

## 基于字典学习的非局部均值去噪算法

崔学英<sup>1,2\*</sup>, 张 权<sup>1</sup>, 桂志国<sup>1</sup>

(1. 中北大学 电子测试技术国防重点实验室, 太原 030051; 2. 太原科技大学 应用科学学院, 太原 030024)

(\* 通信作者电子邮箱 xyngcui@126.com)

**摘 要:**针对非局部均值中相似度的衡量问题,提出了一种基于字典学习的度量算法。首先利用局部像素群块匹配方法消除不相似的图像块带来的干扰,然后对含有噪声的相似块采用字典学习的方法降噪。与经典的字典学习不同的是,对相似块采用联合稀疏编码的思想,利用主成分分析法学习一个高效紧字典,保留相似块间的相关性信息。采用降噪后的图像块间的欧氏距离计算像素间的相似度,能更好地反映相似块的相似性。实验结果表明,所提出的方法在峰值信噪比和视觉效果方面都优于传统算法,尤其对含有较多细节且结构相似性强的图像,细节和纹理部分的保持效果更好,算法的鲁棒性也优于传统算法。

**关键词:**图像去噪;字典学习;主成分分析;稀疏表示;非局部均值

**中图分类号:** TP317.4 **文献标志码:** A

### Non-local means denoising approach based on dictionary learning

CUI Xueying<sup>1,2\*</sup>, ZHANG Quan<sup>1</sup>, GUI Zhiguo<sup>1</sup>

(1. National Key Laboratory for Electronic Measurement Technology, North University of China, Taiyuan Shanxi 030051, China;

2. School of Applied Science, Taiyuan University of Science and Technology, Taiyuan Shanxi 030024, China)

**Abstract:** Concerning the measurement of the similarity of non-local means, a method based on dictionary learning was presented. First, block matching based local pixel grouping was used to eliminate the interference by dissimilar image blocks. Then, the corrupted similar blocks were denoised by dictionary learning. As a further development of classical sparse representation model, the similar patches were unified for joint sparse representation and learning an efficient and compact dictionary by principal component analysis, so that the similar patches relevancy could be well preserved. This similarity between the pixels was measured by the Euclidean distance of denoised image blocks, which can well show the similarity of the similar blocks. The experimental results show the modified algorithm has a superior denoising performance than the original one in terms of both Peak Signal-to-Noise Ratio (PSNR) and subjective visual quality. For some images whose structural similarity is large and with rich detail information, their structures and details are well preserved. The robustness of the presented method is superior to the original one.

**Key words:** image denoising; dictionary learning; Principal Component Analysis (PCA); sparse representation; non-local means

## 0 引言

图像在传输和获取等过程中,不可避免地会受到噪声干扰而造成图像的降质;而在许多应用领域中,又需要清晰的、高质量的图像,因此,图像去噪具有重要的意义,一直是图像处理领域的一个重要的研究课题。经典的降噪方法有邻域滤波法、中值法以及频域滤波法。近年来,基于字典学习的降噪方法<sup>[1-2]</sup>和非局部均值(Non-Local Means, NLM)方法<sup>[3-4]</sup>受到了国内外学者的广泛关注。

字典学习和稀疏表示理论<sup>[1-2]</sup>在图像处理领域的应用十分广泛,用于图像去噪<sup>[1]</sup>、图像修复<sup>[5]</sup>、超分辨率重建<sup>[6]</sup>等方面。去噪方法主要是从大规模的样本数据中提取过完备字典,利用过完备字典的冗余性对图像进行稀疏表示,能够有效地捕捉图像的结构特征,在去除噪声的同时更好地保持图像信息,比如,基于字典学习  $K$ -SVD 去噪方法<sup>[1]</sup>。但该方法只是应用待处理图像块内的信息进行独立稀疏编码,没有充分

考虑与其他样本图像的相关信息,比如块与块之间的重叠性、相似性等,对先验信息的表达能力有限。另一方面在过完备字典上的稀疏分解是潜在不稳定的,容易产生视觉伪影<sup>[7-8]</sup>。近年来,作为稀疏表示问题的进一步发展,有关多信号的联合稀疏表示问题得到了关注,称为联合稀疏编码<sup>[9-10]</sup>,它使得相似的图像块在稀疏表示时分享相同的字典原子,从而可以避免独立稀疏编码所存在的不稳定性。

