

基于子空间优化的 l^2 -总变分图像恢复

刘晓光^{1*}, 高兴宝¹, 周冬梅²

(1. 陕西师范大学 数学与信息科学学院, 西安 710062; 2. 成都高新新源学校, 成都 610041)

(* 通信作者电子邮箱 liuxiaoguang_lxg@163.com)

摘要:交替方向法被广泛用来求解总变分图像恢复问题, 鉴于其搜索方向的不精确性对算法效率和图像恢复质量有着一定影响, 提出了一种矫正方法。该方法以子空间优化为基础, 结合能量函数泰勒展式及可微函数性质, 利用先前搜索方向对当前方向进行有效矫正, 提高了搜索方向的精确性。数值实验利用算法运行时间和峰值性噪比分别说明了该修正方法的效率和图像恢复质量。

关键词:整齐边界; 总变分; 交替方向法; 子空间优化; 图像恢复

中图分类号: TP391 **文献标志码:** A

l^2 -total variation image restoration based on subspace optimization

LIN Xiaoguang^{1*}, GAO Xingbao¹, ZHOU Dongmei²

(1. College of Mathematics and Information Science, Shaanxi Normal University, Xi'an Shaanxi 710062, China;

2. School of Xin Yuan, Chendu Hi-tech Industrial Development Zone, Chengdu Sichuan 610041, China)

Abstract: The alternating direction method is used widely to deal with the problem of total variation image restoration. A correction method was proposed to solve the problem of inaccuracy in search direction of the alternating direction method, which may influence the efficiency of the algorithm and the quality of the restored images adversely. Combining Taylor expansion of energy function and properties of differentiable function, this subspace-optimization-based method corrected the current direction effectively by utilizing the previous one, and improved the accuracy of search direction. The numerical experiments expound the efficiency of this algorithm and the quality of the restored images by running time and Peak-Signal-to-Noise Ratio (PSNR), respectively.

Key words: neat boundary; Total Variation (TV); alternating direction method; subspace optimization; image restoration

0 引言

数字图像恢复广泛应用于军事、医学等科技领域^[1]。一般地, 原始图像 $f \in \mathbf{R}^n$ 和观测图像 $g \in \mathbf{R}^n$ 的关系为:

$$g = Hf - b \quad (1)$$

其中 $H \in \mathbf{R}^{n \times p}$ 代表由运动模糊、辐射失真和灰度失真等原因引起的退化系统, $p = m \times n$, m 和 n 分别是图像表达为矩阵时的行数和列数, $b \in \mathbf{R}^n$ 为加性噪声。

图像恢复通常利用观测图像 g , 加性噪声 b 及退化系统 H 的某些信息去寻找原始图像 f 的一个理想估计 \hat{f} 。然而, 由于退化系统 H 的强稀疏性, 仅利用模型(1)的逆过程求解 \hat{f} 通常为一个病态问题。因此人们利用原始图像的一些先验信息和(1)来共同求解它。最常用的可行方法之一是定义正则化解, 即理想解 \hat{f} 为如下成本函数(能量函数)的一个最小值点:

$$J(f) = \theta(Hf - g) + \alpha\Phi(f) \quad (2)$$

其中: 函数 θ 表示向量 Hf 与 g 的数据差的某种度量, 正则项 Φ 表示 f 的某些先验信息, 正则参数 $\alpha > 0$ 用来均衡以上两项。不失一般性, 本文假设加性噪声 b 满足高斯分布, 即取 $\theta(x) = \|x\|_2^2$ (向量 $x \in \mathbf{R}^n$ 的 l^2 -范数), 利用文献[2]中思想易将本文方法推广至 $\theta(x) = \|x\|_1$ (l^1 -范数)情形。

在数字图像处理中, 正则项 Φ 通常为一线性算子, 且得

到了深入的讨论^[1-3]。Rudin 等提出如下总变分 (Total Variation, TV) 正则^[4]:

$$\Phi(f) = \|f\|_{TV} = \sum_{i \in I} \|D_i f\|_2 = \sum_{i \in I} \sqrt{(D_i^1 f)^2 + (D_i^2 f)^2}$$

其中: $I = \{1, 2, \dots, l\}$, D_i^1 和 D_i^2 分别表示第 i 个点像素值的一阶水平差分 and 竖直差分。尽管由于其不可微性带来许多数值计算方面的困难, 例如并不能直接应用基于梯度的优化算法^[5-6]等, 但实验结果表明 TV 正则项在图像边界保护方面具有强大的优越性。因此如何高效求解此问题成为研究热点之一^[7-10], 半光滑牛顿法、遗传算法等均可求解此类问题。特别地, 文献[10]利用交替方向法求解 TV 正则项图像恢复问题, 获得了较好的效果。但由于在优化过程中首先对原能量函数进行分解, 然后进行交替优化使实际搜索方向存在潜在误差。为克服这一缺点, 提高算法效率, 本文利用子空间方法^[11]对交替方向法产生的搜索方向进行矫正, 并通过实验结果的比较说明了该矫正方法的有效性。

