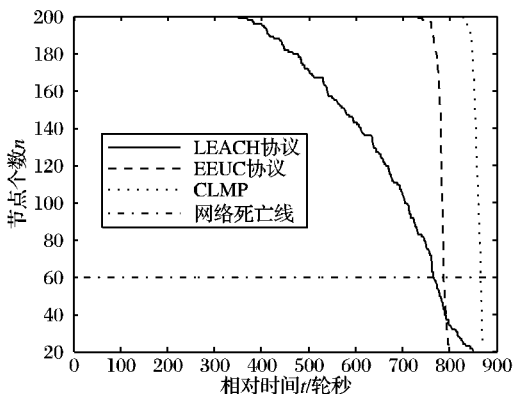


图3 节点死亡图

图 4 显示了网络总剩余能量, CLMP 的能耗明显低于 LEACH 和 EEUC。因为 LEACH 协议采用全网直接发送数据给 Sink 节点, 大量消耗能量, 而 EEUC 协议虽较好控制成簇半径, 采用多跳路由, 但该协议选择簇头和建立多跳链路次数过多浪费大量能量, 且多跳链路中相邻簇头通信都超过了单跳距离, 因此能耗较大。CLMP 通过将整个网络生命期划分为两部分, 分别重点传送数据和均衡负载, 减少了选择簇头和建立多跳链路的次数, 并且优化了多跳链路的选择, 整体上降低了全网的能耗, 延长了生命期, 均衡了网络负载。

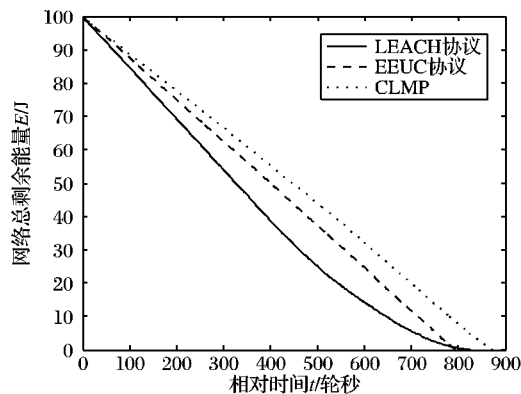


图4 网络总剩余能量图

4 结语

本文针对多跳分簇无线传感网中普遍问题与 EEUC 中的不足进行了深入分析,通过控制成簇大小与数量,建立能量高效的多跳链路,利用将整个网络生命期划分为两部分实现减少成簇和建立多跳链路的次数,弥补了 EEUC 中的不足,有效地降低了网络总能耗。仿真结果表明,与 LEACH 和 EEUC 算法比较,CLMP 算法减少了网络总能耗,使负载更均衡,延长了网络生命期。

参考文献:

- [1] 李利民,李建中,陈渝. 无线传感器网络[M]. 北京:清华大学出版社,2005.
- [2] 沈波,张世永,钟亦平. 无线传感器网络分簇路由协议[J]. 软件学报,2006,17(7):1588-1600.
- [3] 余勇昌,韦岗. 无线传感器网络中基于 PEGASIS 协议的改进算法[J]. 电子学报,2008,36(7):1309-1313.
- [4] MHATRE V, ROSENBERG C. Design guidelines for wireless sensor network: communication, clustering and aggregation [J]. Ad Hoc Networks, 2004, 2(1): 45-63.
- [5] HEINZELMAN W R, CHANDRAKASAN A, BALALCRISHNAN H. Energy efficient communication protocol for wireless microsensor networks [C]// Proceedings of the 33rd Hawaii International Conference on System Science. Washington, DC: IEEE Computer Society, 2000: 300-304.