Buades 等提出的非局部均值的基本思想是利用图像中具有重复结构的先验信息去噪,消除了传统邻域滤波算法中出现的伪影。文献[3]中 NLM 定义为:对于含有零均值,标准方差为  $\sigma$  高斯白噪声  $N(i)$  的噪声模型  $V(i) = X(i) + N(i)$  ( $i \in I$ ),其中:  $V(i)$  为受污染的噪声图像,  $X(i)$  为未受噪声污染的原图像。像素集合  $I$  中任意像素点  $i$  的被滤波的灰度值为

$$NL[V][i] = \sum_{j \in I} \omega(i, j) V(j) \quad (1)$$

其中:权值  $\omega(i, j) = \frac{1}{Z(i)} \exp\left(-\frac{d(i, j)}{h^2}\right)$ ,  $Z(i) =$

**收稿日期:**2012-11-12; **修回日期:**2012-12-24。 **基金项目:**国家自然科学基金资助项目(61071192, 61271357);山西省自然科学基金资助项目(2009011020-2);山西省研究生优秀创新项目(20123098);太原科技大学青年基金资助项目(20113019)。

**作者简介:**崔学英(1978-),女,山西临汾人,讲师,博士研究生,主要研究方向:图像处理、微分方程应用;张权(1974-),男,山西大同人,讲师,博士研究生,主要研究方向:图像处理、科学可视化;桂志国(1972-),男,河北藁县人,教授,博士,主要研究方向:无损检测、图像处理。

$\sum_j \exp\left(-\frac{d(i,j)}{h^2}\right)$  为归一化常数, 参数  $h$  控制指数函数的衰减速度,  $d(i,j)$  为像素点  $i$  和  $j$  的相似度, 由图像块  $N_i$  与  $N_j$  的灰度值向量  $V(N_i)$  与  $V(N_j)$  的高斯加权的欧氏距离来度量, 即

$$d(i,j) = \|V(N_i) - V(N_j)\|_{2,\alpha}^2 \quad (2)$$

其中  $N_i$  表示以像素点  $i$  为中心的固定大小的方形邻域, 称之为图像块。该方法把搜索窗内所有的图像块都参与计算, 而那些相似度低或者不相似的图像块会影响算法的去噪效果<sup>[11]</sup>。在文献[11]中通过优化指数型核函数来消除影响, 提出一种新的余弦型高斯核函数。另外在相似度的测量时, 灰度值向量取自含有噪声的图像, 不能很好地反映像素之间的相似性。

本文针对非局部均值方法的上述问题, 利用联合稀疏编码的优越性能, 提出一种基于字典学习的非局部均值去噪算法。首先采用块匹配方法在搜索窗内寻找与待处理图像块相似的图像块, 消除相似度低或者不相似的图像块的影响。块匹配方法有基于相关系数的匹配法、K-means 聚类法等。本文采用文献[12]提出的局部像素群(Local Pixel Grouping, LPG)块匹配方法。然后对相似块进行联合稀疏表示, 训练高效的学习字典, 利用字典对相似块降噪。采用降噪后的图像块计算像素间的相似度, 能更好地反映相似块的相似性, 同时提高了NLM的去噪性能。

## 1 基于字典学习的非局部均值去噪方法

### 1.1 局部像素群

LPG 是一种块匹配方法, 在当前待处理像素为中心的较大搜索窗内寻找与待处理图像块(以待处理像素为中心)相似的图像块, 消除不相似的图像块带来的干扰。

设搜索窗的大小为  $L \times L$ , 在搜索窗内共有  $(L-K+1)^2$  个可能的训练块, 设  $x_0^v$  是  $N_i$  对应的列向量,  $x_i^v (i=1, 2, \dots, (L-K+1)^2-1)$  为其余的训练块对应的列向量。  $x_0$ ,  $x_i$  分别为  $x_0^v$  和  $x_i^v$  相应的无噪声的列向量, 满足关系式

$$e_i = \frac{1}{m} \sum_{k=1}^m (x_0^v(k) - x_i^v(k))^2 \approx \frac{1}{m} \sum_{k=1}^m (x_0(k) - x_i(k))^2 + 2\sigma^2 \quad (3)$$

其中  $m = K \times K$ 。若

$$e_i < T + 2\sigma^2 \quad (4)$$

其中:  $T$  为阈值, 则  $x_i^v$  为  $x_0^v$  的一个相似向量。设包括  $x_0^v$  总共  $n$  个, 记为  $S_i^v = [x_0^v, x_1^v, \dots, x_{n-1}^v]$ , 相应无噪声的记为  $S_i = [x_0, x_1, \dots, x_{n-1}]$ 。下面利用字典学习的方法从含噪声的  $S_i^v$  中估计出  $S_i$ , 从而就可以利用降噪后的图像块的灰度值来计算相似度。

