

文章编号:1001-9081(2013)01-0295-04

doi:10.3724/SP.J.1087.2013.00295

压缩感知的量化率失真分析

张旭坤*, 马社祥

(天津理工大学 计算机与通信工程学院, 天津 300384)

(*通信作者电子邮箱 zhuk1126@126.com)

摘要: 压缩感知理论表明稀疏信号能由少量的随机测量值恢复, 从信息理论的角度来看, 随机测量值能否有效表示稀疏信号仍是一个值得探讨的问题。针对压缩感知测量值的量化, 将率失真理论作为工具研究压缩测量值的量化带来的平均失真度, 包括均匀量化和非均匀量化两种情况, 并进一步得到由量化测量值重构信号的率失真性能极限。理论分析和实验结果表明, 相对于信号的自适应编码随机观测过程会引起较大的失真, 但是压缩感知能利用信号的稀疏度来减小量化后的重构失真, 这说明量化压缩感知适用于低稀疏度的信号。

关键词: 压缩感知; 量化; 率失真函数; 有损压缩; 信号重构

中图分类号: TP391; TN911.72 **文献标志码:**A

Rate-distortion analysis for quantizing compressive sensing

ZHANG Xukun*, MA Shexiang

(College of Computer and Communication Engineering, Tianjin University of Technology, Tianjin 300384, China)

Abstract: Recent studies in Compressive Sensing (CS) have shown that sparse signals can be recovered from a small number of random measurements, which raises the question of whether random measurements can provide an efficient representation of sparse signals in an information-theoretic sense. To examine the influence of quantization errors, the average distortion introduced by quantizing compressive sensing measurements was studied using rate distortion theory. Both uniform quantization and non-uniform quantization were considered. The asymptotic rate-distortion functions were obtained when the signal was recovered from quantized measurements using different reconstruction algorithms. Both theoretical and experimental results show that encoding a sparse signal through simple scalar quantization of random measurements incurs a significant penalty relative to direct or adaptive encoding of the sparse signal, but compressive sensing is able to exploit the sparsity to reduce the distortion, so quantized compressive sampling is suitable to be used to encode the low sparse signal.

Key words: Compressive Sensing (CS); quantization; rate distortion function; lossy compression; signal reconstruction

0 引言

压缩感知是一个将高维空间的未知输入信号转换成维数足够小的信号的一种线性采样方法。一般地, 用维数减少的测量值很难唯一地恢复一个未知信号。然而, 当输入信号足够稀疏的情况下, 精确恢复是可能的。本文将假设未知信号 $X \in \mathbb{R}^N$ 是 K -项稀疏的, 也就是 X 中至多有 K 个非零值^[1]。一个很直接的方法是搜索所有可能的信号, 然后找与线性测量最一致最稀疏的那个。此方法仅需 $M = 2K$ 个随机测量值, 但找到这个最稀疏信号表示是一个 NP-难问题。鉴于此, Donoho 和 Candès 等^[2]通过将重构问题转换成一个线性规划问题然后用基追踪等方法来解决, 并证明这些方法需要比 $M = 2K$ 稍多的测量值, 在这种情况下稀疏信号重构是一个多项式时间问题。

在大多数实际应用中, 假设测量值是量化的并因此有有限的精度是很合理的。为了压缩感知信息, 有必要用到量化机制, 而量化则会给获得的数据带来失真, 因此, 在有量化误差的情形中用率失真理论分析压缩感知的性能对压缩感知理论很有用。当量化误差有界并预先知道, 文献[3]给出子空间追踪(Subspace Pursuit, SP)重构方法失真的上界。对于变换系数幅度成指数衰减的有界可压缩信号, 文献[4]给出了

均匀量化引起的重构失真的上界。文献[5]中同样使用均匀量化, 但是用于严格的 K -项稀疏信号, 并表明量化器的很大一部分量化区间没有充分利用。上述的方法都集中在最坏的情况的分析或者是简单的 1-比特量化。

与分析最坏的情况相反, 本文考察测量值量化的平均失真度, 这里包括均匀量化和非均匀量化。当测量矩阵和稀疏信号都遵循特定的概率模型时, 推导出标量量化的确切的率失真函数。基于测量值的率失真函数, 进一步描述重构算法重构信号的失真情况。