- [6] MANJESHWAR A, AGRAWAL D. TEEN: a routing protocol for enhanced efficiency in wireless sensor networks [C]// Proceedings of the 15th International Symposium on Parallel and Distributed Processing. Washington, DC: IEEE Computer Society, 2001: 2001-2009.
- [7] MANJESHWAR A, AGRAWAL D. APTEEN: a hybrid protocol for efficient routing and comprehensive information retrieval in wireless sensor networks [C]// Proceedings of the 16th International Parallel and Distributed Processing Symposium. Washington, DC: IEEE Computer Society, 2002: 195-202.
- [8] HE T, STANKOVIC J A, LU C Y, *et al.* SPEED: a stateless protocol for real time communication in sensor networks [C]// Proceedings of the 23rd International Conference on Distributed Computing System. Washington, DC: IEEE Computer Society, 2003: 46-55.
- [9] LINDSEY S, RAGHAVENDRA C S. PEGASIS: power efficient gathering in sensor information systems [C]// Proceedings of the 2002 Aerospace Conference. Washington, DC: IEEE Computer Society, 2002: 3-1125-3-1130.
- [10] YOUNIS O, FAHMY S. HEED: a hybrid, energy-efficient, distributed clustering approach for Ad Hoc sensor networks [J]. IEEE Transactions on Mobile Computing, 2004, 3(4): 366-379.
- [11] LOSCRI V, MORABITO G, MARANO S. A two level hierarchy for low energy adaptive clustering hierarchy (TL-LEACH) [C]// Proceedings of the 62nd IEEE Vehicular Technology Conference. Washington, DC: IEEE Computer Society, 2005: 1809-1813.
- [12] SORO S, HEINZELMAN W B. Prolonging the lifetime of wireless sensor networks via unequal clustering [C]// Proceedings of the 19th International Parallel and Distributed Processing Symposium. Washington, DC: IEEE Computer Society, 2005: 8-15.
- [13] YE M, LI C, CHEN G, *et al.* EECS: an energy efficient clustering scheme in wireless sensor networks [C]// Proceedings of the 24th IEEE International Conference on Performance, Computing and Communications. Piscataway: IEEE Press, 2005: 535-540.
- [14] 李法成,陈贵海,叶懋,等. 一种基于非均匀分簇的无线传感器网络路由协议[J]. 计算机学报,2007,30(1):27-36.
- [15] 施叶玲,陈彬兵. 无线传感器网络改进的 LEACH-ID 算法[J]. 计算机应用,2011,31(2):324-327.

(上接第107页)

地传播,当 t 趋向于无穷大时,信息的传播过程将达到平稳状态,各类节点的数量将不再变化;当传播系数较小时,信息仍能在网络中传播,并且传播系数和免疫系数的大小发生变化时,信息传播的快慢程度将发生相应的改变。本文有助于更深刻地理解在线社交网络中的信息传播行为和合理地引导网络舆论。下一阶段的任务将是研究动态网络中,具有不同度的用户节点对信息传播产生的影响。

参考文献:

- [1] Facebook[EB/OL]. [2012-03-12]. <http://www.facebook.com/>.
- [2] MySpace[EB/OL]. [2012-03-12]. <http://www.myspace.com/>.
- [3] 人人网[EB/OL]. [2012-03-25]. <http://www.renren.com/>.
- [4] 开心网[EB/OL]. [2012-03-25]. <http://www.kaixin001.com/>.
- [5] KUMAR R, NOVAK J, TOMKINS A. Structure and evolution of online social networks [C]// Proceedings of the 12th ACM SIGKDD International Conference on Knowledge Discovery and Data Mining. New York: ACM Press, 2006: 611-617.
- [6] MISLOVE A, MARCON M, GUMMAD K P, *et al.* Measurement and analysis of online social networks [C]// IMC'07: Proceedings of the 7th ACM SIGCOMM Conference on Internet Measurement. New

- York: ACM Press, 2007: 29-42.
- [7] BENEVENUTO F, RODRIGUES T, CHA M, *et al.* Characterizing user behavior in online social networks [C]// IMC'09: Proceedings of the 9th ACM SIGCOMM Conference on Internet Measurement Conference. New York: ACM Press, 2009: 49-62.
- [8] CHEN W, WANG Y J, YANG S Y. Efficient influence maximization in social networks [C]// KDD'09: Proceedings of the 15th ACM SIGKDD International Conference on Knowledge Discovery and Data Mining. New York: ACM Press, 2009: 199-208.
- [9] SHI X L, ZHU J, CAI R, *et al.* User grouping behavior in online forums [C]// KDD'09: Proceedings of the 15th ACM SIGKDD International Conference on Knowledge Discovery and Data Mining. New York: ACM Press, 2009: 777-786.
- [10] 刘建伟,李为宇,孙钰. 社交网络安全问题及其解决方案[J]. 中国科学技术大学学报,2011,41(7):565-574.
- [11] MISLOVE A, KOPPULA H S, GUMMADI K P, *et al.* Growth of the flickr social network [C]// Proceedings of the 1st ACM SIGCOMM Workshop on Social Networks. New York: ACM Press, 2008: 25-30.
- [12] 张彦超,刘云,张海峰,等. 基于在线社交网络的信息传播模型[J]. 物理学报,2011,60(5):60-66.
- [13] FRAUENTHAL J C. Mathematical modeling in epidemiology [M]. Berlin: Springer, 1980.