文章编号:1001－9081(2013)04－1036－03　　doi:10.3724/SP.J.1087.2013.01036

3 元 n 立方网络的 2 阶超连通性

赵元庆[1*],金显华[2]
(1.安阳师范学院 计算机与信息工程学院,河南 安阳 455002; 2.安阳师范学院 公共计算机教学部,河南 安阳 455002)
(*通信作者电子邮箱 zyq7643@163.com)

摘　要:为了度量以 3 元 n 立方网络为底层拓扑结构的并行与分布式系统的连通性,通过构造其 2 阶超割的方法,计算出当 n 不小于 2 时,3 元 n 立方网络的 2 阶超连通度是 $6n-7$。证明了对于以 3 元 n 立方网络为底层拓扑结构的并行与分布式计算机系统,当有不超过 $6n-8$ 个节点发生故障且每个连通分支至少还有 3 个健康的节点时,该并行与分布式系统的任意两个节点之间仍然有一条无故障的通信线路。

关键词:互连网络;3 元 n 立方;容错;连通度;超连通度
中图分类号:TP393　　**文献标志码**:A

Second-extraconnectivity of 3-ary n -cube networks

ZHAO Yuanqing[1*], JIN Xianhua[2]
(1. *School of Computer and Information Engineering, Anyang Normal University, Anyang Henan 455002, China*;
2. *Computer Teaching Department, Anyang Normal University, Anyang Henan 455002, China*)

Abstract: To evaluate the connectivity of parallel and distributed computer systems which take 3-ary n-cubes as underlying topologies, by constructing the extra 2-cut of 3-ary n-cubes, the second-extraconnectivity of 3-ary n-cubes was proved to be equal to $6n-7$ for an arbitrary integer n no less than 2. The result shows that for any two nodes of the parallel and distributed system which take the 3-ary n-cube as underlying topology, there is at least a fault-free path connecting them if the number of the faulty nodes in the system does not exceed $6n-8$ and each connected branch still has at least three healthy nodes.

Key words: interconnection network; 3-ary n- cube; fault tolerance; connectivity; extraconnectivity

0　引言

并行与分布式处理机系统通常以某个互连网络作为其底层的基础拓扑模型。互连网络可以用一个无向图 $G=(V,E)$ 表示。此时,V 中的每个节点表示一个处理器,E 中的每条边表示两个相应处理器之间的直接通信联系。在实际的系统中,处理器或通信线路出现故障是在所难免的,从而互联网络的容错能力的度量[1] 成为一个颇具吸引力的研究方向。连通度是度量网络容错能力的一个重要的参数。网络 G 的连通度是删除之后使得 G 不再连通的最小节点集合的元素个数。这个参数在度量网络的容错能力时有一个严重的弊端,即它过多的考虑和一个节点关联的所有边同时发生故障的情况。然而,在实际的系统中发生这种情况的概率是微乎其微的。为了弥补这一不足,Harary[2] 提出用条件连通度来度量的网络的容错能力,这一思想得到了广泛的认可。超连通度作为条件连通度的一种得到了较为深入的研究[3-7]。

m 元 n 立方网络是并行与分布式系统颇具吸引力的互联网络拓扑结构[8],以它作为模型以制造了诸如 iWarp、Cray T3D、Cray T3E 和 IBM Blue Gene[9] 等许多并行与分布式系统。Day[10] 证明了当 n 大于 1 时,4 元 n 立方的 1 阶超连通度为 $4n-2$;进一步地,当 k 大于 4 时,k 元 n 立方网络的 1 阶超连通度为 $4n-3$。Yang 等[11] 研究了 2 元 n 立方网络的 2 阶超连通性,他们证明了当 n 不大于 5 时 2 元 n 立方网络的 2 阶超连通度为 $n(n-1)/2$;当 n 大于 5 时,2 元 n 立方网络的 2 阶超连通度为 $3n-5$。Heish 等[12] 证明了当 k 大于 3 且 n 大于 4 时,k 元 n 立方网络的 2 阶超连通度为 $6n-5$。本文将研究 3 元 n 立方网络的 2 阶超连通性,并证明当 n 大于 2 时,3 元 n 立方网络的 2 阶超连通度为 $6n-7$。