1 稀疏信号的自适应量化

设 $X \in \mathbb{R}^N$ 是严格 K -项稀疏信号, 于是信号可以表示成如下形式:

$$X = \Psi\Theta \quad (1)$$

其中: $\Psi \in \mathbb{R}^{N \times N}$, $\Theta \in \mathbb{R}^N$ 有至多 K 个非零系数。所以 X 是 Ψ 中 N 个列向量中至多 K 个列向量的线性组合, 于是 X 属于 $J = C_N^K$ 个子空间中的一个。压缩感知的显著特点是其编码器不需要知道矩阵 Ψ , 而只需译码器知道矩阵 Ψ 。为了给用于量化的压缩感知提供一个比较的基准, 这里给出一种最简单的压缩机制, 此机制的编码器和译码器都知道矩阵 Ψ 且编码器能够“适应”信号结构, 所以将其称作自适应量化^[6,5]。

收稿日期:2012-07-10;修回日期:2012-08-22。基金项目:国家自然科学基金资助项目(60872064)。

作者简介:张旭坤(1989-),女,河南光山人,硕士研究生,主要研究方向:通信信号处理; 马社祥(1962-),男,甘肃宁县人,副教授,博士,主要研究方向:通信信号处理。

为了分析自适应量化,假设共有 RK 个比特来量化向量 \mathbf{X} 。自适应量化方法就是编码器将 J 个可能的子空间的信息传输给译码器,于是将所给码率分成两部分:一部分用来传输 J 的信息,一部分用来量化信号 \mathbf{X} 。定义 $R_0 = (1/K) \text{lb}(J) = (1/K) \text{lb}(C_N^K)$, 编码器用 KR_0 比特来编码 J , 然后用剩下的 $KR - KR_0$ 比特来编码 X 的 K 个非零值。令 $D = \frac{1}{K} E[\|\mathbf{Y} - \hat{\mathbf{X}}\|_2^2]$ 为信号的平均失真度, 方差为 σ^2 的独立同分布高斯信源的率失真函数为:

$$D(R) = \sigma^2 2^{-2R} \quad (2)$$

得到自适应量化的失真度为:

$$D_{\text{adaptive}}(R) = 2^{-2(R-R_0)}; R \geq R_0 \quad (3)$$

若 R 和 R_0 大小相近, 则所给码率不足以传输 J 的信息, 于是一个简单的方法是直接地将 \mathbf{X} 的每个值用 KR/N 比特进行量化, 得到直接量化的平均失真度为:

$$D_{\text{direct}}(R) = 2^{-2KR/N} \quad (4)$$

2 压缩感知量化率失真分析

在这里将信号的测量看成是有损压缩的过程, 是一个随机测量值是否能有效表示稀疏信号的问题。

2.1 压缩感知

压缩感知(Compressive Sensing, CS) 是通过线性投影将一个 N 维信号 \mathbf{X} 编码为维数为 $M \ll N$ 的测量向量 \mathbf{Y} , 即:

$$\mathbf{Y} = \boldsymbol{\Phi} \mathbf{X} \quad (5)$$

其中 $\boldsymbol{\Phi} \in \mathbb{R}^{M \times N}$ 为测量矩阵。假设 \mathbf{X} 是严格 K -项稀疏的, 重构问题即给定 \mathbf{Y} 和 $\boldsymbol{\Phi}$ 来恢复 \mathbf{X} 。

基追踪(Basis Pursuit, BP) 方法^[7] 将重构问题转换成最小 l_1 范数问题, 即

$$\min \| \mathbf{X} \|_1 \quad (6)$$

s. t. $\mathbf{Y} = \boldsymbol{\Phi} \mathbf{X}$

其中 $\| \mathbf{X} \|_1 = \sum_{i=1}^N |X_i|$ 表示向量 \mathbf{X} 的 l_1 范数。这是个凸优化问题, 能由线性规划方法求解。算法能够精确重构信号的充分条件是基于限制等距性质 (Restricted Isometry Property, RIP), 定义如下。

定义 1 限制等距性质。对任意 $K = 1, 2, \dots$, 定义矩阵 $\boldsymbol{\Phi} \in \mathbb{R}^{M \times N}$ 的等距常量 δ_K 满足式(7):

$$\delta_K = \inf \{ \delta \mid (1 - \delta) \| \mathbf{X} \|_2^2 \leq \| \boldsymbol{\Phi} \mathbf{X} \|_2^2 \leq (1 + \delta) \| \mathbf{X} \|_2^2 \} \quad (7)$$

