

特征保留的稀疏表示图像去噪

马 路^{1*}, 邓承志², 汪胜前², 刘娟娟¹

(1. 江西科技师范大学 通信与电子学院, 南昌 330013; 2. 南昌工程学院 信息工程学院, 南昌 330099)

(* 通信作者电子邮箱 malu_wo@yahoo.cn)

摘要:稀疏表示理论认为在合适的冗余字典下, 图像存在最为稀疏的表示, 字典的过完备性, 使得通过提取很少量的大系数便能捕获到图像中的重要信息, 而且对噪声更加鲁棒。针对图像去噪, 为了更好地保留图像特征信息, 考虑人眼视觉特性, 研究过完备字典对噪声图像特征和边缘信息的有效表示, 提出以结构相似为信息保真度的特征保留的稀疏表示去噪算法。实验结果表明, 该算法能更好地对图像去噪, 对特征和边缘等信息的保留能力更强, 得到的图像视觉效果更佳。

关键词:稀疏表示; 图像去噪; 特征保留; 结构相似

中图分类号: TN911.73 **文献标志码:** A

Feature-retained image de-noising via sparse representation

MA Lu^{1*}, DENG Chengzhi², WANG Shengqian², LIU Juanjuan¹

(1. School of Communication and Electronics, Jiangxi Science and Technology Normal University, Nanchang Jiangxi 330013, China;

2. School of Information Engineering, Nanchang Institute of Technology, Nanchang Jiangxi 330099, China)

Abstract: According to the theory of sparse representation, images can be sparse-represented by using an appropriately redundant dictionary. The completeness can enable using very few big coefficients to capture the important information of images, and cause more robust to noise. Regarding image de-noising, considering the human visual characteristics, this paper studied the effective representation of characteristics and edge information of noisy image based on complete dictionary. For more effective feature retaining of images, a method of feature-retaining de-noising via sparse representation was proposed, which made the Structural SIMilarity (SSIM) as fidelity measure of the information. The experimental results indicate that the proposed algorithm has a better efficiency of de-noising, enhances the capacity of retaining feature, and gets a better visual effect of de-noised image.

Key words: sparse representation; image de-noising; feature retaining; structural similarity

0 引言

图像是信息获取的一种重要来源, 传输过程中常受到成像设备以及外部环境的影响, 产生了噪声图像, 给图像的分析带来不利影响。为此, 去噪成为图像处理中一个重要应用, 它作为图像处理中经典的逆问题, 给图像处理领域带来很多新思路。去噪的目的是为了尽可能地将实际图像与噪声信号分离开, 进而剔除噪声信号, 保留真实图像, 带来更好的视觉效果。

很多图像去噪方法根据图像频谱分布规律, 从频率上将图像中的有用信息与噪声分开, 例如小波去噪, 它认为噪声能量集中于高频, 图像有用信息的频谱则分布于一个有限区间。然而, 很多图像中, 高频也存在有用信息, 像边缘、纹理特征等, 在去噪的同时, 这种方法也丢失了部分有用信息; 另外, 噪声在低频也有一定分量, 简单地滤除高频成分无法去除这部分噪声分量。而且, 对于含更高维奇异性的图像, 小波去噪并不能达到最优的稀疏分解。

图像是一种多结构的复杂信号, 正交基系统很难对其稀疏表示。相对于小波变换, 超完备图像稀疏表示^[1]采用过完备字典对图像自适应地表示, 能够得到更为稀疏的表示。将

稀疏表示用于图像去噪^[2], 主要是基于稀疏的自适应性、不相关性以及原子化等特征。图像在过完备字典上分解, 自适应地根据图像信号本身特点选取原子, 利用正交匹配追踪算法 (Orthogonal Matching Pursuit, OMP)^[3]进行稀疏分解, 根据数据是否在字典上具有稀疏表示, 即将原始图像与噪声区分开, 达到去噪目的。

