

基于分数阶变分的图像泊松去噪模型

胡学刚^{1,2}, 李 好^{1*}

(1. 重庆邮电大学 计算机科学与技术学院, 重庆 400065; 2. 重庆邮电大学 系统理论研究及其应用中心, 重庆 400065)

(* 通信作者电子邮箱 7liyu7@gmail.com)

摘 要: 为了进一步提高图像去噪的效果, 针对图像泊松噪声的特点, 提出了一种有效的基于分数阶导数的图像泊松去噪的变分模型。该模型继承了全变分模型去噪效果良好的优点, 并且很好地利用分数阶微分特有的幅频特性优势, 在处理图像细节和纹理特征方面很好的保留了图像的“弱信息”。数值实验结果表明, 该分数阶变分方法的去噪效果优于传统的整数阶变分方法, 能很好地保留图像的边缘细节特征。

关键词: 泊松噪声; 全变分方法; 分数阶微分; 图像去噪; 边缘细节

中图分类号: TP391.41 **文献标志码:** A

Improved image poisson denoising model based on fractional variation

HU Xuegang^{1,2}, LI Yu^{1*}

(1. College of Computer Science and Technology, Chongqing University of Posts and Telecommunications, Chongqing 400065, China;

2. Research Center of System Science, Chongqing University of Posts and Telecommunications, Chongqing 400065, China)

Abstract: An effective Poisson denoising model based on fractional derivative for images with Poisson noise was proposed to improve the denoising effect. The model inherited the advantages of total variation model to eliminate noise. Furthermore, due to the advantage of property of amplitude-frequency in fractional differentiation, it can protect "weak information" well in processing specifics of image and texture characteristics. The numerical experimental results demonstrate that the proposed method of fractional variation to eliminate noise is better than traditional integer variation and can protect the detail characteristics of image edges.

Key words: Poisson noise; Total Variation (TV); fractional differentiation; image denoising; edge detail

0 引言

在图像的生成和传输中大量噪声的加入会严重影响图像的视觉效果。传统的去噪算法存在边缘保持性差, 易产生阶梯效应等缺点。近年来, 基于变分^[1-2]、插值^[3]、小波^[4]和偏微分方程的去噪方法以及某几种方法相结合的平滑算法广泛应用于图像去噪中^[5], 其中基于变分理论的全变分模型 (Total Variation, TV) 去噪方法在图像去噪领域备受关注^[1-2,6]。事实上, TV 模型基于有界全变分函数空间, 利用该函数空间的不连续性对应图像中物体的边缘的特性, 该类模型在去除噪声的同时能较好地保持图像边缘。

然而, 在对噪声污染图像平滑过程中保留图像边缘和抑制噪声始终是一对矛盾。标准的 TV 模型在处理纹理图像时易丢失纹理细节信息, 且易出现“阶梯”效应。对此人们提出了很多改进的 TV 模型, 如 Gillboa 等^[7]引入了一个空间变换项, 以保护去噪图像中的纹理部分; 黎芳等^[8]提出将 TV 模型和四阶偏微分模型相结合用于去噪以减少阶梯效应, 但运算量较大、耗时较长; 孙玉宝等^[9]引进具有稀疏性正则项的全变分模型, 对被泊松噪声 (Poisson Noise) 污染的图像具有良好的复原效果, 保持了较清晰的图像边缘, 但容易丢失纹理细节信息, 有时候甚至会出现“阶梯效应”。文献[10]对 TV 模型中的忠诚项进行了改进, 提出的新模型也具有较好的去噪效果, 明显缓解了图像模糊, 大大地改善了去噪图像的视觉效果。

在光量子计数成像系统中, 如 CCD (Charge-coupled Device) 固态光电检测器阵列、天文成像、计算 X 射线成像 (Computed Radiography, CR)、荧光共焦显微成像等, 获取的图像往往出现泊松噪声^[9]。诸多算法如维纳滤波、小波阈值收缩均可应用于去除泊松噪声^[11-12]。文献[9]在 Bayesian-MAP 框架下, 采用负 log 泊松似然函数作为保真项, 应用图像在冗余字典下稀疏性约束作为正则项, 建立了泊松噪声图像去噪算法。该算法无需进行 VS 变换 (Variance Stabilization Transform), 虽然它能够直接处理泊松噪声, 但处理泊松与高斯的复合噪声并不理想。