1 交替方向法

当正则项为 TV 正则项时, 图像恢复问题(2)转化为如下形式:

$$\min_f \|Hf - g\|_2^2 + \alpha \|f\|_{TV} \quad (3)$$

为避免不可微性所带来的数值计算困难, 文献[10]首先将问题(3)转换为:

收稿日期: 2012-11-01; 修回日期: 2012-12-9。

基金项目: 国家自然科学基金资助项目(61273311, 61173094); 中央高校基本科研业务费专项基金资助项目(GK201001002)。

作者简介: 刘晓光(1985-), 男, 甘肃定西人, 博士研究生, 主要研究方向: 最优化理论与算法、数字图像处理; 高兴宝(1966-), 男, 陕西陇县人, 教授, 博士生导师, 主要研究方向: 最优化理论与算法、神经网络; 周冬梅(1986-), 女, 陕西汉中, 硕士研究生, 主要研究方向: 偏微分方程及其应用。

$$\min_{u, f} F(u, f) = \|Hf - g\|_2^2 + \alpha \|u\|_{TV} + \beta \|f - u\|_2^2 \quad (4)$$

其中向量 $u \in \mathbf{R}^p$ 转换不可微 TV 正则项中的 f , 参数 $\beta > 0$ 控制 u 和 f 的接近程度。

其次采用如下交替方向法求解问题(4):

$$\begin{cases} f^{j+1} = \arg \min_f \|Hf - g\|_2^2 + \beta \|f - u^j\|_2^2 \\ u^{j+1} = \arg \min_u \beta \|f^{j+1} - u\|_2^2 + \alpha \|u\|_{TV} \end{cases} \quad (5)$$

并取得了较好的恢复效果。由于求解 f^{j+1} 等价于解非奇异线性方程组 $(H^T H + \beta I)f = H^T g + \beta u^j$, 因此可利用共轭梯度法、预条件等许多经典优化^[5-6] 和数值方法^[12-14] 求解它。而式(5)中第二个优化问题是退化系统为单位矩阵的特殊 TV 去噪模型, Chambolle 投影算法、半光滑牛顿法等^[7-8] 可有效求解 u^{j+1} 。

尽管由上述分析可知利用式(5), 交替方向法可有效求解原始问题(3)的替代问题(4), 但由于其交替优化目标变量 u 和 f , 因此所得解 $\bar{l}^{j+1} = [u^{j+1}; f^{j+1}]$ 与直接求解式(4)所得解 $\bar{l}^{j+1} = [\bar{u}^{j+1}; \bar{f}^{j+1}]$ 存在一定误差, 从而影响算法的有效性。

2 基于子空间优化的交替方向法

设 $l^{j+1} = [u^{j+1}; f^{j+1}]$ 由交替方向法(5)产生, 定义 $\bar{l}^{j+1} = \bar{l}^j + S^{j+1} \omega^{j+1}$

其中方向子空间 $S^{j+1} = \text{span}[l_0^{j+1}, l_1^{j+1}, \dots, l_n^{j+1}]$, $l_0^{j+1} = l^{j+1} - \bar{l}^j$, $l_k^{j+1} = \bar{l}^{j+1-k} - \bar{l}^{j-k}$ ($1 \leq k \leq n \leq j$),

$$\omega^{j+1} = \arg \min_{\omega} F(\bar{l}^j + S^{j+1} \omega) \quad (6)$$

易知必有 $F(\bar{l}^{j+1}) \leq F(\bar{l}^{j+1})$ 。本文仅考虑 $S^{j+1} = [l_0^{j+1}]$ 的情形。

首先, 假设 $\forall i \in I$ 有 $D_i^1 u \neq 0$ 或 $D_i^2 u \neq 0$, 则 F 为光滑凸函数, 且其梯度及 Hessian 阵分别为:

$$\nabla F = [2\beta(u - f) + \omega \sum_{i \in I} x_i^{-1/2} y_i z_i^T; 2H^T(Hf - g) + 2\beta(f - u)]$$

$$\nabla^2 F = \begin{bmatrix} 2\beta I + \frac{\partial^2 \|u\|_{TV}}{\partial u_i^2} & -2\beta I \\ -2\beta I & 2H^T H + 2\beta I \end{bmatrix}$$