在稀疏表示研究^[4]中, 字典设计是研究重点, 1993年 Mallat 等^[5]首次提出超完备字典的概念, 随后, 产生了多尺度 Gabor 字典、多尺度脊波字典^[6]等研究成果。2006年, Aharon 等^[7]将 K -均值聚类方法推广为 K -奇异值分解 (K -Singular Value Decomposition, K -SVD) 算法, 用于字典更新, 在图像去噪领域取得了很好的效果。2009年, 邓承志^[8]对多尺度脊波字典的构造进行研究, 用于图像去噪, 取得不错的效果。

对过完备稀疏表示的研究了解到, 基于 K -SVD 算法进行稀疏去噪是用重构误差最小化作为保真度, 它能够使重构误差最小, 但是在特征信息等几何结构的恢复上存在不足。为了能有效去噪, 同时能最大限度地恢复图像几何特征, 本文结合对人眼视觉系统 (Human Visual System, HVS)^[9-10]与结构

收稿日期: 2012-11-28; 修回日期: 2013-01-07。

基金项目: 国家自然科学基金资助项目 (61162022); 江西省自然科学基金资助项目 (2009CZW0020); 江西省教育厅科技项目 (GJJ12632)。

作者简介: 马路 (1986-), 男, 湖北黄冈人, 硕士研究生, 主要研究方向: 图像稀疏表示; 邓承志 (1980-), 男, 江西赣州人, 副教授, 博士, 主要研究方向: 图像稀疏表示; 汪胜前 (1965-), 男, 江西浮梁人, 教授, 博士, 主要研究方向: 图像处理、模式识别; 刘娟娟 (1989-), 女, 安徽亳州人, 硕士研究生, 主要研究方向: 图像处理。

相似 (Structural SIMilarity, SSIM)^[11-12] 的图像质量评价的研究,以结构相似作为信息保真度,提出特征保留的稀疏表示图像去噪算法。实验结果表明算法能够更好地保持图像的特征,同时获得更高的峰值信噪比,得到的图像具有更好的视觉效果。

1 稀疏表示的图像去噪

基于过完备稀疏^[13]的图像表示方法,采用稀疏字典中原子的线性组合形式来实现图像稀疏表示,它不受仿射变换的影响,对噪声与误差更加鲁棒,给图像去噪^[14]领域带来极大的便利。

1.1 图像的稀疏表示

有效地建立图像数学模型为后续图像处理带来了很大的便利,可对噪声图像建立模型:

$$Y = X + H \tag{1}$$

其中: X 为原始图像, H 为加性噪声, Y 为含噪声图像。

在稀疏字典下,图像 X 可表示为: $X = D\alpha$ ($D \in \mathbb{R}^{N \times l}$), 当 α 中只有很少的系数不为零时称图像是可稀疏表示的,描述为以下最优化问题:

$$\min_{\alpha} \|\alpha\|_0 \tag{2}$$

s. t. $X = D\alpha$

或

$$\min_{\alpha} \|\alpha\|_0 \tag{3}$$

s. t. $\|X - D\alpha\|_2^2 \leq \varepsilon$

其中: $\|\cdot\|_0$ 表示 l_0 范数,用来计算矩阵中的非零元素, α 表示图像的稀疏分解。

通过对图像稀疏表示以及噪声图像模型描述,可以得到噪声图像的稀疏表示模型:

$$Y = X + H = D\alpha + H \tag{4}$$

其中: Y 为噪声图像, X 为原始图像, D 为过完备字典, α 为 X 在字典 D 下的稀疏表示, H 为噪声。对于给定的 D , 通过如下优化问题得到稀疏表示 $\hat{\alpha}$:

$$\hat{\alpha} = \arg \min_{\alpha} \|\alpha\|_0 \tag{5}$$

s. t. $\|D\alpha - Y\|_2^2 \leq M$

进而得到去噪图像: $\hat{X} = D\hat{\alpha}$ 。

利用拉格朗日乘子法,上述优化问题可用如下形式表达:

$$\hat{\alpha} = \arg \min_{\alpha} \|D\alpha - Y\|_2^2 + \mu \|\alpha\|_0 \tag{6}$$

约束项变为了惩罚项, μ 为拉格朗日乘子,用来平衡保真项和稀疏先验项。对于适当的 μ , 式(5)、(6)是等价转换的,为了表达的简化,之后的表示中都采用式(6)。