近年来, 分数阶微分被从数学领域引入到图像处理领域, 成为一个新兴的图像处理的发展方向, 得到了学者们的广泛关注^[13]。从数学性质上讲, 对纹理结构的本身特性而言, 纹理是具有“弱导数” (即分数阶导数) 特性的信息, 整数阶微分算子并不适合于处理这类具有弱导数的信息。目前基于变分偏向分方程 (Partial Differential Equation, PDE) 的图像处理方法, 绝大多数都还是基于整数阶导数建立起来的, 近年来, 利用分数阶导数的图像处理方法逐渐在图像处理领域中引起了重视。

本文从分数阶导数出发, 提出了一种新的基于分数阶变分的图像泊松去噪模型。模拟实验表明本模型具有良好的去噪效果, 而且适合于处理具有“弱导数”特性的信息, 能很好地保护图像的边缘细节特征。

收稿日期: 2012-10-11; 修回日期: 2012-11-29。

基金项目: 国家自然科学基金资助项目 (11071266); 重庆市教委科研基金资助项目 (KJ100505)。

作者简介: 胡学刚 (1965 -), 男, 重庆人, 教授, 博士, 主要研究方向: 偏微分方程、数字图像处理; 李好 (1988 -), 女, 四川巴中人, 硕士研究生, 主要研究方向: 图形图像处理。

1 基于分数阶变分的图像泊松去噪模型

1.1 新模型的导出

已知 f 是观察到的退化图像, u 是原始图像, 它们的大小都是 $N \times N$ 。本文采用贝叶斯方法从 f 中找到原始图像 u 的逼近。设 u 的后验概率为 $P(u|f)$, 由于 $P(f)$ 是一个固定值, 根据贝叶斯定理

$$P(u|f) = \frac{P(f|u)P(u)}{P(f)} \quad (1)$$

可知, 极大化 $P(u|f)$ 相当于极大化 $P(f|u)P(u)$ 。式(1)两边取对数, 有

$$\log P(u|f) = \log P(f|u) + \log P(u) - \log P(f) \quad (2)$$

根据文献[14]和[15], 当退化图像的噪声服从泊松分布并假定像素之间互相独立时, 有

$$P(f|u) = \prod_{i,j} \frac{e^{-u(i,j)} \cdot u(i,j)^{f(i,j)}}{f(i,j)!} \quad (3)$$

由式(2)和(3)可知, 极大化 $P(u|f)$ 相当于对式(4)取极小值

$$\sum_{i,j} [u(i,j) - f(i,j) \log u(i,j) + \log(f(i,j)!)] - \log(P(u)) - \log P(f) \quad (4)$$

由于 $(\log(f(i,j)!))$ 和 $\log P(f)$ 为常量, 式(4)取极小值等价于式(5)取极小值

$$-\log(P(u)) + \sum_{i,j} [u(i,j) - f(i,j) \log u(i,j)] \quad (5)$$

令 $P(u) = e^{-\int \nabla^\alpha u}$, 其中 $\nabla^\alpha u$ 是离散分数阶梯度, 即 $\nabla^\alpha u = (\nabla_x^\alpha u, \nabla_y^\alpha u)$, $|\nabla^\alpha u| = \sqrt{(\nabla_x^\alpha)^2 + (\nabla_y^\alpha)^2}$, 这里 α 是分数阶阶数, 本文取 $\alpha = 1.3$ 。利用式(5), 便得到新的 TV 正则化模型:

$$u = \arg \min_u \left\{ \int_\Omega |\nabla^\alpha u| + \lambda \int_\Omega (u - f \log u) \right\} \quad (6)$$

其中: 右侧的第一项 $\int_\Omega |\nabla^\alpha u|$ 是正则项 (记为 $J(u)$), 它保证恢复图像的光滑性, 以去除噪声并保留图像的纹理细节特征, 同时保证该极小化问题是良态的; 右侧的第二项 $\int_\Omega (u - f \log u)$ 是忠诚项, 它保证恢复图像 u 保留观察图像 f 的主要特征; λ 是尺度参数, 起平衡正则项和忠诚项的作用。

1.2 相关理论分析

模型(6)是一个泛函极值问题, 该模型存在唯一的解且满足如下的 Euler-Lagrange 方程:

$$\delta(J(u)) + \lambda(1 - f/u) = 0 \quad (7)$$

其中:

$$\delta(J(u)) = \frac{d}{d\tau} \int_\Omega |\nabla^\alpha u + \tau \nabla^\alpha \eta|_{\tau=0} = \int_\Omega \frac{\nabla_x^\alpha u}{|\nabla^\alpha u|} \nabla_x^\alpha \eta + \frac{\nabla_y^\alpha u}{|\nabla^\alpha u|} \nabla_y^\alpha \eta$$