### 1.2 字典的选取

从  $S_i^v$  中学习一个字典  $\Phi_i$ , 使得在  $S_i^v$  中的每一个图像块都能够被  $\Phi_i$  表示, 而且尽可能的稀疏, 即满足

$$(\hat{\Phi}_i, \hat{A}_i) = \arg \min_{\Phi_i, A_i} \{ \|S_i^v - \Phi_i A_i\|_F^2 + \lambda \|A_i\|_1 \} \quad (5)$$

其中:  $A_i$  为系数矩阵,  $\hat{S}_i = \Phi_i A_i$  为  $S_i^v$  的估计, 即为降噪后的相似图像块的灰度值矩阵。利用 K-SVD 方法, 可得到  $S_i^v$  的估计, 但训练出来的字典往往是过完备的, 使得相似块的稀疏表示差异很大<sup>[9]</sup>。考虑到  $S_i^v$  所具有的先验信息:  $S_i^v$  包含的图像块的个数较少且具有相似的模式。因此可按文献[9]中的方法对  $S_i^v$  进行联合稀疏编码, 即

$$\min_{\Phi_i, A_i} \|A_i\|_{pq}, \|S_i^v - \Phi_i A_i\|_2^2 \leq \varepsilon \quad (6)$$

其中:  $\|A_i\|_{pq} \triangleq \sum_{j=1}^k (\|\alpha^j\|_q)^p$ ,  $\alpha^j$  为  $A_i$  的第  $j$  行,  $k$  为  $A_i$  的行数。该方法通过限制  $A_i$  的非零行的行数, 使得相似的图像块在稀疏表示时具有相同的原子, 该方法中  $S_i^v$  仅用到了字典  $\Phi_i$  中的一部分原子。而图像块之间的结构相似性, 也说明了  $S_i^v$  具有的结构元素也很有限, 所以本文对  $S_i^v$  训练一个紧字典而不是过完备字典。而对  $S_i^v$  的训练可转为对它中心化后的矩阵  $\bar{S}_i^v$  训练。

令  $X_k^v$  为  $S_i^v$  的第  $k$  行,  $X_k$  为  $S_i$  的第  $k$  行, 噪声矩阵  $N_i = (N_1^T, N_2^T, \dots, N_m^T)^T$ , 则  $S_i = ((X_1)^T, (X_2)^T, \dots, (X_m)^T)^T$ ,  $S_i^v = ((X_1^v)^T, (X_2^v)^T, \dots, (X_m^v)^T)^T$ ,  $S_i^v = S_i + N_i$ 。设  $X_k^v$  的均值为  $\mu_k$ , 中心化  $X_k^v$  后的向量记为  $\bar{X}_k^v$ , 即  $\bar{X}_k^v = X_k^v - \mu_k$ 。由于噪声为零均值的,  $X_k$  被中心化后  $\bar{X}_k = X_k - \mu_k$ , 则  $S_i^v$  和  $S_i$  的中心化矩阵分别为  $\bar{S}_i^v = ((\bar{X}_1^v)^T, (\bar{X}_2^v)^T, \dots, (\bar{X}_m^v)^T)^T$  和  $\bar{S}_i = ((\bar{X}_1)^T, (\bar{X}_2)^T, \dots, (\bar{X}_m)^T)^T$ , 并且  $S_i^v = \bar{S}_i^v + N_i$ 。令  $\mu = (\mu_1, \mu_2, \dots, \mu_m)^T$ ,  $M = (\mu, \mu, \dots, \mu)$ , 则  $S_i^v = \bar{S}_i^v + M$ , 所以对

$S_i^v$  训练得到  $\bar{S}_i$  的估计  $\hat{\bar{S}}_i$ , 再加上  $M$  即可得到  $S_i^v$  的估计。

本文利用主成分分析(Principal Component Analysis, PCA)法对  $\bar{S}_i^v$  采用联合稀疏编码的思想找一个紧字典。PCA 是一种经典的去相关和降维技术, 被广泛用于模式识别和统计信号处理中。目前, 它已经被成功用于图像去噪<sup>[12-13]</sup>和字典学习<sup>[6]</sup>中。在文献[12]中, Zhang 先用 PCA 进行变换, 然后运用 LMMSE 技术进行降噪。在文献[13]中, Tasdizen 利用 PCA 对图像块降维, 加速了非局部算法的实现。在文献[6]中, Dong 等运用 PCA, 在干净的相似的样本图像块上训练紧字典。而在本文中, 把 PCA 用于含噪的每一个  $\bar{S}_i^v$  训练字典, 达到去噪的目的。