1　准备知识

本章先介绍一些理解本文内容所必需的一些知识。下文所说的图均指无环无重边的无向图。文中没有定义而直接使用的图论术语和记号参见文献[13]。

1.1　重要术语

给定一个无向图 G,对于 G 的一个定点 v,G 中和 v 相邻的顶点的集合称为 v 在 G 中的邻集,记作 $N_G(v)$。设 H 是图 G 的子图,称

$$N_G(H)=\Big(\bigcup_{v\in V(H)}N_G(v)\Big)\backslash V(H)$$

为 H 在 G 中的邻集。

设 F 是 G 中被破坏的顶点的集合,则称 F 中的顶点是故障的;$V(G)\backslash F$ 中的顶点是健康的。

1.2　m 元 n 立方网络

m 元 n 立方 $Q_n^m(m\geqslant 2,\ n\geqslant 1)$ 是一个包含 m^n 个顶点的无向图,每个顶点形如 $u=u_1u_2\cdots u_n$,其中对于所有的 $1\leqslant i\leqslant n$ 均有 $0\leqslant u_i\leqslant k-1$ 成立。两个顶点 $u=u_1u_2\cdots u_n$ 和 $v=v_1v_2\cdots v_n$ 之间有一条边当且仅当存在一个整数 $j\in\{1,2,\cdots,$

收稿日期:2012-10-09;**修回日期**:2012-11-27。　**基金项目**:国家自然科学基金资助项目(41001251)。
作者简介:赵元庆(1976－),男,黑龙江绥化人,讲师,硕士,主要研究方向:网络优化、智能计算;　金显华(1979－),女,河南信阳人,讲师,硕士,主要研究方向:网络优化。

$n\}$ 使得 $u_j = v_j \pm 1$(模 k) 且 $u_l = v_l$，其中 $l \in \{1,2,\cdots,n\}\setminus\{j\}$。这样的边 (u,v) 称为一条 j 维边。

在下文中，所有上、下标中的加法均对 3 取模。

Q_n^3 是 $2n$- 正则的，点对称的和边对称的。对于任一整数 $d \in \{1,2,\cdots,n\}$，Q_n^3 由 3 个不交的 Q_{n-1}^3($Q[0]$，$Q[1]$，$Q[2]$) 组成，其中，对应顶点用 d 维边组成的三角形相连。

对于 $i \in \{0,1,2\}$，将 $E(Q[i])$ 和 $V(Q[i])$ 分别简记为 E_i 和 V_i。集合 $F \subseteq V(Q_n^3)$ 在 $Q[i]$ 中的限制记作 F_i，即 $F_i = F \cap V(Q_n^3)$。

设 $u^i = u_1u_2\cdots u_{d-1}iu_{d+1}\cdots u_n$ 为 $Q[i]$ 的一个顶点。称 $u^{i-1} = u_1u_2\cdots u_{d-1}(i-1 \text{ 模 } 3)u_{d+1}\cdots u_n$ 和 $u^{i+1} = u_1u_2\cdots u_{d-1}(i+1 \text{ 模 } 3)u_{d+1}\cdots u_n$ 分别为 u^i 的左邻和右邻。显然，$(u^{i-1}, u^i, u^{i+1}, u^{i-1})$ 是一个三角形且 每个顶点恰有一个左邻和右邻。$Q[i]$ 中两个不同的顶点，其左邻不同，右邻也不同。

