

基于给定精度的空间 B 样条曲线弧长分段点求取方法

丁立军^{1,2*}, 戴曙光¹, 穆平安¹, 侯文玫¹

(1. 上海理工大学 光电信息与计算机工程学院, 上海 200093; 2. 上海医疗器械高等专科学校 医疗器械工程系, 上海 200093)

(* 通信作者电子邮箱 dlingjl11@163.com)

摘要:对 B 样条等参数曲线按弧长精确分段, 是沿曲线路径加工、检测中的一个重要问题。通过对 B 样条曲线弧长计算方法以及弧长计算误差与分段精度的关系进行分析, 通过建立弧长分段点搜索区间及弧长二分法确定符合精度要求的弧长分段点。实验证明该方法是解决参数曲线弧长精确分段的有效方法。

关键词:B 样条参数曲线; 弧长; 分段点; 精度

中图分类号: TP391.41 **文献标志码:** A

Method of getting arc length segmentation point for B-spline curve based on given accuracy

DING Lijun^{1,2*}, DAI Shuguang¹, MU Ping'an¹, HOU Wenmei¹

(1. School of Optical-Electrical and Computer Engineering, University of Shanghai for Science and Technology, Shanghai 200093, China;

2. Department of Medical Devices Engineering, Shanghai Medical Instrumentation College, Shanghai 200093, China)

Abstract: Arc length accurate segmentation for parameters curve such as B-spline curve is an important issue in the detection and processing along a curved path. This article analyzed the relationship of arc length calculation method, calculation error and segmentation accuracy of B-spline curve. The arc length searching interval and arc length dichotomy were specified to meet the accuracy requirements of arc length segmentation point. The experiments show that the method is effective in accurate segmentation of arc length for parametric curve.

Key words: B-spline parameter curve; arc length; segmentation point; accuracy

0 引言

按特定参数曲线路径对某个被测参数进行检测涉及到一类问题, 如: 对于路径曲率变化较大的情形, 常常需要按曲率变化情况合理布置检测点^[1]; 而在某些特定情况下的应用, 如: 按等分弧长进行恒速插补加工或检测^[2]、对某些特定弧长位置点进行定位和检测等问题则需要以弧长作为定位或分段依据, 并应满足一定的定位精度要求。同时, 以弧长为参数的检测点求取及定位误差计算对检测结果的后续准确建模和分析评价也是非常重要的。

目前曲线的分段方法中, 以弦长近似代替弧长分段^[3-4]和近似弧长参数化法^[5-7]分段是较常用的方法。对于空间参数曲线弧长计算方法, 文献[8]中用 Bezier 曲线逼近弧长曲线的计算公式, 通过建立参数与曲线弧的关系求取曲线的近似弧长; 文献[9]通过对 Bezier 样条曲线近似弧长参数化法来求取曲线的弧长; 文献[10]对 NURBS 曲线进行离散, 对各相邻离散点连线, 通过弦与对应曲率圆弧的弓高来估算曲线弧长的离散误差。这些算法的主要问题是弧长计算误差难以直接计算和控制, 对后续的检测误差精确分析与建模造成困难。

本文采用基于 B 样条曲线参数域积分求取弧长, 并建立曲线分段误差与计算误差的关系模型, 采用二分法求取精确分段点, 从而保证了曲线路径弧长分段点的精确定位。

1 B 样条曲线及弧长计算

B 样条曲线方程^[11]为:

$$P(u) = \sum_{i=0}^n d_i N_{i,k}(u); i = 0, 1, \dots, n$$

其中: d_i 为控制顶点; $N_{i,k}(u)$ 为 k 次规范 B 样条基函数, 它是由一个称为节点矢量的非递减的参数 u 的序列 $U: u_0 \leq u_1 \leq \dots \leq u_{i+k+1}$ 所决定的 k 次分段多项式。且 $N_{i,k}(u)$ 具有以下递推算式:

$$N_{i,0}(u) = \begin{cases} 1, & u_i \leq u \leq u_{i+1} \\ 0, & \text{其他} \end{cases}$$

$$N_{i,k}(u) = \frac{u - u_i}{u_{i+k} - u_i} N_{i,k-1}(u) + \frac{u_{i+k+1} - u}{u_{i+k+1} - u_{i+1}} N_{i+1,k-1}(u)$$