1.2 K-SVD 算法去噪

K-SVD 算法在稀疏编码和字典更新之间交替迭代、逐步寻找最优字典的方法,字典更新与稀疏编码结合,提高了算法收敛速度。在稀疏精度相同的情况下,它所选原子更少,对信号的表示也更稀疏,其算法模型为:

$$\{\hat{\alpha}_{ij}, D, \hat{X}\} = \arg \min_{\alpha_{ij}, X} \lambda \|X - Y\|_2^2 + \sum_{ij} \mu_{ij} \|\alpha_{ij}\|_0 + \sum_{ij} \|D\alpha_{ij} - R_{ij}X\|_2^2 \tag{7}$$

其中: R_{ij} 为取样矩阵,对图像进行块的提取; D 为过完备字典。对于每一个图像块,利用正交匹配追踪算法,通过求解如下优化问题可得到块的稀疏表示:

$$\hat{\alpha}_{ij} = \arg \min_{\alpha} \mu_{ij} \|\alpha\|_0 + \|D\alpha - X_{ij}\|_2^2 \tag{8}$$

得到 $\hat{\alpha}_{ij}$; 利用 K-SVD 算法对初始字典进行更新得到过完备字典 D ; 利用 OMP 算法、通过式(7)可以得到求解原始图像的近似 \hat{X} :

$$\hat{X} = \arg \min_X \lambda \|X - Y\|_2^2 + \sum_{ij} \|D\hat{\alpha}_{ij} - R_{ij}X\|_2^2 \tag{9}$$

然而,从式(8)、(9)可以看到, K-SVD 算法是基于重建误差平方和作为保真项求解,虽然可以使误差最小,但是研究表明,一定程度上,它忽略了对图像边缘、轮廓、纹理等局部几何特征的匹配。为了更好地保留图像的特征信息,本文提出特征保留的稀疏表示图像去噪算法。

2 特征保留的图像去噪

结合 K-SVD 算法和结构相似度量,本文提出基于结构相似的稀疏表示图像去噪算法,提高字典对图像的几何特征匹配,得到更好的去噪效果和视觉效果。

2.1 本文去噪算法

考虑到 K-SVD 算法在稀疏表示上的优点和结构相似在特征保留方面的优点,本文提出基于结构相似的稀疏表示去噪模型:

$$\{\hat{\alpha}_{ij}, D, \hat{X}\} = \arg \min_{\alpha_{ij}, X} \lambda \|X - Y\|_2^2 + \sum_{ij} \mu_{ij} \|\alpha_{ij}\|_0 + \sum_{ij} (1 - SSIM(D\alpha_{ij}, R_{ij}X)) \tag{10}$$

其中: α_{ij} 为图像块的稀疏分解, λ 为拉格朗日乘子, $SSIM(\cdot, \cdot)$ 表示求解结构相似度量值; 第一项为结构相似保真度, 第二项为先验约束项。

对已知过完备字典 D , 通过式(8)可得到图像的稀疏表示 $\hat{\alpha}$:

$$\hat{\alpha}_{ij} = \arg \min_{\alpha} \mu_{ij} \|\alpha\|_0 + (1 - SSIM(D\alpha, x_{ij}))$$

利用 $1 - SSIM(D\alpha, x_{ij}) < \tau$, 通过正交匹配追踪算法即可求解上式, 其中 $0 < \tau < 1$ 。

求出 $\hat{\alpha}_{ij}$, 通过式(9)可得到去噪图像, 它是一个简单的二次项的问题, 式(9)对 X 求偏导, 得到去噪图像的求解公式:

$$\hat{X} = (\lambda I + \sum_{ij} R_{ij}^T R_{ij})^{-1} (\lambda Y + \sum_{ij} R_{ij}^T D \hat{\alpha}_{ij})$$