利用帕塞瓦尔等式^[16]和傅里叶变换, 得到

$$\delta(J(u)) = \operatorname{Re} \left\{ (-1)^\alpha \cdot \left[\nabla_x^\alpha \left(\frac{\nabla_x^\alpha u}{|\nabla^\alpha u|} \right) + \nabla_y^\alpha \left(\frac{\nabla_y^\alpha u}{|\nabla^\alpha u|} \right) \right] \right\} \quad (8)$$

将式(8)代入式(7), 模型(6)的 Euler-Lagrange 方程可写为:

$$\operatorname{Re} \left\{ (-1)^\alpha \cdot \left[\nabla_x^\alpha \left(\frac{\nabla_x^\alpha u}{|\nabla^\alpha u|} \right) + \nabla_y^\alpha \left(\frac{\nabla_y^\alpha u}{|\nabla^\alpha u|} \right) \right] \right\} + \lambda \left(1 - \frac{f}{u} \right) = 0 \quad (9)$$

利用梯度下降法求解式(9), 得到如下的非线性分数阶

偏微分方程:

$$\frac{\partial u}{\partial t} = -\operatorname{Re} \left\{ (-1)^\alpha \cdot \left[\nabla_x^\alpha \left(\frac{\nabla_x^\alpha u}{|\nabla^\alpha u|} \right) + \nabla_y^\alpha \left(\frac{\nabla_y^\alpha u}{|\nabla^\alpha u|} \right) \right] \right\} + \lambda \left(\frac{f}{u} - 1 \right) \quad (10)$$

2 模型的数值处理

根据文献[17], 图像 $u(i, j)$ 的离散分数阶差分为:

$$\begin{cases} \Delta_x^\alpha u(i, j) = (-1)^\alpha \sum_{k=0}^{N-1} (-1)^k \binom{\alpha}{k} u(i+k, j) \\ \Delta_y^\alpha u(i, j) = (-1)^\alpha \sum_{k=0}^{N-1} (-1)^k \binom{\alpha}{k} u(i, j+k) \end{cases} \quad (11)$$

其中 $\binom{\alpha}{k}$ 为二项式系数。当 $k \geq \alpha + 1$, $\binom{\alpha}{k}$ 定义为:

$$\binom{\alpha}{k} = \frac{\Gamma(\alpha + 1)}{\Gamma(k + 1)\Gamma(\alpha - k + 1)} \quad (12)$$

本文 $\alpha = 1.3$, 由于二项式系数 $\binom{1.3}{k}$ 随着 k 的增大非常迅速地衰减趋于零, 因此实际计算时, L 不需要取太大, 本文取 $L = 20$ 。

为了求解式(9), 记

$$\Delta_x^\alpha \left(\frac{\Delta_x^\alpha u(i, j)}{|\Delta^\alpha u|} \right) = (-1)^\alpha \sum_{k=0}^{L-1} (-1)^k \binom{\alpha}{k} \frac{\Delta_x^\alpha u(i+k, j)}{\sqrt{(\Delta_x^\alpha u(i+k, j))^2 + (\Delta_y^\alpha u(i+k, j))^2}} \quad (13)$$

$$\Delta_y^\alpha \left(\frac{\Delta_y^\alpha u(i, j)}{|\Delta^\alpha u|} \right) = (-1)^\alpha \sum_{k=0}^{L-1} (-1)^k \binom{\alpha}{k} \frac{\Delta_y^\alpha u(i, j+k)}{\sqrt{(\Delta_x^\alpha u(i, j+k))^2 + (\Delta_y^\alpha u(i, j+k))^2}} \quad (14)$$

将式(13)和(14)代入式(9), 得

$$\Delta_x^\alpha \left(\frac{\Delta_x^\alpha u(i, j)}{|\Delta^\alpha u|} \right) + \Delta_y^\alpha \left(\frac{\Delta_y^\alpha u(i, j)}{|\Delta^\alpha u|} \right) + \lambda \left(1 - \frac{f}{u} \right) = 0 \quad (15)$$

令

$$I_{-t} = - \left(\Delta_x^\alpha \left(\frac{\Delta_x^\alpha u(i, j)}{|\Delta^\alpha u|} \right) + \Delta_y^\alpha \left(\frac{\Delta_y^\alpha u(i, j)}{|\Delta^\alpha u|} \right) \right) + \lambda \left(\frac{f}{u} - 1 \right) \quad (16)$$