1.3　超连通度

设 G 是一个连通无向图，g 是一个非负整数，集合 $F \subset V(G)$。若 $G-F$ 的每个连通分支的顶点个数均大于 g，则称 F 是 G 的一个 g 阶超集；进一步地，若 $G-F$ 不连通，则称 F 是 G 的一个 g 阶超割；G 的一个元素最少的 g 阶超割的元素的个数称为 G 的 g 阶超连通度，记作 $\kappa_g(G)$。

2　Q_n^3 的 2 阶超连通度

本章将研究 3 元 n 立方的 2 阶超连通性。不难看出 Q_1^3 没有 2 阶超割；而 3 元 2 立方的 2 阶超连通度为 4，接下来本文证明当 $n \geqslant 3$ 时，3 元 n 立方网络的 2 阶超连通度 $\kappa_2(Q_n^3) = 6n-7$。本章的剩余部分出现的 Q_n^3 均指 $n \geqslant 3$ 时的 3 元 n 立方且 Q_n^3 看成是由 3 个不交的 Q_{n-1}^3，即 $Q[0]$，$Q[1]$，$Q[2]$ 组成，其中对应的顶点由 1 维边组成的三角形连接(如图 1 所示)。首先证明几个重要的引理。

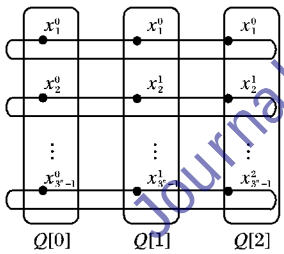

图 1　3 元 n 立方网络沿第 1 维的划分

引理 1　设 u 和 v 是 Q_n^3 的两个不同的顶点。若 u 和 v 相邻，则 u 和 v 至多有一个共同的邻点；否则，u 和 v 至多有两个共同邻点。

证明　对 n 进行归纳。显然，引理 1 对 Q_1^3 成立。假设该引理对 $Q_{n-1}^3(n \geqslant 2)$ 成立。接下来，只需证明引理对 Q_n^3 也成立。

设 $u \in V_i$，$v \in V_j$ 是两个不同的顶点。

首先，假设 $i = j$。不失一般性，设 $i = j = 0$。由归纳假设，若 u 和 v 相邻，则 u 和 v 在 $Q[0]$ 中至多有一个公共邻点；否则，它们在 $Q[0]$ 中至多有两个公共邻点。注意，$Q[0]$ 的任一顶点除了在 $Q[0]$ 中的 $2n-2$ 个邻点之外还恰有两个邻点。结合 $u^1 \neq v^1, u^2 \neq v^2$ 知，若 u 和 v 相邻，则 u 和 v 在 Q_n^3 中至多有一个公共邻点；否则，它们在 Q_n^3 中至多有两个公共邻点。

其次，假设 $i \neq j$。不失一般性，设 $i = 0$，$j = 1$。

若 u 和 v 相邻，则若 u 是 v 的左邻。不难看出，对于任意的 $r \in \{0,1\}$，u 和 v 在 $Q[r]$ 中没有公共邻点。因此，u 和 v 在 Q_n^3 中只有一个公共邻点 u^2。

若 u 和 u^1 均不和 v 相邻，则 u 和 v 在 $Q[2]$ 中没有公共邻点且 v^0 和 u 不相邻。因此，u 和 v 在 Q_n^3 中没有公共邻点。

若 u 和 v 相邻，但 u^1 和 v 相邻，则 u 和 v 在 $Q[2]$ 中没有公共邻点且 v^0 和 u 相邻。因此，u 和 v 在 Q_n^3 中恰有两个公共邻点 v^0 和 u^1。　证毕。

引理 2　设 $\kappa_2(Q_n^3)$ 是 3 元 n 立方网络的 2 阶超连通度。则 $\kappa_2(Q_n^3) \leqslant 6n-7$。

证明　选取 Q_n^3 中的三个顶点 $x_1^0 = 000\cdots0, x_2^0 = 010\cdots0$ 及 $x_2^1 = 110\cdots0$。