其中: $x_i = (D_i^1 u)^2 + (D_i^2 u)^2$, $y_i = D_i^1 u + D_i^2 u$, $z_i = D_i^1 + D_i^2$ 。为提高算法效率, 取 $\frac{\partial^2 \|u\|_{TV}}{\partial u_i^2} = 0$, 则 $\nabla^2 F$ 与 l 无关。

另一方面, 由于 ω^{j+1} 为凸函数的最优点, 所以由式(6)及泰勒展式得

$$(S^{j+1})^T \nabla F(\bar{l}^j + S^{j+1} \omega^{j+1}) = 0 \quad (7)$$

$$\nabla F(\bar{l}^j + S^{j+1} \omega^{j+1}) \approx \nabla F(\bar{l}^j) + \nabla^2 F(\bar{l}^j) S^{j+1} \omega^{j+1} \quad (8)$$

将式(8)代入式(7)得:

$$(S^{j+1})^T (\nabla F(\bar{l}^j) + \nabla^2 F(\bar{l}^j) S^{j+1} \omega^{j+1}) \approx 0 \quad (9)$$

下面说明 $(S^{j+1})^T \nabla^2 F(\bar{l}^j) S^{j+1}$ 非奇异。

任取向量 $v \in \mathbf{R}^p$, $w \in \mathbf{R}^p$ 且 $[v; w] \neq 0$, 则

$$\begin{aligned} [v; w]^T \nabla^2 F[v; w] &= \\ 2\beta v^T v - 2\beta v^T w - 2\beta w^T w + 2w^T H^T H w + 2\beta w^T w &= \\ 2\beta \|Hw\|_2^2 + 2\beta \|v - w\|_2^2 \end{aligned}$$

当且仅当 $v = w$ 时 $[v; w]^T \nabla^2 F[v; w] = 0$, 而实际中 $v \neq w$, 则 $((S^{j+1})^T \nabla^2 F(\bar{l}^j) S^{j+1})^{-1}$ 一定存在, 即

$$\omega^{j+1} \approx -((S^{j+1})^T \nabla^2 F(\bar{l}^j) S^{j+1})^{-1} ((S^{j+1})^T \nabla F(\bar{l}^j)) \quad (10)$$

其次, 当 $D_i^1 u = D_i^2 u = 0$ 时, 令 $\|u_i\|_{TV+\varepsilon} = (x_i + \varepsilon)^{1/2}$ ($\varepsilon > 0$), 则 $\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \|u_i\|_{TV+\varepsilon} = \|u\|_{TV}$ 而对于 $\forall \varepsilon (0 < \varepsilon \ll 1)$, $\frac{\partial \|u\|_{TV+\varepsilon}}{\partial u_i} = 0$, 所以定义 $\frac{\partial \|u\|_{TV}}{\partial u_i} = 0$ 。

综上所述, 基于子空间优化的算法如下:

1) 初始化 \bar{l}^0 ;

2) $f^{j+1} = \arg \min_f \|Hf - g\|_2^2 + \beta \|f - \bar{u}^j\|_2^2$;

$u^{j+1} = \arg \min_u \beta \|f^{j+1} - u\|_2^2 + \alpha \|u\|_{TV}$;

3) 通过式(10) 计算 ω^{j+1} 并取 $\bar{l}^{j+1} = \bar{l}^j + S^{j+1} \omega^{j+1}$;

4) 若 $(\|\bar{u}^{j+1} - \bar{u}^j\|_2) / \|\bar{u}^{j+1}\|_2 < 10^{-4}$, 则停; 否则转2)。

3 数值实验

为说明子空间优化方法对基本交替方向法的有效矫正, 本节将进行数值实验并与文献[10]进行比较。为保持公正, 与文献[10]一样, 本文取 $f^{j+1} = (H^T H + \beta I)^{-1} (H^T g + \beta \bar{u}^j)$, 并用 Chambolle 投影算法求解步骤2)第2个公式。

测试图像为具有整齐边界, 64×64 的“TwoCircles”(简记为“TC”)和 128×128 的“TwoSquare”(简记为“TS”)(<http://www.imageprocessingplace.com>)。所有实验均在 Matlab 2010a, Core(TM) 为 1.66 GHz, RAM 为 2 GB 环境下完成, 并取 10 次实验结果的平均值。