其中 \mathbf{X} 为任意 K -稀疏向量。当等距常量参数 $\delta_{c_1 K} \leq c_0, c_1 \in \mathbb{R}^+$, $c_0 \in (0, 1)$, 则称矩阵 $\boldsymbol{\Phi}$ 满足 RIP, 则重构算法能够精确恢复 K -项稀疏信号。在当 $M = cK \log(N/K)$ 时, 各项服从独立同分布的高斯随机矩阵 $\boldsymbol{\Phi} \sim \mathcal{N}(0, 1/M)$ 满足 RIP 性质。

下面先对测量值进行量化然后通过量化测量值重构原始信号, 并对这一过程中测量值量化失真和由此引起的重构失真进行分析。

2.2 标量量化

令 $C \subset R$ 为一个有限离散集, 称为码本。量化器是 R 到码本 C 的映射, 满足当 $\mathbf{Y} \in R_\omega$ 时, $q(\mathbf{Y}) = \omega \in C$, 其中: ω 为量化电平, R_ω 为对应的量化区间。量化器的性能由率失真函数来描述。令失真测度为平方误差失真, 即最小均方差 (Mean Squared Error, MSE)。对于一个随机信源 $\mathbf{Y} \in R$, 量化器的失

真度为 $D_q = E[\|\mathbf{Y} - q(\mathbf{Y})\|_2^2]$ 。对于一个给定的码本 C , 使欧氏失真测度最小的最佳量化函数为:

$$q^*(\mathbf{Y}) = \arg \min_{\omega \in C} \|\mathbf{Y} - \omega\|_2^2 \quad (8)$$

因此, 相应的量化区间为:

$$R_\omega = \{\mathbf{Y} \subset R \mid \|\mathbf{Y} - \omega\|_2^2 \leq \|\mathbf{Y} - \omega'\|_2^2, \forall \omega' \in C\} \quad (9)$$

码本的失真度为:

$$D(C) = E[\|\mathbf{Y} - q^*(\mathbf{Y})\|_2^2] \quad (10)$$

令 $R := \frac{1}{m} \text{lb}|C|$ 为码本 C 的码率。对于给定的码率 R , 率失真函数为:

$$D^*(R) = \inf_{C: \frac{1}{m} \text{lb}|C| \leq R} D(C) \quad (11)$$

对于测量值的量化, 假设用同一量化器对 \mathbf{Y} 的各个坐标分别进行量化。相应的率失真函数有如下形式:

$$D_{SQ}^*(R) = \inf_{C_{SQ}: \text{lb}|C_{SQ}| \leq R} E_Y \left[\sum_{i=1}^m |Y_i - q_{SQ}(Y_i)|^2 \right] \quad (12)$$

设量化电平为 $\omega_i \in C(i = 1, 2, \dots, 2^R)$, 对应的量化区间为 $R_\omega = [t_{i-1}, t_i]$, 最佳标量量化满足下面的条件。

1) 如果最佳量化器有量化电平 ω_{i-1} 和 ω_i , 那么使失真最小的量化区间阈值为:

$$t_i = \frac{1}{2} (\omega_i + \omega_{i+1}) \quad (13)$$

2) 如果最佳量化器的区间阈值为 t_{i-1} 和 t_i , 那么使失真最小的量化电平为:

$$\omega_i = E[\mathbf{Y}] ; \mathbf{Y} \in [t_{i-1}, t_i] \quad (14)$$

设计量化器码本的 Lloyd 算法就基于以上两个必要条件, Lloyd 算法从一个初始码本开始, 在每一次迭代中通过式(13)来计算阈值, 然后通过式(14)来更新码本。尽管 Lloyd 算法找到的不一定是全局最优的量化区间, 但它给出了局部最优的码本^[8]。

均匀标量量化作为非均匀量化的低复杂度的替换在实际中应用广泛。均匀量化器的码本 $C_{u,SQ} = \{\omega_1 < \omega_2 < \dots < \omega_n\}$, 其中 $n = 2^R$, 对于所有的 $1 < i \neq j \leq n$, 有 $\omega_i - \omega_{i-1} = \omega_j - \omega_{j-1}$ 。相邻量化电平之差称为量化步长, 用 Δ 表示。相应的率失真函数为:

$$D_{u,SQ}^*(R) = \inf_{C_{u,SQ}: \text{lb}|C_{u,SQ}| \leq R} E_Y \left[\sum_{i=1}^m |Y_i - q_{u,SQ}(Y_i)|^2 \right] \quad (15)$$