显然，$P = (x_1^0, x_2^0, x_2^1)$ 是 Q_n^3 中的一个三角形。设

$$F = N_{Q_n^3}(P) =$$
$$N_{Q_n^3}(x_1^0) \cup N_{Q_n^3}(x_2^0) \cup N_{Q_n^3}(x_2^1) \setminus \{x_1^0, x_2^0, x_2^1\}$$

是故障顶点的集合。当 $n = 3$ 时，容易验证 F 是 Q_3^3 的一个 2 阶超割且 $|F| = 11 = 6 \times 3 - 7$。

接下来，考虑 $n \geqslant 4$ 的情况。x_1^0 和 x_2^0 有一个公共邻点 $x_3^0 = 020\cdots0$，x_2^0 和 x_2^1 有一个公共邻点 $x_2^2 = 210\cdots0$，x_1^0 和 x_2^1 有两个公共邻点 $x_1^1 = 210\cdots0$ 和 x_2^0。结合引理 1 可知，x_1^0 和 x_2^0，x_2^0 和 x_2^1，以及 x_1^0 和 x_2^1 在 $V(Q_n^3)\setminus V(P)$ 中均恰有一个公共邻点。

注意，Q_n^3 是 $2n$- 正则的。于是，

$$|F| = |N_{Q_n^3}(P)| =$$
$$|N_{Q_n^3}(x_1^0) \cup N_{Q_n^3}(x_2^0) \cup N_{Q_n^3}(x_2^1) \setminus \{x_1^0, x_2^0, x_2^1\}| =$$
$$2(2n-1) + (2n-2) - 3 = 6n-7$$

又因为 Q_n^3 有 3^n 个顶点。所以对于任一整数 $n \geqslant 4$ 均有

$$|V(Q_n^3)| - |F| = 3^n - (6n-6) > 3 = |V(P)|$$

因此，$Q_n^3 - F$ 至少有两个连通分支。故 $Q_n^3 - F$ 是不连通的。

显然，P 中的顶点数目大于 2。接下来证明 $Q_n^3 - F - V(P)$ 的每个连通分支均多于两个顶点即可。若对于任意的 $u \in V(Q_n^3)\setminus(F \cup V(C))$ 至少有两个健康的邻点，则 $Q_n^3 - F - V(P)$ 的每个连通分支必定均多于两个顶点即可。所以只需证明任意的 $u \in V(Q_n^3)\setminus(F \cup V(C))$ 至少有两个健康的邻点。

声明 1　u 至多有 6 个故障邻点。

反证法证明该声明。假设 u 有 7 个或以上的故障邻点。不妨设 $u_1, u_2, \cdots, u_6, u_7$ 是 u 的 7 个故障邻点。显然，对于任一整数 $1 \leqslant i \leqslant 7$ 均有成立 $u_i \in N(P)$。由于 $\lceil 7/|V(P)| \rceil = \lceil 7/3 \rceil = 3$，故而存在一个顶点 $v \in V(P)$ 使得 v 在 $\{u_1, u_2, \cdots, u_7\}$ 中有 3 个邻点。因此，u 和 v 有 3 个公共邻点，与引理 1 矛盾。因此，u 至多有 6 个邻点。

注意，u 有 $2n$ 个邻点。集合声明 1 可知，u 有至少 $2n-6 \geqslant 2 \times 4 - 6 = 2$ 个健康的邻点。因此，F 是 Q_n^3 的一个 2 阶超割。故而 $\kappa_2(Q_n^3) \leqslant |F| = 6n-7$。　证毕。