求解模型(6)可采用迭代法, 在每一步 n 有,

$$u^{(n)} = u^{(n-1)} + dt \times I_{-t} \quad (17)$$

这里 dt 为一常数, 本文取 $dt = 0.25$ 。

上面讨论了模型的数值化处理。下面分析本模型算法的时间复杂度和运行时间。对于一幅大小为 $N \times N$ 的图像, 利用分数阶变分算法和整数阶变分算法进行处理的主要区别在于模型正则项的计算上。在计算分数阶差分(11)时, α 为非整数, 此时要对图像进行遍历, 时间复杂度为 $L \cdot O(N^2)$ 。对于整数阶变分算法中的正则项一般取 $\operatorname{div}(\nabla u / |\nabla u|)$, 时间复杂度为 $O(N^2)$, 也即是说两种算法的时间复杂度阶数是相同的, 均为 $O(N^2)$ 。由于分数阶差分的计算对于每一点来说涉及到了更多点的“求和”, 所以在一次迭代中它所需的时间稍长于整数阶差分运算。尽管如此, 相对于整数阶变分算法, 本文模型的收敛速度要快得多, 这就大大弥补了每次迭代中运算时间略长的问题。从后面的实验结果也看出, 本文算法所需的运算时间明显少于整数阶算法。

3 实验结果与分析

本章在相同的计算机硬件和软件环境下利用 Matlab

R2009a 进行仿真实验。

首先,以 SynImage 图像为例,图 1(a) 是原始清晰的 SynImage 图像。它被人为加入的泊松噪声破坏后得到的噪声图像如图 1(b) 所示。图 1(c) 和图 1(d) 分别是利用文献[12]中的算法和本文算法进行去噪实验所得到的恢复图像。从图 1 可以看出,本文算法的复原效果较好,它在去除噪声的同时,很好地保持了图像的边缘纹理细节,而文献[12]模型的去噪效果图则存在一定程度的模糊。

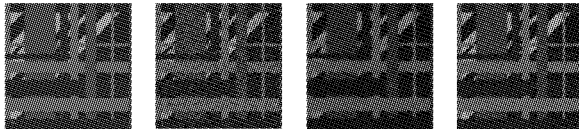


图 1 人工合成泊松噪声图像的去噪实验

其次,对实际的医学超声图像进行去噪实验。含有噪声的超声图像 Ultrasound 图像如图 2(a) 所示。本文分别对其利用文献[12]中的算法和本文算法进行去噪,实验结果分别如图 2(b) ~ (c) 所示。从图 2 中看出,本文的模型不仅在去除泊松噪声时有效,同样也适用于医学超声图像。



图 2 医学超声图像的去噪实验

以上两个实验的直观结果表明,文献[12]采用整数阶变分模型,虽然去除了噪声,但是图像出现了一定程度的模糊。本文模型由于采用了分数阶微分算子,能够保护好图像纹理细节,缓解甚至消除了“梯度效应”。

为了进一步验证算法的有效性和先进性,本文再用相对误差率(Relative Error, ReErr)与峰值信噪比(Peak Signal-to-Noise Ratio, PSNR)这两种常见客观指标来评价本文方法的去噪效果。它们的计算公式分别为:

$$ReErr = \left(\frac{\sum_{0 \leq i \leq M} \sum_{0 \leq j \leq N} (u(i, j) - f(i, j))^2}{\sum_{0 \leq i \leq M} \sum_{0 \leq j \leq N} (u(i, j))^2} \right)^{\frac{1}{2}} \quad (18)$$

$$PSNR = 10 \lg(255^2 / MSE) \quad (19)$$

其中

$$MSE = \frac{1}{MN} \sum_{i=0}^{M-1} \sum_{j=0}^{N-1} (f(i, j) - u(i, j))^2 \quad (20)$$

这里: u 为原始清晰图像, f 是待评价图像。从式(18)和(19)可以看出, $ReErr$ 越小,表明两幅图像越相似,去噪效果越好,相反, $PSNR$ 越大,去噪效果越佳。表 1 列出了以上两组实验分别采用文献[12]的方法和本文方法对应的 $ReErr$ 值和 $PSNR$ 值。