假设量化码本 C 在测量时已经生成并且固定不变, 下面对测量值量化的率失真函数的渐进性能进行分析。设 $\mathbf{X} \in \mathbb{R}^N$ 是严格 K -项稀疏信号, 其非零项是服从独立同分布的标准高斯随机变量。令 $\boldsymbol{\Phi} = \frac{1}{\sqrt{M}} \mathbf{A} \in \mathbb{R}^{M \times N}$, 其中 \mathbf{A} 的各项均为独立同分布的均值为 0, 方差为 1 的高斯随机矩阵。

2.3 测量值的量化失真分析

令 $T = \{1 \leq i \leq N : X_i \neq 0\}$ 为 \mathbf{X} 的支撑集, 也就是, 当 $i \in T$ 时, $X_i \neq 0$; 当 $i \notin T$ 时, $X_i = 0$ 。对于所有的 $1 \leq i \leq M$ 和满足 $|T| = K$ 的 $T \subset \{1, 2, \dots, N\}$, 很容易得到, $\sum_{j \in T} A_{i,j} X_j$ 的均值和方差分别为 0 和 K 。根据中心极限定理, 当 $(K, M, N) \rightarrow \infty$ 时, $\frac{1}{\sqrt{K}} \sum_{j \in T} A_{i,j} X_j$ 的分布收敛到标准高斯分布, 因此, $\sqrt{\frac{M}{K}} Y_i$ 的分布也收敛到标准高斯分布。

用一个有 2^R 个电平的标量量化器对随机变量 $\sqrt{\frac{M}{K}}Y_i$ 进行量化,有:

$$\begin{aligned} \frac{1}{K}E[\|Y - \hat{Y}\|_2^2] &= \\ \frac{1}{M}\sum_{i=1}^m E\left[\left(\sqrt{\frac{M}{K}}Y_i - \sqrt{\frac{M}{K}}\hat{Y}_i\right)^2\right] &= \\ E\left[\left(\sqrt{\frac{M}{K}}Y_i - \sqrt{\frac{M}{K}}\hat{Y}_i\right)^2\right] \end{aligned} \quad (16)$$

其中最后一个等式代表量化 $\sqrt{\frac{M}{K}}Y_i$ 的失真度。高斯随机变量的非均匀标量量化失真函数为:

$$\lim_{R \rightarrow \infty} 2^{2R} D_g^*(R) = \frac{\pi\sqrt{3}}{2}\delta^2 \quad (17)$$

其中 δ^2 是高斯信源的方差。于是得到测量值非均匀标量量化的渐进率失真极限性能为:

$$\lim_{R \rightarrow \infty} \lim_{(K,m,N) \rightarrow \infty} \frac{2^{2R}}{K} D_{SQ}^*(R) = \lim_{R \rightarrow \infty} 2^{2R} D_g^*(R) = \frac{\pi\sqrt{3}}{2} \quad (18)$$

考虑一个码本为 C_u 的标量量化器, $|C_u| = 2^R$, 用来量化随机变量 $\sqrt{\frac{M}{K}}Y_i$, 高斯随机变量的均匀标量量化器的率失真函数为:

$$\lim_{R \rightarrow \infty} \frac{2^{2R}}{R} D_{u,g}^*(R) = \frac{4}{3}\delta^2 \ln 2 \quad (19)$$

于是得到测量值均匀标量量化的渐进率失真极限性能为:

$$\lim_{R \rightarrow \infty} \lim_{(K,m,N) \rightarrow \infty} \frac{2^{2R}}{KR} D_{u,SQ}^*(R) = \lim_{R \rightarrow \infty} \frac{2^{2R}}{R} D_{u,SQ}^*(R) = \frac{4}{3} \ln 2 \quad (20)$$