引理 3　设 F' 是 Q_n^3 的一个元素个数不超过 $6n-8$ 的 2 阶超集，则 $Q_n^3 - F'$ 是连通的。

证明　必定存在一个整数 $j \in \{0,1,2\}$ 使得 $|F'_j| \leqslant 2n-3$，否则

$$|F'_0| + |F'_1| + |F'_2| \geqslant 3 \times (2n-2) = 6n-7$$

与题设 $|F'| \leqslant 6n-8$ 矛盾。不失一般性，假设 $|F'_0| \leqslant 2n-3$。由于 Q_n^3 的连通度是 $2n$，所以 $Q[0] - F'_0$ 是连通的。下面只需证明 $Q_n^3 - V_0 - F'_1 - F'_2$ 的任一连通分支均和 $Q[0] - F'_0$ 连通即可。

反证。假设 $Q_n^3 - V_0 - F'_1 - F'_2$ 存在一个连通分支 C,使得 C 和 $Q[0] - F'_0$ 不相连。注意,C 中的顶点个数多于两个。设 H 是 C 中具有三个顶点的连通子图。分两种情形讨论。

情形1 C 是一个三角形。

在此情形下,H 被完全包含在 $Q[1]$ 或 $Q[2]$ 中。不失一般性,假设 H 被完全包含在 $Q[1]$。此时有

$$|N_{Q[1]}(H)| = 3 \times (2(n-1) - 2) = 6n - 12$$

又因为 H 与 $Q[0] - F'_0$ 不连通,所以对于任一顶点 $v^1 \in N_{Q[1]}(H)$,u^1 是故障的,或 v^1 的左邻 v^0 是故障的。结合"H 中每个顶点的左邻都是故障的"这一事实可得

$$|N_{Q[1]}(H)| + 2|V(H)| \leq |F'|$$

而

$$|N_{Q[1]}(H)| + 2|V(H)| = (6n - 12) + 2 \times 3 = 6n - 6$$

所以 $6n - 6 \leq |F'| \leq 6n - 8$,矛盾。

情形2 C 是一条长为2的路。

令 $H = (u,v,w)$。由引理1知,u 和 v,v 和 w 在 $V_1 \cup V_2$ 中均至多有一个公共顶点;v 和 w 在 $V_1 \cup V_2 \setminus \{v^2\}$ 中至多有一个公共顶点。注意,H 在 $Q_n^3 - V_0$ 中有 $2n-1$ 个邻点。于是,

$$|N_{Q_n^3-V_0}(H)| \leq 2(2n-2) + (2n-3) - 3 = 6n - 13$$

又因为 H 和 $Q[0] - F'_0$ 不相连。因此,对于任一顶点 $x \in N_{Q_n^3-V_0}(H)$,x 是故障的,或者 x 在 $Q[0]$ 中的邻点是故障的。结合 H 中的任一顶点的邻点都是故障的可得

$$|N_{Q_n^3-V_0}(H)| + 2|V(H)| \leq |F'|$$

而

$$|N_{Q_n^3-V_0}(H)| + 2|V(H)| = (6n - 13) + 2 \times 3 = 6n - 7$$

所以 $6n - 7 \leq |F'| \leq 6n - 8$,矛盾。 证毕。

定理1 设 $n \geq 3$ 是一个整数,$\kappa_2(Q_n^3)$ 是3元 n 立方网络的2阶超连通度,则 $\kappa_2(Q_n^3) = 6n - 7$。

证明 由引理2知 $\kappa_2(Q_n^3) \leq |F| = 6n - 7$,接下来只需证明 $\kappa_2(Q_n^3) \geq 6n - 7$。证明对于 Q_n^3 的任一元素个数不多于 $6n - 8$ 的2阶超集 F',$Q_n^3 - F'$ 是连通的即可。设 F' 是 Q_n^3 的任一元素个数不多于 $6n-8$ 的2阶超集,由引理3知,$Q_n^3 - F'$ 是连通的。 证毕。

3 结语

底层拓扑结构的容错能力与可靠性是设计并行与分布式系统时需要考虑的重要因素。超连通度是度量网络拓扑的容错能力的主要参数。本文研究了3元 n 立方网络的2阶超连通性,证明了当 $n \geq 3$ 时,3元 n 立方网络的2阶超连通度为 $6n-7$。也就是说,在每个连通分支都不是一个孤立点也不是孤立边的前提下,一个对手要使得3元 n 立方网络中存在两个不连通的节点,则他需要至少破坏掉 $6n-7$ 个节点。

确定当 $g \geq 3$ 时,m 元 n 立方网络的 g 阶超连通度是值得进一步研究的方向。

参考文献:

[1] WALKER D, LATIFI S. Improving bounds on link failure tolerance of the star graph [J]. Information Sciences, 2010, 180(13): 2571 -2575.