表 1 图像的客观评价指标

图像	模型	ReErr	PSNR	迭代次数	运行时间/s
SynImage	文献[12]	0.0601	35.3024	55	416
	本文	0.0546	36.1380	20	400
Ultrasound	文献[12]	0.0738	29.8180	50	395
	本文	0.0632	31.1552	18	367

从表 1 可看出:无论是人工合成的泊松图像还是实际的医学超声图像:对于 $ReErr$ 值,本文方法都低于文献[12]中的方法;而对于 $PSNR$ 值,本文方法却都明显高于文献[12]中的方法。另外,为了验证算法的运行效率,在实验中也记录了算法的迭代次数和

运行时间,结果如表 1 所示。从中可以看出,由于本文算法收敛速度较快,迭代次数较少,因此本文算法的运行时间明显少于文献[12]中的算法。

4 结语

本文提出了一种分数阶变分的图像泊松去噪模型。与整数阶变分模型相比,分数阶模型具有很好的纹理保护作用。它不仅能够有效地去除噪声,明显地缓解图像模糊,并且消除了整数阶变分算法容易出现的“梯度效应”。

参考文献:

- [1] RUDIN L, OSHER S, FATEMI E. Nonlinear total variation based noise removal algorithms [J]. *Physica D: Nonlinear Phenomena*, 1992, 60(1/2/3/4): 259 - 268.
- [2] DRAPARA C S. A nonlinear total variation-based denoising method with regularization parameters [J]. *IEEE Transactions on Biomedical Engineering*, 2009, 56(3): 582 - 586.
- [3] CHINNA R B, MADHAVI L M. A combination of wavelet and fractal image denoising technique [J]. *International Journal of Electronics Engineering*, 2010, 2(2): 259 - 264.
- [4] GHAZEL M, FREEMAN G H, VRSCAY E R. Fractal image denoising [J]. *IEEE Transactions on Image Processing*, 2003, 12(12): 1560 - 1578.
- [5] LANDI G, LOLI P E. An efficient method for nonnegatively constrained total variation-based denoising of medical images corrupted by Poisson noise [J]. *Computerized Medical Imaging and Graphics*, 2012, 36(1): 38 - 46.
- [6] STEPHEN K L, MICHAEL H, KNOLL F, *et al.* A total variation based approach to correcting surface coil magnetic resonance images [J]. *Applied Mathematics and Computation*, 2011, 218(2): 219 - 232.
- [7] GILBOA G, SOCHEN N, ZEEVI Y Y. Variational denoising of partly textured images by spatially varying constraints [J]. *IEEE Transactions on Image Processing*, 2006, 15(8): 2281 - 2289.
- [8] LI F, SHEN C M, FAN J S, *et al.* Image restoration combining a total variational filter and a fourth-order filter [J]. *Journal of Visual Communication and Image Representation*, 2007, 18(4): 322 - 330.
- [9] 孙玉宝, 韦志辉, 吴敏, 等. 稀疏性正则化的图像泊松去噪算法 [J]. *电子学报*, 2011, 39(2): 285 - 290.
- [10] 胡学刚, 张龙涛, 蒋伟. 基于偏微分方程的变分去噪模型 [J]. *计算机应用*, 2012, 32(7): 1879 - 1881, 1901.
- [11] ZHANG B, FADILJ M, STARCK J-L. Wavelets, ridgelets and curvelets for poisson noise removal [J]. *IEEE Transactions on Image Processing*, 2008, 17(7): 1093 - 1108.
- [12] LE T, CHARTRAND R, ASAKI T J. A variational approach to reconstructing images corrupted by Poisson noise [J]. *Journal of Mathematical Imaging and Vision*, 2007, 27(3): 257 - 263.
- [13] PU Y F, ZHOU J L, YUAN X. Fractional differential mask: a fractional differential-based approach for multiscale texture enhancement [J]. *IEEE Transactions on Image Processing*, 2010, 19(2): 491 - 511.
- [14] RICHARDSON W. Bayesian-based iterative method of image restoration [J]. *Journal of the Optical Society of America*, 1972, 62(1): 1917 - 1983.
- [15] LUCY L. An iterative technique for the rectification of observed distributions [J]. *Astronomical Journal*, 1974, 79(6): 745 - 754.
- [16] OPPENHEIM A V. *Signals and systems* [M]. 2nd ed. Upper Saddle River, New Jersey, USA: Prentice Hall, 1997.
- [17] ORTIGUEIRA M D. A coherent approach to noninteger order derivatives [J]. *Signal Processing*, 2006, 86(10): 2505 - 2515.