2.2 结构相似度量

式(10)中 $SSIM(\cdot, \cdot)$ 表示求解结构相似度量, 它是基于人类视觉系统的图像质量的评价方法, 对于信号 $x = \{x_i | i = 1, 2, \dots, N\}$, $y = \{y_i | i = 1, 2, \dots, N\}$, 令 μ_x, σ_x^2 和 σ_{xy} 分别为 x 的平均值、标准方差以及 x, y 的协方差, μ_x 和 σ_x 是亮度和对比度, σ_{xy} 为 x, y 的变化趋势。定义结构相似度量为:

$$SSIM(x, y) = [l(x, y)]^a \cdot [c(x, y)]^b \cdot [s(x, y)]^c$$

其中: $SSIM(x, y)$ 为计算 x, y 之间的结构相似度, 令 $a = b = c = 1$, 得到结构相似度量的一般性计算公式:

$$SSIM(x, y) = \frac{(2\mu_x \mu_y + C_1)(2\sigma_{xy} + C_2)}{(\mu_x^2 + \mu_y^2 + C_1)(\sigma_x^2 + \sigma_y^2 + C_2)}$$

结构相似度量为大于 0 小于 1 的值, 越接近 1 说明 x, y 的在几何结构上越相似; 否则, 越不相似。

2.3 本文算法流程

利用初始过完备字典和正交匹配追踪算法进行稀疏分解的过程中, 以误差最小化作为保真度, 一定程度上忽略了图像的几何特征的匹配。因此, 本文提出一种新的稀疏分解模型,

以结构相似 $1 - SSIM(\mathbf{R}_y \mathbf{X}, \mathbf{D} \boldsymbol{\alpha}_y) < T$ 取代误差最小化 $\|\mathbf{D} \boldsymbol{\alpha}_y - \mathbf{R}_y \mathbf{X}\|_2^2 < (C\sigma)^2$ 作为保真度实现稀疏分解。

然后,利用奇异值分解(Singular Value Decomposition, SVD)进行字典的更新: $\mathbf{E}_k^s = \mathbf{U} \boldsymbol{\Delta} \mathbf{V}^T$,交替求解 $\tilde{\mathbf{d}}_k, \tilde{\boldsymbol{\alpha}}_T^k$,其中 \mathbf{U} 的第一列 $\tilde{\mathbf{d}}_k$ 即为更新的 $\mathbf{d}_k, \tilde{\boldsymbol{\alpha}}_T^k$ 为 \mathbf{V} 的第一列。第一列更新完毕,对所有原子逐个更新,产生新的字典 \mathbf{D} 。

最后,再次利用正交匹配追踪(OMP)算法和构造的字典 \mathbf{D} 得到去噪图像。

综上所述,可得到本文基于稀疏表示的去噪算法流程:

参数设置:训练块的大小 n ,字典大小 k ,训练次数 J ,拉格朗日乘子 λ ,噪声系数 σ 。

1) 初始化,令 $\mathbf{X} = \mathbf{Y}, \mathbf{D}$ 为过完备 DCT 字典。

2) J 次迭代:

a) 稀疏编码。在正交匹配追踪算法中加入结构相似度量,对每个块 $\mathbf{R}_y \mathbf{X}$ 进行稀疏编码,得到稀疏表示 $\boldsymbol{\alpha}_y$,目标函数:

$$\min_{\boldsymbol{\alpha}_i} (1 - SSIM(\mathbf{x}_i, \mathbf{D} \boldsymbol{\alpha}_i)); i = 1, 2, \dots, N$$

s. t. $\|\boldsymbol{\alpha}_i\|_0 \leq T_0$

b) 字典更新。对于字典 \mathbf{D} 中的每一 $l = 1, 2, \dots, k$,通过如下模型更新:

$$\min_{\boldsymbol{\alpha}_T^l} \left(1 - SSIM \left(\mathbf{X}, \sum_{j \neq k} \mathbf{d}_j \boldsymbol{\alpha}_T^j \right) \right)$$

s. t. $\boldsymbol{\alpha}_T^l \subseteq \boldsymbol{\omega}_k$

① $\boldsymbol{\omega}_k = \{i | 1 \leq i \leq K, \boldsymbol{\alpha}_T^l(i) \neq 0\}$,计算误差 $\mathbf{E}_k = \mathbf{X} - \sum_{j \neq k} \mathbf{d}_j \boldsymbol{\alpha}_T^j$,选择 $\boldsymbol{\omega}_k$ 中的列来约束 \mathbf{E}_k ;