在测试中, 用 CPU 运行时间来度量算法效率, 峰值信噪比(Peak Signal-to-Noise Ratio, PSNR):

$$PSNR = -20 \lg((\bar{u}^{j+1} - f)/mn)$$

用来度量恢复质量, β 的初始值取为 1.1, 并以 1.8β 的速度递增, Chambolle 方法中的步长取为 0.25。退化函数为经过截取且支撑集分别为 5×5 ($\sigma = 1$)、 7×7 ($\sigma = 1.5$)、 9×9 ($\sigma = 2$) 的二维高斯函数:

$$h(s, t) = \exp((-s^2 - t^2)/2\sigma^2); -3 \leq s, t \leq 3$$

加性噪声选用均值为 0, 标准差分别为 0.01, 0.05, 0.1 的高斯噪声。

图 1~2(a) 分别表示原始“TC”和“TS”图像, 图 1~2(b) 表示观测图像, 图 1(c~d) 分别为 $\alpha = 0.025$, 退化函数支撑集为 5×5 ($\sigma = 1$), 高斯噪声标准差为 0.01 时文献[10]中算法与算法 1 的恢复效果图。图 2(c~d) 分别为 $\alpha = 0.03$, 退化函数支撑集为 7×7 ($\sigma = 1.5$), 高斯噪声标准差为 0.05 时文献[10]中算法与算法 1 的恢复效果图。

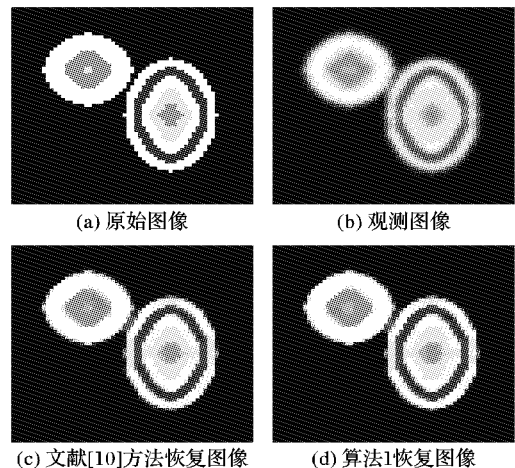


图1 $\alpha = 0.025$, 5×5 ($\sigma = 1$), 噪声 0.01 时“TC”图像恢复效果

为说明算法1对正则参数的稳定性,表1~2分别对比了在 $\alpha = 0.025$ 、 $\alpha = 0.03$ 两种情形下文献[10]中算法与算法1在不同高斯噪声及退化函数支撑集下的PSNR值及CPU运行时间。

由图1~2可以看出:在 $\alpha = 0.025$,退化函数支撑集为 5×5 ($\sigma = 1$),高斯噪声标准差为0.01; $\alpha = 0.03$,退化函数支撑集为 7×7 ($\sigma = 1.5$),高斯噪声标准差为0.05两种情形下算法1恢复效果较文献[10]有所提高(可参看表1~2 PSNR值对比)。

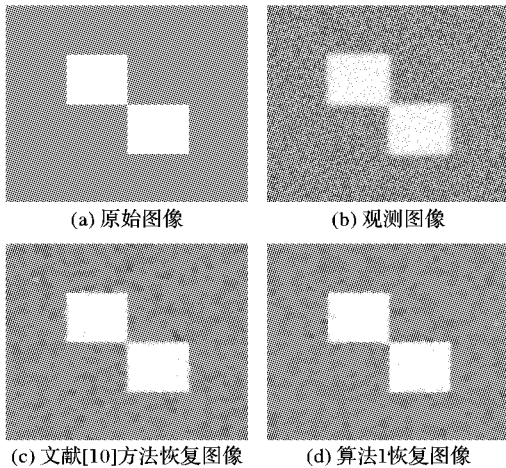


图2 $\alpha = 0.03$, 7×7 ($\sigma = 1.5$), 噪声0.05时“TS”图像恢复效果

表1 $\alpha = 0.025$ 时 PSNR 和 CPU 耗时对比

图像	高斯 噪声 标准差	退化 函数 支撑集	观测 PSNR/ dB	PSNR/dB		CPU 耗时	
				算法	文献	算法	文献
				1	[10] 算法	1	[10] 算法
TC	0.01	5×5	18.16	24.61	24.59	0.73	0.80
	0.05	7×7	15.49	18.69	18.42	1.03	1.12
	0.10	9×9	13.61	15.37	15.39	1.12	1.29
TS	0.01	5×5	30.87	44.42	44.57	1.08	1.08
	0.05	7×7	24.39	32.92	32.58	1.83	1.89
	0.10	9×9	19.33	25.50	25.33	1.65	1.76