在实际应用中, B 样条曲线在参数区间 $[u_i, u_{i+1}]$ 对应的曲线段具有以下分段定义式:

$$P(u) = \sum_{j=i-k}^i d_j N_{j,k}(u); u \in [u_i, u_{i+1}] \subset [u_k, u_{n+1}]$$

设 B 样条曲线定义域为 $u \in [u_k, u_{n+1}]$, 且参数 $u_k \sim u$ 之间跨过 n 个完整的节点区间, 则从曲线起始点 (对应参数 u_k) 到参数 u 对应的曲线点所包含的曲线弧长为:

$$s(u) = \int_{u_k}^u |\dot{P}(u)| du = \sum_{i=0}^{n-1} \int_{u_{k+i}}^{u_{k+i+1}} |\dot{P}(u)| du + \int_{u_{k+n}}^u |\dot{P}(u)| du$$

因为 $N_{i,k}(u)$ 为分段定义的基函数, 故在积分计算时, 可对每一段曲线分别进行积分, 再逐段累加, 即可求出精确的弧长。但在实际应用中分段累积求和的方法比较繁琐, 故多采用

收稿日期: 2012-11-22; 修回日期: 2012-11-22。

基金项目: 国家自然科学基金资助项目 (51075280); 上海市教委重点学科第五期资助项目 (J50505)。

作者简介: 丁立军 (1971-), 男, 山东龙口人, 讲师, 博士, 主要研究方向: 测试信息获取与处理; 戴曙光 (1957-), 男, 上海人, 教授, 主要研究方向: 计算机视觉检测, 在线检测; 穆平安 (1964-), 男, 上海人, 教授, 主要研究方向: 智能与虚拟仪器、机器视觉检测; 侯文玫 (1950-), 女, 山东青岛人, 研究员, 博士, 主要研究方向: 精密测试。

数值计算的方法,采取控制积分精度的方法求取规定的弧长。

2 数值积分法计算弧长及误差估计

B样条曲线在参数区间 $[u_i, u_{i+1}]$ 内的导数为:

$$P'(u) = \sum_{j=i-k}^i d_j N_{i,k}'(u); u \in [u_i, u_{i+1}] \subset [u_k, u_{n+1}]$$

因此对于参数定义域内任意参数 u 值,都可以方便地求出 $P'(u)$ 的值,通过数值积分的方法可以求出任意参数区间 $[u_1, u_2]$ 所对应的曲线弧长。

数值积分的求法有很多,其中 Gauss 求积公式具有较好的代数精度,当在计算区间插入 $n+1$ 个计算点时该公式具有 $2n+1$ 次代数精度^[12]。

Gauss-Legendre 求积公式为: $\int_{-1}^1 f(x) dx \approx \sum_{k=0}^n A_k f(x_k)$ 。

设 $P_{n+1}(x)$ 为 Legendre 多项式,则

$$A = \int_{-1}^1 \frac{P_{n+1}(x)}{(x-x_k)P_{n+1}'(x_k)} dx$$

x_k 为 $P_{n+1}(x)$ 的零点。

Gauss-Legendre 积分公式的积分区间为 $[0, 1]$,当求取参数区间为 $[u_1, u_2]$ 时,公式改为:

$$\int_{u_1}^{u_2} f(x) dx = \frac{u_2 - u_1}{2} \int_{-1}^1 f\left(\frac{u_2 - u_1}{2}t + \frac{u_1 + u_2}{2}\right) dt$$

利用 Gauss-Legendre 公式求 B 样条曲线在 $[u_1, u_2]$ 区间上曲线的弧长为:

$$s(u_1, u_2) = \int_{u_1}^{u_2} |P'(u)| du = \frac{u_2 - u_1}{2} \int_{-1}^1 \left| P'\left(\frac{u_2 - u_1}{2}t + \frac{u_1 + u_2}{2}\right) \right| dt$$