其中量化码率的单位是比特/测量数。

从式(17)和式(19)可以看出,当量化码率足够大时,最佳非均匀量化的失真度仅为最佳均匀量化的 $1/R$ 。

对于更一般情况的测量矩阵,测量值的量化失真度取决于其方差,方差的求解是在给定的测量矩阵的行索引和信号的支撑集索引下求平均,从而可得到率失真的下界;而通过设计一个最佳量化器应用于各项测量值能够建立一个统一的上界,从而能得到失真度的界限,在此不再详细说明^{[8][4]}。

2.4 压缩感知重构失真分析

重构失真主要是由测量失真引起的^[9]。基于前面压缩感知测量值量化失真的结论,接下来对由量化误差进一步引起的重构失真进行定性的分析,考察两种具体重构算法:基追踪(BP)算法和子空间追踪(Subspace Pursuit, SP)算法。式(21)给出的量化后的测量值:

$$\hat{Y} = q(Y) = \Phi X + E \quad (21)$$

其中 $E \in \mathbf{R}^M$ 表示量化误差。令 \hat{X} 为从量化测量值 \hat{Y} 重构出的信号,那么重构失真的上界由式(22)给出:

$$\|\mathbf{X} - \hat{\mathbf{X}}\|_2^2 \leq c^2 \|E\|_2^2 \quad (22)$$

其中常数 c 对于不同的重构算法有不同的值。BP算法的界限常数^{[7][3]}为:

$$c_{bp} = \frac{4}{\sqrt{3}(1 - \delta_{4K}) - \sqrt{1 + \delta_{4K}}} \quad (23)$$

而SP算法的界限常数^{[3][10]}为:

$$c_{sp} = \frac{1 + \delta_{3K} + \delta_{3K}^2}{\delta_{3K}(1 - \delta_{3K})} \quad (24)$$

重构失真的下界由下面的推导得到。假设稀疏信号 $\hat{\mathbf{X}}$ 的支撑集 T 能精确重构,则重构信号 $\hat{\mathbf{X}}$ 为:

$$\hat{\mathbf{X}} = (\Phi_T^* \Phi_T)^{-1} \Phi_T^* \hat{\mathbf{Y}} \quad (25)$$

其中 Φ^* 为 Φ 的共轭转置。矩阵 $(\Phi_T^* \Phi_T)^{-1} \Phi_T^*$ 的最小奇异值为 $\frac{\sqrt{1 - \delta_K}}{(1 + \delta_K)}$ 。于是重构失真由下面的下限给出:

$$\begin{aligned} \|\mathbf{X} - \hat{\mathbf{X}}\|_2^2 &\geq \left(\frac{\sqrt{1 - \delta_K}}{1 + \delta_K}\right)^2 \|\mathbf{Y} - \hat{\mathbf{Y}}\|_2^2 = \\ \frac{1 - \delta_K}{(1 + \delta_K)^2} \|\mathbf{E}\|_2^2 \end{aligned} \quad (26)$$

为表示简洁,令 $c_{lb} = \frac{\sqrt{1 - \delta_K}}{(1 + \delta_K)}$ 。

结合前面的结论式(17)、(19)和(22)、(26),可以得出重构失真的渐进界限。当信号严格稀疏,测量矩阵为高斯随机矩阵时,标量量化的重构失真度的界限为:

$$\begin{cases} c_{lb}^2 \frac{\pi\sqrt{3}}{2}, & \text{SP 算法} \\ c_{bp}^2 \frac{\pi\sqrt{3}}{2}, & \text{BP 算法} \end{cases} \quad (27)$$

对于测量矩阵的更一般的情况,结合其测量值的失真度界限,也能得到类似的结论,在此不作详细说明^{[8][5]}。本文的重构失真界限是在文献[3]和文献[7]的基础上得到的,区别在于这里测量值中引入的噪声是量化噪声,并且得到的是量化失真度与码率之间的关系。值得注意的是,式(27)中给出的重构失真的上界在有些情况下不是严格的,这是因为文献[3]给出失真界限的方法是简单地将量化误差看作是高斯噪声,而真正的量化失真是非高斯的而且是与测量值有关的^[11],这有待于今后进一步讨论。下面的仿真实验显示这个上界给出的重构失真度经常过高。

3 仿真实验

本文对于不同的重构算法和不同的量化器进行了大量的仿真实验并比较其性能。对于给定的参数 N 和 K ,测量矩阵 Φ 由独立同分布的高斯随机总体生成,且将其列归一化,信号则是从 $\{1, 2, \dots, N\}$ 中随机均匀地选择势为 K 的支撑集 T ,对应支撑集的各项由标准的独立同分布的高斯分布生成,其余各项置0。