令  $\Omega_i$  为  $\bar{S}_i^v$  的协方差矩阵, 它是一个对称矩阵, 能够表示为

$$\Omega_i = P_i \Lambda P_i^T \quad (7)$$

其中:  $P = [P_1, P_2, \dots, P_m]$  为正交矩阵,  $\Lambda = \text{diag}[\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_m]$  且  $\lambda_1 \geq \lambda_2 \geq \dots \geq \lambda_m$ 。  $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_m$  为  $\Omega_i$  的特征值,  $P_1, P_2, \dots, P_m$  分别为  $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_m$  对应的特征向量。令  $\bar{Y}_i = P_i^T \bar{S}_i^v$ , 则有  $\bar{S}_i^v = P_i \bar{Y}_i$ , 但不满足式(5)中的稀疏要求。为了达到要求, 本文仅仅取前  $r$  个特征值对应的特征向量组成  $\bar{\Phi}_i$ , 令  $A_i = \bar{\Phi}_i^T \bar{S}_i^v$ ,  $\|\bar{S}_i^v - \bar{\Phi}_i A_i\|_F^2$  随着  $r$  的增加而减少, 但  $\|A_i\|_1$  会减少。因此可由

$$r_0 = \arg \min_r \{ \|\bar{S}_i^v - \bar{\Phi}_i A_i\|_F^2 + \lambda \|A_i\|_1 \} \quad (8)$$

来决定  $r$  的最优值  $r_0$ 。为了书写的方便, 把记号重新记一下,  $\hat{\bar{S}}_i$  为  $\bar{S}_i^v$  训练得到  $\bar{S}_i$  的估计,  $\hat{\bar{S}}_i = \bar{\Phi}_i A_i$ , 其中字典  $\bar{\Phi}_i = [P_1, P_2, \dots, P_{r_0}]$ ,  $A_i = \bar{\Phi}_i^T \bar{S}_i^v$ ,  $\hat{\bar{S}}_i + M$  为  $S_i^v$  的估计, 即为降噪后的相似图像块的灰度值矩阵。

### 1.3 相似度的计算

用降噪后图像块的灰度值矩阵  $\hat{\bar{S}}_i + M$  列向量间的欧氏距离来计算相似度。根据欧氏距离的定义和正交字典的性质, 相似度的计算转化为计算矩阵  $A_i$  列向量间的欧氏距离。  $A_i$  列向量的维数为  $r_0$ ,  $r_0 < m$ , 此时相似度的计算在一个低维的空间中进行, 可减少计算相似度的时间。利用降噪后图像块的灰度值计算相似度, 能更好地反映相似块的相似性。

## 2 实验与分析

为了验证本文所提出方法的有效性, 以 Matlab7.1 为编

程工具,实验数据采用国际标准测试图像叠加不同标准差的高斯白噪声得到降质灰度图像,如图1所示,像素大小为 $256 \times 256$ 。



图1 原图与加噪图像( $\sigma = 20$ )

将传统的 NLM 算法和本文算法分别应用于图1所示的图像,添加均值为0,标准差 $\sigma$ 分别为15、20、25、30的高斯噪声,相似块的大小 $K \times K = 7 \times 7$ ,搜索窗 $L \times L = 21 \times 21$ , NLM 算法中 $h = 0.9\sigma$ ;本文算法中 $h = 4.5\sigma$ ,阈值 $T = 25$ , $r_0$ 为自适应的,为了简单起见,可取 $r_0 = 6$ 。上述方法中的参数均为手工设置,以达到最好的视觉效果。从图2降噪后的图像可以看出本文算法去噪后的视觉效果比 NLM 算法好,保留了原图像更多的细节信息。为了更好地对比去噪后的细节信息,图3给出了图2局部细节放大图像。本文算法箭头所指部位都比 NLM 清晰。由于 NLM 算法使用含噪的图像块计算相似度,噪声的影响使得细节部分变得模糊。本文算法使用字典学习对图像块进行降噪,而字典学习能够有效地捕捉图像的结构特征,较好地保留图像的细节信息,从而使去噪后图像的细节部分更接近原图。由于相似度低或者不相似的图像块会影响算法的去噪效果,而局部像素群能消除这种干扰,因此取得了更好的去噪性能。