其积分误差为:

$$R = \left| \frac{P^{(2n+3)}(\eta)}{(2n+2)!} \right| \int_{u_1}^{u_2} \omega_{n+1}^2(u) du; \eta \in (u_1, u_2)$$

令 $P^{(2n+3)}(\xi) = \max\{|P^{(2n+3)}(\eta)|\}$,且限定积分误差为 $\pm \varepsilon$,则有:

$$R \leq \frac{P^{(2n+3)}(\xi)}{(2n+2)!} \int_{u_1}^{u_2} \omega_{n+1}^2(u) du \leq \varepsilon; \xi \in (u_1, u_2)$$

通过该式可求出 n 值,即积分区间 (u_1, u_2) 需插入 $n+1$ 个计算节点。

3 按给定误差计算弧长分段点

3.1 弧长计算误差与分段误差的关系模型

在实际工程应用中,B样条曲线弧长分段点需满足一定的精度要求,如:要求距曲线上某已知点弧长为 l ,误差为 $\pm \delta$ 的分段点。Gauss 公式求积分可满足 $2n+1$ 次代数精度,设给定 k 次 B 样条曲线,若插入 $n+1$ 个计算点且满足 $2n+1 \geq k-1$ 时,积分出来的曲线弧长是精确的,否则就存在计算误差,因此,应建立弧长计算误差与分段误差的关系模型。

如图1所示,弧长理论值的公差范围为 $\pm \delta$,弧长计算值误差为 $\pm \varepsilon$,弧长理论值与计算值的差值为 Δ ,要保证弧长分段点落在理论弧长公差范围内,就必须满足以下关系式:

$$|\Delta| + \varepsilon \leq \delta$$

其中: δ 的数值可根据实际检测要求预先确定,而 ε 是弧长积分的计算误差。 Δ 值的大小关系到寻找分段点步数的多少,因此,这两个参数可基于运算效率加以平衡确定。

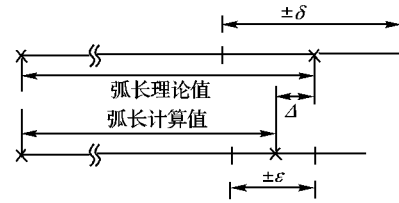


图1 弧长分段误差与计算误差的关系模型

3.2 二分法求取曲线分段点

通过以上误差关系模型可以看出,给定弧长理论值的公差值 δ ,确定数值积分误差值 ε 后,要保证分段点的准确,就必须使弧长理论值和计算值之差满足:

$$|\Delta| \leq \delta - \varepsilon$$

本文通过对搜索区间的二分法确定弧长分段点。这一过程包括两个步骤,首先确定搜索区间,其次完成弧长分段点的定位。

设 k 次 B 样条曲线具有 $n+1$ 个控制顶点,则定义域为 $[u_k, u_{n+1}]$,因为 B 样条曲线是分段插值曲线故可按分段节点区间进行定位和搜索。求距 B 样条曲线起始点弧长及公差为 $S \pm \delta$ 的分段点,具体步骤如下:

首先确定搜索区间。

1) 令 $i=1$,计算参数区间 $[u_k, u_{k+i}]$ 所对应的曲线弧长 S_i ;

2) 若 $S_i \geq S$,则令搜索区间为 $[u_{k+i-1}, u_{k+i}]$,否则转步骤3);

3) 令 $i=i+1$ 计算参数区间 $[u_k, u_{k+i}]$ 所对应的曲线弧长 S_i ,转步骤2);

通过以上步骤可确定二分搜索区间为 $[u_{k+i-1}, u_{k+i}]$;

4) 令 $u = \frac{u_{k+i-1} + u_{k+i}}{2}$;

5) 计算参数区间 $[u_k, u]$ 所对应的曲线弧长 S' ;

6) 判断,若 $|S' - S| \leq \delta - \varepsilon$,则参数 u 所对应的曲线点即为所求分段点,否则转步骤7);