为了测试不同的量化器和重构算法,随机生成 \mathbf{X} 和 Φ 各1000次。每一次都计算测量值 \mathbf{Y} 和其量化值 $\hat{\mathbf{Y}}$ 以及相应的重构信号 $\hat{\mathbf{X}}$ 。在仿真中,本文实验三组参数:第一组, $N = 100$, $K = 10$,量化码率从5 b变化到12 b。第二组, $N = 256$, $K = 6$,量化码率从7 b变化到12 b,以上两组的 M 是从 K 以每10个单位变化到 N ,对这些不同的值来分别查看失真性能,最终选取的 M 能均衡恢复的稀疏模型和估计值的误差。第三组, $N = 256$, $K = 6$, $M = 36$,量化码率从2 b变化到6 b。

图1比较了当 $N = 100$, $K = 10$ 时,直接量化和作为比较基准的自适应量化以及压缩感知测量值经量化后再由L1范数最小化方法^[12]和SP算法重构信号的失真度,图中的结果与式(27)理论推导的结论一致,即重构失真的对数坐标随着量化比特数的增加呈线性增长。随着 R 的增大,直接量化的失真减少量约为0.6 dB/b,自适应的失真减少量约为6 dB/b,而L1范数最小化方法和SP算法重构失真的减少量约

1.4 dB/b ~ 1.6 dB/b, 可见压缩采样后再量化的性能介于直接量化和自适应量化之间, 这说明压缩感知的随机测量引起了不能忽略的失真, 经计算在码率5 b到8 b之间的重构失真都比理论推导的上界值要小得多, 其中SP算法在5 b处的重构失真比理论值约小9 dB, 在9 b到12 b之间的实际失真和理论给出的上界值相当。

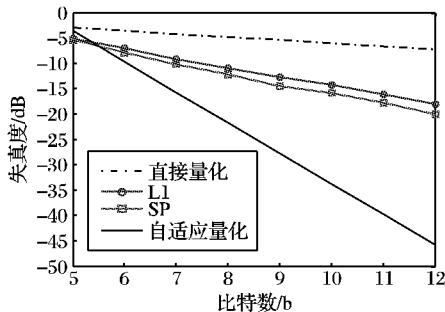


图1 当 $N = 100, K = 10$ 时, 不同量化策略的性能对比

图2 比较了当 $N = 256, K = 6$ 时, 直接量化和自适应量化以及 L1 范数最小化方法和 SP 算法下的压缩感知量化的失真度, 当稀疏度增大时, 压缩采样量化的失真度和自适应量化失真度之间的差距缩小, 自适应的失真减小量仍约为 6 dB/b, 而重构算法失真的减小量达到了 3 dB/b, 这是因为当稀疏度增大自适应量化器需要更多比特数来传输子空间的索引, 而压缩感知所需的测量数没有相应增加。

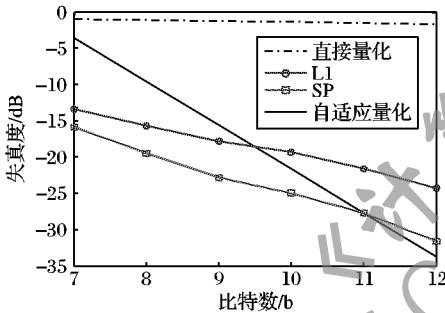


图2 当 $N = 256, K = 6$ 时, 不同量化策略的性能对比

图3 比较了均匀量化器和非均匀量化器的测量失真度, 当所给量化码率增加, 均匀和非均匀量化的失真度之间的差距增大。

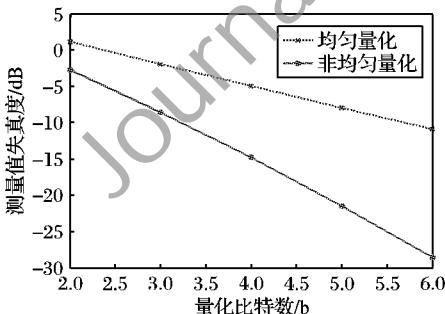


图3 测量值的量化失真

图4 比较了 L1 范数最小化方法和 SP 算法在实际重构中的失真度, 又分别给出包括均匀量化和非均匀量化两种情况的对比, 结果显示在码率 7 b 到 10 b 之间的重构失真都比理论给出的上界值要小, 其中在码率为 7 b 处, 经非均匀量化后由 SP 算法恢复信号的实际重构失真比理论值小约 5 dB, 11 b 和 12 b 处的实际失真和理论给出的相当。当所给量化码率增加, L1 范数最小化方法和 SP 的重构失真度之间的差距增大, 而 SP 算法的计算复杂度远小于 L1 范数最小化方法, 表明 SP 算法用于量化压缩感知的信号重构具有明显的优势。