图2 NLM 算法和本文算法的去噪效果对比

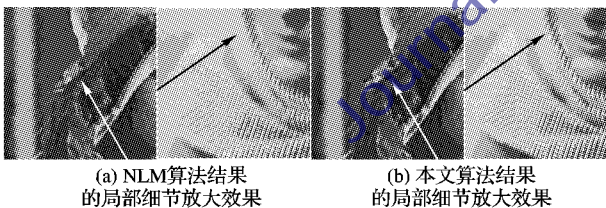


图3 NLM 算法和本文算法去噪图像局部放大效果对比

客观上采用定量评价指标峰值信噪比(Peak Signal-to-Noise Ratio, PSNR),大小为 $M \times N$ 的原图像 $f$ 和去噪图像 $u$ 的 PSNR 定义如下:

$$PSNR = 10 \lg \frac{255^2}{\frac{1}{M \times N} \sum_{i=1}^M \sum_{j=1}^N [f(i, j) - u(i, j)]^2}$$

从表1、2中可以看出,本文算法对结构纹理性强的图像的去噪效果比 NLM 好;对加入不同标准差的高斯白噪声的图像,本文算法的峰值信噪比都高于 NLM。随着噪声的增强,本文算法的优势更明显。

表1 Lena 图像的 PSNR dB

$\sigma$	NLM	本文算法	$\sigma$	NLM	本文算法
15	31.0029	31.0981	25	28.3091	28.5661
20	29.4981	29.6753	30	27.3329	27.6555

表2 Barbara 图像的 PSNR dB

$\sigma$	NLM	本文算法	$\sigma$	NLM	本文算法
15	31.4354	31.5092	25	28.3001	28.8715
20	29.7137	30.0170	30	27.1253	27.8504

### 3 结语

本文针对含有较多细节和纹理的图像,提出了一种基于字典学习的非局部均值去噪算法,把字典学习融入非局部均值中。为了避免相似度低或者不相似的图像块影响算法的去噪效果,采用局部像素群法在局部搜索窗内排除掉不相似的图像块,利用主成分分析对相似的图像块采用联合稀疏编码的思想找一个紧字典,对相似块进行降噪,采用降噪后的图像块计算像素间的相似性。所得算法可以有效改善对图像细节和纹理部分的处理,比 NLM 算法去噪后的视觉效果更好。尤其对于结构相似性强的图像的效果更佳,并且随着噪声的增强,本文算法的优势更明显。该算法还有待改进的地方,比如相似块的匹配问题,是当前正在进行的研究工作。

#### 参考文献:

- [1] ELAD M, AHARON M. Image denoising via sparse and redundant representations over learned dictionaries[J]. IEEE Transactions on Image Processing, 2006, 15(12): 3736-3745.
- [2] AHARON M, ELAD M, BRUCKSTEIN A M. The K-SVD: an algorithm for designing of overcomplete dictionaries for sparse representation[J]. IEEE Transactions on Signal Processing, 2006, 54(11): 4311-4322.
- [3] BUADES A, COLL B, MOREL J M. A review of image denoising algorithms, with a new one[J]. Multiscale Modeling and Simulation, 2005, 4(2): 490-530.
- [4] BUADES A, COLL B, MOREL J M. Nonlocal image and movie denoising[J]. International Journal of Computer Vision, 2008, 76(2): 123-139.
- [5] 李民,程建,李小文,等.非局部学习字典的图像修复[J].电子与信息学报,2011,38(11): 2672-2678.
- [6] DONG W S, ZHANG L, SHI G M, et al. Image deblurring and super-resolution by adaptive sparse domain selection and adaptive regularization[J]. IEEE Transactions on Image Processing, 2011, 20(7): 1838-1857.
- [7] ELAD M, YAVNEH I. A plurality of sparse representation is better than the sparsest one alone[J]. IEEE Transactions on Information Theory, 2009, 55(10): 4701-4714.
- [8] PROTTER M, YAVNEH I, ELAD M. Closed-form MMSE estimation for signal denoising under sparse representation modeling over a unitary dictionary[J]. IEEE Transactions on Signal Processing, 2010, 58(7): 3471-3484.
- [9] MAIRAL J, BACH F, PONCE J, et al. Non-local sparse models for image restoration[C]// 2009 IEEE 12th International Conference on Computer Vision. New York: IEEE, 2009: 2272-2279.
- [10] TROPP J A. Algorithms for simultaneous sparse approximation[J]. Signal Processing, 2006, 86(3): 572-602.
- [11] 刘晓明,田雨,何徽,等.一种改进的非局部均值图像去噪算法[J].计算机工程,2012,38(4): 199-201.
- [12] ZHANG L, DONG W S, ZHANG D, et al. Two-stage image denoising by principal component analysis with local pixel grouping[J]. Pattern Recognition, 2010, 43(4): 1531-1549.
- [13] TASDIZEN T. Principal components for non-local means image denoising[C]// 15th International Conference on Image Processing. New York: IEEE, 2008: 1728-1731.