7) 若 $S' - S \geq 0$,则令 $u = \frac{u_{k+i-1} + u}{2}$;若 $S' - S < 0$,则令 $u = u + u_{k+i}/2$;返回步骤5)。

4 应用举例

有4次平面 B 样条曲线如图2所示,其控制顶点为(4, 6)(3,5)(2,4)(3,2)(6,1)(5,8)(10,6)(8,1)(6,0)(4,-1),曲线采用均匀参数化方法(长度单位为cm,下同)。

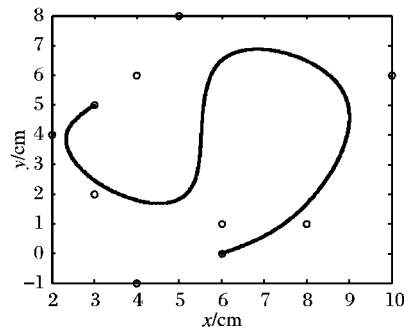


图2 4次平面B样条曲线

令所求弧长距起始点弧长为5,误差为0.02(上下偏差各为0.01)弧长积分误差为0.006(上下偏差各为0.003),根据弧长计算误差与分段误差的关系可以求出 $|\Delta| \leq \delta - \varepsilon = 0.007$,以此设置搜索条件,得到分段点坐标值为(6.6,

0.318)(图3),该点即为满足精度要求的分段点。

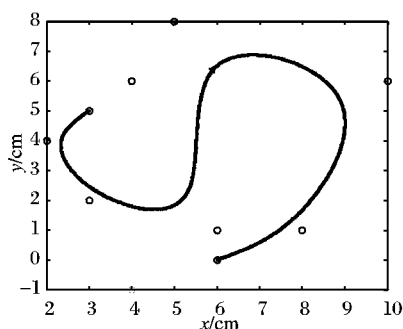


图3 符合精度要求的分段点

又如6次空间B样条曲线,其控制点为(1,2,0)(2,3,1)(3,4,2)(4,4.5,3)(5,3.5,4)(6,2.5,5)(7,2,6)(8,2.5,7)(9,4,8)(10,5.5,9),通过B样条曲线正算及非均匀参数化得到如图4所示空间B样条曲线。

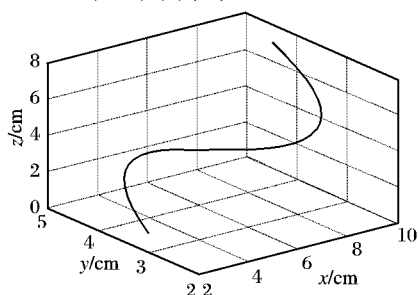


图4 空间6次B样条曲线

设定对该曲线按弧长进行均匀分段并求取分段点坐标值,设曲线距起始点分段弧长分别为1.9,3.8,5.7,7.6,9.5,11.4,其精度要求为0.01,限定弧长计算误差0.002,求出 $|\Delta| \leq 0.004$ 可满足分段精度要求,设置二分搜索的终止条件。程序运行后得到如图5所示符合精度要求的弧长分段点,其分段点的坐标值为:

x :3.1367, 4.4238, 5.5430, 6.7617, 8.0234, 9.0000
 y :4.0141, 4.0284, 2.9704, 2.1939, 2.6904, 4.0000
 z :2.1367, 3.4238, 4.5430, 5.7617, 7.0234, 8.0000

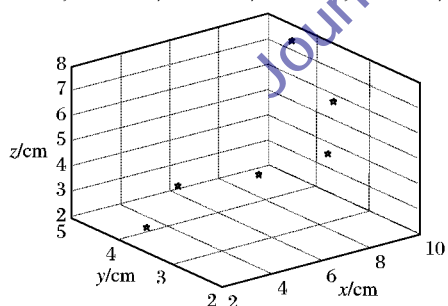


图5 6次B样条曲线等弧长分段点

5 结语

沿曲线路径对表面加工误差的检测中,在检测路径中按曲线弧长对分段点进行准确定位是保证检测点合理分布以及测量数据后续精确建模和误差分析的关键技术之一。

本文讨论了B样条曲线弧长计算方法并对弧长计算误差与分段误差的关系进行分析,通过建立弧长分段点搜索区间及二分法确定符合精度要求的弧长分段点。比较其他的弧长近似算法或近似弧长参数化方法所确定的分段点,该方法计算简便,并能较好地对弧长分段点进行精度控制。该方法对曲线弧长参数化方法没有限制,实验证明是解决参数曲线精确分段的有效方法。