[2] HARARY F. Conditional connectivity [J]. Networks, 1983, 13 (3): 347 -357.

[3] BALLBUENA C, CERA M, DIÁEZ A, *et al*. Diameter-girth sufficient conditions for optimal extraconnectivity in graphs [J]. Discrete Mathematics, 2008, 308(16): 3526 -3536.

[4] WANG S Y, YUAN J, LIU A X. k-restricted edge connectivity for some interconnection networks [J]. Applied Mathematics and Computation, 2008, 201(1/2): 587 -596.

[5] XU J M, ZHU Q, XU M. Fault-tolerant analysis of a class of networks [J]. Information Processing Letters, 2007, 103(6): 222 -226.

[6] XU J M, WANG J W, WANG W W. On super and restricted connectivity of some interconnection networks [J]. Ars Combinatoria, 2010, 94(1): 25 -32.

[7] 王建伟,徐俊明. 变形超立方体网络的可靠性分析[J]. 中国科学技术大学学报, 2009, 39(12): 1248 -1252.

[8] STEWART I A, XIANG Y H. Bipanconnectivity and bipancyclicity in *k*- ary *n*- cubes [J]. IEEE Transactions on Parallel and Distributed Systems, 2009, 20(1): 25 -33.

[9] ADIGA N R, BLUMRICH M A, CHEN D, *et al*. Blue Gene/L torus interconnection network [J]. IBM Journal of Research and Development, 2005, 49(2): 265 -276.

[10] DAY K. The conditional node connectivity of the *k*- ary *n*- cube [J]. Journal of Interconnection Networks, 2004, 5(1): 13 -26.

[11] YANG W H, MENG J X. Extraconnectivity of hypercubes [J]. Applied Mathematics Letters, 2009, 22(6): 887 -891.

[12] HSIEH S Y, CHANG Y H. Extraconnectivity of *k*- ary *n*- cube networks [J]. Theoretical Computer Science, 2012, 443(6): 63 -69.

[13] BONDY J A, MURTY U S R. Graph theory[M]. New York: Springer Press, 2008.

(上接第966页)

[5] 胡洁. 细菌觅食优化算法的改进及应用研究[D]. 武汉: 武汉理工大学, 2012.

[6] 吕振肃, 侯志荣. 自适应变异的粒子群优化算法[J]. 电子学报, 2004, 32(3): 416 -420.

[7] 王凌. 智能优化算法及其应用[M]. 北京: 清华大学出版社, 2001: 148 -149.

[8] van den BERGH F. An analysis of particles swarm optimizers[D]. Pretoria, South Africa: University of Pretoria, 2002.

[9] 林川, 冯全源. 一种新的自适应粒子群优化算法[J]. 计算机工程, 2008, 34(7): 181 -183.

[10] ANGELINE P J. Evolutionary optimization versus particles swarm optimization: philosophy and performance differences [C]// EP'98: Proceedings of the 7th International Conference on Evolutionary Programming VII. Berlin: Springer-Verlag, 1998: 601 -610.

[11] CLERC M, KENNEDY J. The particle swarm: explosion stability and convergence in a multi-dimensional complex space[J]. IEEE Transactions on Evolution Computation, 2002, 6(1): 58 -73.

[12] 阳春华, 谷丽姗, 桂卫华. 自适应变异的粒子群优化算法[J]. 计算机工程, 2008, 34(16): 188 -190.