② 利用SVD得到 $\mathbf{E}_k^s = \mathbf{U} \boldsymbol{\Delta} \mathbf{V}^T$, \mathbf{U} 的第一列即为更新后的字典原子, $\boldsymbol{\Delta}(1,1)$ 乘以 \mathbf{V} 的第一列即为稀疏矩阵更新后的第一列;

③ 以上步骤完成之后,字典进入下一次训练、更新,直至全部 J 次训练完成,得到稀疏字典。

3) 再次利用正交匹配追踪算法,求解 $\hat{\mathbf{X}}$,得到去噪之后的图像。

3 结果及分析

为了验证本文算法具有更好的去噪效果以及更强的特征保留能力,对 Barbara、Boat、Lena 加入标准差分别为 $\sigma = 15, 20, 25, 30$ 的高斯噪声,利用 K -SVD 算法和本文算法去噪。在相同环境(加入噪声、字典训练以及去噪)进行实验,以确保实验结果的准确性,对比峰值信噪比(Peak Signal-to-Noise Ratio, PSNR)(见表 1)和 SSIM(见表 2)以及视觉效果来说明算法的效果,PSNR 及 SSIM 的值越大,说明去噪效果越好。

可以看出,对同一图像,在加入噪声相同的情况下,本文算法得到的 PSNR 和 SSIM 普遍大于 K -SVD 算法所得到的值。例如表 1 中,对 Lena 图像加入标准差 $\sigma = 30$ 的噪声图像, K -SVD 算法去噪得到的 PSNR = 28.9129 dB,利用本文算法去噪 PSNR = 29.7595 dB;表 2 中,对 Lena 图像加入标准差 $\sigma = 30$ 的噪声图像, K -SVD 算法去噪得到的 SSIM = 0.8301,利用本文算法去噪的 SSIM = 0.8867。对 $\sigma = 30$ 的 Lena 图像,本文算法得到的 PSNR、SSIM 值比 K -SVD 算法分别要高 0.8466 dB 和 0.0566。对于其他图像加入不同噪声依然可以看出本文

算法在去噪和特征保留上的改善。这说明,本文算法比 K -SVD 算法能得到更好的峰值信噪比、结构相似度,得到的去噪图像具有更好的视觉效果。

表 1 本文算法和 K -SVD 去噪后计算 PSNR 的对比

| 选取图像 | 噪声标准差 | PSNR/dB | |
|---------|-------|-------------|---------|
| | | K -SVD 算法 | 本文算法 |
| Barbara | 15 | 30.9882 | 31.3942 |
| | 20 | 29.2695 | 29.8218 |
| | 25 | 27.7029 | 28.3015 |
| | 30 | 26.6467 | 27.0976 |
| Boat | 15 | 31.0613 | 31.5475 |
| | 20 | 29.5252 | 29.8262 |
| | 25 | 28.4761 | 28.7149 |
| | 30 | 27.5058 | 27.8525 |
| Lena | 15 | 32.7901 | 33.3425 |
| | 20 | 31.2443 | 31.8972 |
| | 25 | 29.7752 | 30.4816 |
| | 30 | 28.9129 | 29.7595 |

表 2 本文算法和 K -SVD 去噪后计算 SSIM 的对比

| 选取图像 | 噪声标准差 | SSIM | |
|---------|-------|-------------|--------|
| | | K -SVD 算法 | 本文算法 |
| Barbara | 15 | 0.9451 | 0.9601 |
| | 20 | 0.9160 | 0.9372 |
| | 25 | 0.8861 | 0.9124 |
| | 30 | 0.8735 | 0.8973 |
| Boat | 15 | 0.9328 | 0.9540 |
| | 20 | 0.8998 | 0.9258 |
| | 25 | 0.8730 | 0.8868 |
| | 30 | 0.8369 | 0.8494 |
| Lena | 15 | 0.9323 | 0.9557 |
| | 20 | 0.9017 | 0.9264 |
| | 25 | 0.8754 | 0.9071 |
| | 30 | 0.8301 | 0.8867 |