参考文献:

- [1] 郑惠江,何改云,丁伯慧. 离散数据环境下复杂曲面检测点布局策略研究[J]. 机械工程学报, 2011, 47(24): 8-13.
- [2] 吴继春,唐小琦,陈吉红,等. 一种实时快速NURBS插补算法研究与实现[J]. 计算机集成制造系统, 2011, 17(6): 1224-1227.
- [3] LYU W. Curves with chord length parameterization[J]. Computer Aided Geometric Design, 2009, 26(3): 342-350.
- [4] BASTL B R, JÜTTLER B, LÁVICKA M, et al. Curves and surfaces with rational chord length parameterization[J]. Computer Aided Geometric Design, 2012, 29(5): 231-241.
- [5] PAPAIOANNOU S G, PATRIKOUSAKIS M M. Curve interpolation based on the canonical arc length parametrization[J]. Computer-Aided Design, 2011, 43(1): 21-30.
- [6] SAKKALIS T, FAROUKI R T, VASERSTEIN L. Non-existence of rational arc length parameterizations for curves in R^n [J]. Journal of Computational and Applied Mathematics, 2009, 228(1): 494-497.
- [7] MICHAL B, MIROSLAV L. A symbolic-numerical approach to approximate parameterizations of space curves using graphs of critical points[J]. Journal of Computational and Applied Mathematics, 2013, 242: 107-124.
- [8] 白鸿武. 参数曲线弧长的一种估算方法[J]. 机械科学与技术, 2010, 29(1): 24-27.
- [9] 白鸿武,叶正麟,张书玲. Bézier曲线的近似弧长参数化方法[J]. 计算机辅助设计与图形学学报, 2006, 18(8): 1165-1168.
- [10] 贾春阳,杨岳,陈峰,等. 弧长原则的NURBS曲线离散算法[EB/OL]. [2012-08-12]. <http://www.cnki.net/kcms/detail/11.2127.TP.201208011652.013.html>.
- [11] 施法中. 计算机辅助几何设计与非均匀有理B样条[M]. 北京: 北京航空航天大学出版社, 1994: 229-236.
- [12] 翟瑞彩,谢伟松. 数值分析[M]. 天津: 天津大学出版社, 2001: 201-213.

(上接第1397页)

- [8] 白向峰,李艾华,李喜来,等. 新型背景混合高斯模型[J]. 中国图象图形学报, 2011, 16(6): 983-988.
- [9] 金广智,石林锁,白向峰,等. 基于混合高斯模型的新型目标检测系统[J]. 计算机应用, 2011, 31(12): 3360-3365.
- [10] 王典,程咏梅,杨涛,等. 基于混合高斯模型的运动阴影抑制算法[J]. 计算机应用, 2006, 26(5): 1021-1026.
- [11] ZIVKOVIC Z, van der HEIJDEN F. Efficient adaptive density estimation per image pixel for the task of background subtraction[J]. Pattern Recognition Letters, 2006, 27(7): 773-780.
- [12] 贾棋,郭禾,宫宇. 一种实用的运动人体检测与阴影消除方法[J]. 系统仿真学报, 2009, 21(s2): 151-153.
- [13] 王宁. 图像的阴影检测与去除算法研究[D]. 北京: 北京交通大学, 2008.
- [14] 张杰,丁广太. 运动人体阴影检测算法[J]. 计算机工程与设计, 2010, 31(7): 1519-1522.
- [15] 王晓东,霍宏,方涛. 基于快速归一化互相关函数的运动车辆阴影检测算法[J]. 计算机应用, 2006, 26(9): 2065-2068.