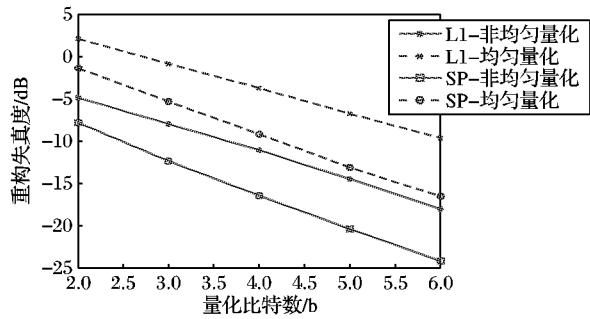


图4 BP 算法和 SP 算法重构失真

4 结语

本文在理论上给出了压缩感知量化率失真性能的极限, 并通过具体的实验显示随机测量会引起很大的失真, 但当稀疏度增加时, 压缩感知量化的性能可以达到甚至超过自适应量化的性能。由此可知, 量化压缩感知可以利用信号的稀疏度来缩小和自适应量化之间的差距。本文还比较了两种算法引起的重构失真, 表明 SP 算法比 BP 算法更适用于量化压缩感知的信号重构。不同的重构算法应用于量化压缩感知的性能还有待进一步探讨。

参考文献:

- [1] DONOHO D. Compressed sensing [J]. IEEE Transactions on Information Theory, 2006, 52(4): 1289 – 1306.
- [2] CANDES E, ROMBERG J, TAO T. Robust uncertainty principles: exact signal reconstruction from highly incomplete frequency information [J]. IEEE Transactions on Information Theory, 2006, 52(2): 489 – 509.
- [3] DAI W, MILENKOVIC O. Subspace pursuit for compressive sensing signal reconstruction [J]. IEEE Transactions on Information Theory, 2009, 55(5): 2230 – 2249.
- [4] CANDES E, ROMBERG J. Encoding the l_p ball from limited measurements [C]// Proceedings of the 2006 Data Compression Conference. Washington, DC: IEEE Computer Society, 2006: 33 – 42.
- [5] BOUFOUNOS P, BARANIUK R. Quantization of sparse representations [C]// Proceedings of the 2007 Data Compression Conference. Washington, DC: IEEE Computer Society, 2007: 378 – 378.
- [6] GOYAL V, FLETCHER A, RANGAN S. Compressive sampling and lossy compression [J]. IEEE Signal Processing Magazine, 2008, 25(2): 48 – 56.
- [7] CANDES E, ROMBERG J, TAO T. Stable signal recovery from incomplete and inaccurate measurements [J]. Communications on Pure and Applied Mathematics, 2006, 59(8): 1207 – 1223.
- [8] DAI WEI, MILENKOVIC O. Information theoretical and algorithmic approaches to quantized compressive sensing [J]. IEEE Transactions on Communications, 2011, 59(7): 1857 – 1866.
- [9] BOUFOUNOS P. Reconstruction of sparse signals from distorted randomized measurements [C]// International Conference on Acoustics Speech and Signal Processing. Piscataway: IEEE Press, 2010: 3998 – 4001.
- [10] TROPP J, NEEDELL D, VERSHYNIN R. Iterative signal recovery from incomplete and inaccurate measurements [J]. Applied and Computational Harmonic Analysis, 2008, 26(3): 301 – 321.
- [11] JACQUES L, HAMMOND D, FAFILI M. Dequantizing compressed sensing: when oversampling and non-Gaussian constraints combine [J]. IEEE Transactions on Information Theory, 2011, 57(1): 559 – 571.
- [12] CANDES E, ROMBERG J, TAO T. L1-magic [EB/OL]. [2012-05-01]. <http://users.ece.gatech.edu/~justin/l1magic/>.