图 1、2 分别为对 Lena 图和 Einstein 图加入 $\sigma = 30$ 的高斯噪声,利用本文算法和 K -SVD 算法对其局部特征图像去噪的效果对比。

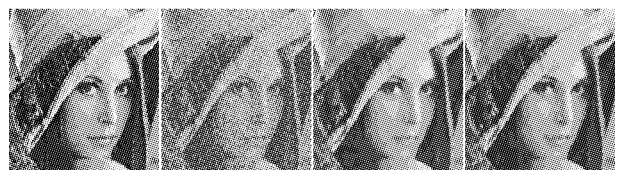


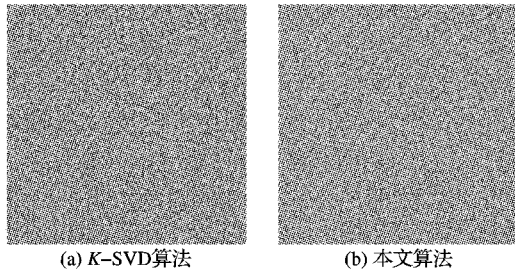
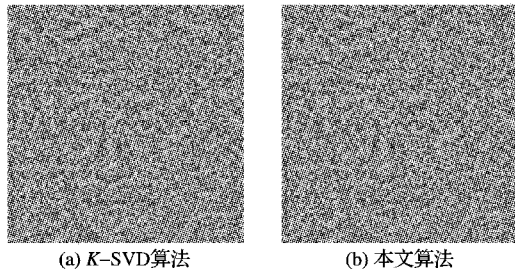
图 1 两种算法对 Lena 图的去噪对比 ($\sigma = 30$)



图 2 两种算法对 Einstein 图的去噪效果 ($\sigma = 30$)

图 3、4 分别给出了对 Lena 和 Einstein 图加入 $\sigma = 30$ 的高斯噪声,得到的去噪图像与噪声图像之间的残差图像。

由图可看出, K -SVD 算法在去除噪声的同时,丢失了部分边缘等特征,而本文算法能够很好地去除噪声,保留特征信息,具有较好的视觉效果。

图3 两种算法对 Lena 去噪后与原始图像之间的残差 ($\sigma = 30$)图4 两种算法对 Einstein 去噪后与原始图像之间的残差 ($\sigma = 30$)

4 结语

基于稀疏表示的图像去噪,结合 K -SVD 和结构相似的特性,本文提出了一种特征保留的稀疏表示图像去噪方法,得到了较高的 PSNR 和 SSIM 值,以及较好的视觉效果。实验中,对加入标准差 $\sigma = 25$ 的 Barbara 图像去噪时,本文算法得到的 PSNR 和 SSIM 比 K -SVD 算法分别要高 0.598 6 dB 和 0.026 3;在对其他图像分别加入不同噪声也是如此,本文算法得到的 PSNR、SSIM 也都高于原始 K -SVD 算法,说明在误差控制和特征信息保持方面,本文算法较 K -SVD 算法都有较好的改善。如何将构造的字典利用图像压缩以及图像超分辨率重建的问题上将是下一步研究的重点。

参考文献:

[1] ELAD M. Sparse and redundant representation: from theory to applications in signal and image processing[M]. New York: Springer, 2010.
 [2] ELAD M, AHARON M. Image denoising via sparse and redundant representations over learned dictionaries[J]. IEEE Transactions on Image Processing, 2006, 12(15): 3736-3745.