表2 $\alpha = 0.03$ 时 PSNR 和 CPU 耗时对比

图像	高斯 噪声 标准差	退化 函数 支撑集	观测 PSNR/ dB	PSNR/dB		CPU 耗时	
				算法	文献[10]	算法	文献[10]
				1	算法	1	算法
TC	0.01	5×5	18.17	24.25	24.23	0.73	1.13
	0.05	7×7	15.47	18.33	18.17	0.89	0.89
	0.10	9×9	13.62	15.30	15.27	1.08	1.22
TS	0.01	5×5	30.87	43.75	43.12	0.97	1.12
	0.05	7×7	24.25	33.41	33.27	1.27	1.56
	0.10	9×9	19.26	26.73	25.48	1.97	2.03

(上接第1111页)

- [13] NGUYEN P B, BEGHDAI A, LUONG M. Robust watermarking in DoG scale space using a multi-scale JND model [C]// PCM 2009: Advances in Multimedia Information Processing, LNCS 5879. Berlin: Springer, 2009: 561–573.
- [14] HARALICK R M, SHANMUGAM K, DINSTEN I. Textural features for image classification [J]. IEEE Transactions on Systems Man and Cybernetics, 1973, 3(6): 610–621.
- [15] BELONGIE S, MALIK J, PUZICHA J. Shape matching and object recognition using shape contexts [J]. IEEE Transactions on Pattern

从表1~2可以看到,通过子空间优化方法的有效矫正,文献[10]中算法速率及恢复质量有较为明显的提高。

4 结语

在数字图像恢复等应用领域中,TV正则表现出了很好的性能,同时也带来了许多数值计算困难,因此,交替方向法被广泛用来处理此问题。本文针对基本交替方向法的不足,利用子空间优化方法对其搜索方向进行了有效矫正,数值实验表明算法性能得到了有效改进。

参考文献:

- [1] GONZALEZ R C, WOODS R E. Digital image processing [M]. 2nd ed. Upper Saddle River, NJ, USA: Prentice Hall, 2008.
- [2] GUO X X, LI F, NG M K. A fast l_1 -TV algorithm for image restoration [J]. SIAM Journal Scientific Computing, 2009, 31(3): 2322–2341.
- [3] BLACK M J, RANGARAJAN A. On the unification of line processes, outlier rejection, and robust statistics with applications to early vision [J]. International Journal of Computer Vision, 1996, 19(1): 57–91.
- [4] RUDIN L I, OSHER S, FATEMI E. Nonlinear total variation based noise removal algorithm [J]. Physica D: Nonlinear Phenomena, 1992, 60(1/2/3/4): 259–268.
- [5] 袁亚湘, 孙文瑜. 最优化理论与方法 [M]. 北京: 科学出版社, 2005.
- [6] BOYD S, VANDENBERGHE L. Convex optimization [M]. Cambridge: Cambridge University, 2004.
- [7] CHAMBOLE A. An algorithm for total variation minimization and application [J]. Journal of Mathematical Imaging and Vision, 2004, 20(1/2): 89–97.
- [8] NG M K, QI L Q, YANG Y F, et al. On semismooth Newton's methods for total variation minimization [J]. Journal of Mathematical Imaging and Vision, 2007, 27(3): 256–276.
- [9] LI Y Y, SANTOSA F. A computational algorithm for minimizing total variation in image reconstruction [J]. IEEE Transactions on Image Processing, 1996, 5(6): 987–995.
- [10] HUANG Y M, NG M K, WEN Y W. A fast total variation minimization method for image restoration [J]. Multiscale Modeling and Simulation, 2008, 7(2): 774–795.
- [11] ELAD M, MATLON B, ZIBULEVSKY M. Coordinate and subspace optimization methods for linear squares with non-quadratic regularization [J]. Applied and Computational Harmonic Analysis, 2007, 23(3): 346–367.
- [12] YOUNG D M. Iterative solution of large linear systems [M]. New York: Academic, 1971.
- [13] 胡家骥. 线性代数方程组的迭代解法 [M]. 北京: 科学出版社, 1999: 40–53.
- [14] VARGA R S. Matrix iterative analysis [M]. 2nd ed. New York: Springer-Verlag, 2000.

Analysis and Machine Intelligence, 2002, 24(4): 509–522.

- [16] TACHPHETPIBOON S, AMORNRAKSA T. Applying FFT features for fingerprint matching [C]// 2006 1st International Symposium on IEEE Wireless Pervasive Computing. Piscataway, NJ: IEEE Press, 2006: 1–5.
- [17] KALPATHY-CRAMER J, MÜLLER H, BEDRICK S, et al. Overview of the CLEF 2011 medical image classification and retrieval tasks [C]// CLEF 2011 Working Notes. Amsterdam, the Netherlands: CLEF, 2011: 19–22.