[3] PATI Y C, REZAIIFAR R, KRISHNAPRASAD P S. Orthogonal matching pursuit: recursive function approximation with applications to wavelet decomposition[C]// Proceedings of 1993 Conference Record of the Twenty-Seventh Asilomar Conference on Signals, Systems and Computers. Piscataway: IEEE Press, 1993, 1: 40-44.
 [4] RUBINSTEIN R, BRUCKSTEIN A M, ELAD M. Dictionaries for sparse representation modeling[J]. IEEE Proceedings Special Issue on Applications of Sparse Representation and Compressive Sensing, 2010, 98(6): 1045-1057.
 [5] MALLAT S, ZHANG Z. Matching pursuits with time-frequency dictionaries[J]. IEEE Transactions on Image Processing, 1993, 41(12): 3397-3415.
 [6] 邓承志, 曹汉强. 多尺度脊波字典的构造及其在图像编码中的应用[J]. 中国图象图形学报, 2009, 14(7): 1273-1278.
 [7] AHARON M, ELAD M, BRUCKSTEIN A M. K -SVD: An algorithm for designing over-complete dictionaries for sparse representation[J]. IEEE Transactions on Signal Processing, 2006, 54(11): 4311-4322.
 [8] 邓承志. 基于多尺度脊波字典的图像去噪算[J]. 计算机工程, 2010, 36(23): 207-208, 211.
 [9] 基于 PSNR 与 SSIM 联合的图像质量评价模型[J]. 计算机应用, 2007, 27(2): 503-506.
 [10] MOORTHY A K, BOVIK A C. Visual importance pooling for image quality assessment[J]. IEEE Journal of Selected Topics in Signal Processing, 2009, 3(2): 193-201.
 [11] WANG Z, BOVIK A C, SHEIKH H R, et al. Image quality assessment: from error visibility to structural similarity[J]. IEEE Transactions on Signal Processing, 2004, 13(4): 600-612.
 [12] WANG Z, BOVIK A C. Mean squared error: Love it or leave it? A new look at signal fidelity measures[J]. IEEE Signal Processing Magazine, 2009, 26(1): 98-117.
 [13] MAIRAL J, ELAD M, SAPIRO G. Sparse representation for color image restoration[J]. IEEE Transactions on Image Processing, 2008, 17(1): 53-69.
 [14] 蔡泽民, 赖剑煌. 一种基于超完备字典学习的图像去噪方法[J]. 电子学报, 2009, 37(2): 347-350.

(上接第 1415 页)

[11] DUDA R O, HART P E. Use of the Hough transformation to detect lines and curves in pictures [R]. Menlo Park, California, USA: SRI International Artificial Intelligence Center, 1971.
 [12] KIRYATI N, ELДАР Y, BRUCKSTEIN A M. A probabilistic Hough transform [J]. Pattern Recognition, 1991, 24(4): 303-316.
 [13] CENSI A, CARPIN S. HSM3D: Feature-less global 6DOF scan-matching in the Hough/Radon domain [C]// ICRA'09: Proceedings of the 2009 IEEE International Conference on Robotics and Automation. Piscataway: IEEE, 2009: 3899-3906.
 [14] ZAHARIA T, PRETEUX F. Shape-based retrieval of 3D mesh models [C]// Proceedings of the 2002 IEEE International Conference on Multimedia and Expo. Piscataway: IEEE, 2002, 1: 437-440.
 [15] BORRMANN D, ELSEBERG J, LINGEMANN K, et al. The 3D Hough transform for plane detection in point clouds: a review and new accumulator design [J]. 3D Research, 2011, 2(3): 1-13.
 [16] YLÄ-JÄÄSKI A, KIRYATI N. Adaptive termination of voting in

the probabilistic circular Hough transform [J]. IEEE Transactions on Pattern Analysis and Machine Intelligence, 1994, 16(9): 911-915.
 [17] TARSHA-KURDI F, LANDES T, GRUSSENMEYER P. Hough transform and extended RANSAC algorithms for automatic detection of 3D building roof planes from LiDAR data [C]// ISPRS Proceedings of Workshop Laser scanning, 2007. Espoo, Finland: HAL-CCSD, 2007, XXXVI(1): 407-412.
 [18] ZULIANI M, KENNEY C, MANJUNATH B. The multi-RANSAC algorithm and its application to detect planar homographies [C]// International Conference on Image Processing. Piscataway: IEEE, 2005: 153-156.
 [19] Institute of Computer Science, Knowledge-based Systems Research Group. Robotic 3D scan repository [EB/OL]. [2012-10-17]. <http://kos.informatik.uni-osnabrueck.de/3Dscans/>.
 [20] SNAVELY N. Bundler: Structure from Motion (SfM) for unordered image collections [EB/OL]. [2012-08-11]. <http://phototour.cs.washington.edu/bundler/>.