

基于下三角 H 矩阵的 LDLC 整形研究

朱联祥, 罗洪瑜*

(重庆邮电大学 信号与信息处理重庆市重点实验室, 重庆 400065)

(* 通信作者电子邮箱 llhhyfly@163.com)

摘要: 针对低密度格码(LDLC)编码后不能适应在功率限制的加性高斯白噪声(AWGN)信道上传输的问题, 研究了编码前的整形问题。构造了一种特殊结构的下三角 H 矩阵, 并结合超立方整形和系统整形方案, 分析并仿真了整形前后格点的变化及取得的整形增益。结果显示: 整形后的码字沿格的 Voronoi 域均匀分布, 并当码长为 10 000、误码率为 10^{-5} 时, 可得到 1.31 dB 的整形增益, 相对于传统的整形技术提高了 0.31 dB。通过整形, 有效地产生了功率受限的格点。

关键词: 低密度格码; 格点; 超立方整形; 系统整形

中图分类号: TN911.22 **文献标志码:** A

Shaping method for low-density lattice codes based on lower triangular matrix

ZHU Lianxiang, LUO Hongyu*

(Chongqing Key Laboratory of Signal and Information Processing, Chongqing University of Posts and Telecommunications, Chongqing 400065, China)

Abstract: To solve the problem that Low Density Lattice Codes (LDLC) cannot be used on the constrained power communication Additive White Gaussian Noise (AWGN) channel, the shaping methods were studied. In this paper, a lower triangular H matrix with a special structure was constructed first, together with the hypercube and systematic shaping method, and then the average power was fixed, the position change of lattice point before and after the shaping process, and its corresponding shaping gain were analyzed. The simulation results show that the codeword is uniformly distributed within the Voronoi regions of the lattice after shaping, and these shaping methods can achieve a shaping gain of 1.31 dB when Symbol Error Rate (SER) 10^{-5} and code length 10 000 which improves 0.31 dB compared with the traditional shaping technique. Power limited lattice points were generated efficiently after shaping.

Key words: Low Density Lattice Codes (LDLC); lattice point; hypercube shaping; systematic shaping

0 引言

格码(lattice codes)可以看作是类似线性二进制码字的欧氏空间, 能够达到加性高斯白噪声(Additive White Gaussian Noise, AWGN)信道的信道容量^[1], 它提供了一个连续字符的编码方法, 将整数值信息比特转化为欧氏空间的格点, 可以看作是无限星座点在欧氏空间的子集。2007 年 Sommer 等提出了低密度格码(Low Density Lattice Codes, LDLC)^[2], 它是一种切实可行的、可达到信道容量的格码。近年来, 许多学者都对 LDLC 进行了相关研究, 并证明当码长为 $n=10000$ 、误码率为 10^{-5} 时, LDLC 距离信道容量仅 0.8 dB, 其译码器具有较低的复杂度^[3-5]。因此, LDLC 在 AWGN 信道上及在多人多出(Multiple-Input Multiple-Output, MIMO)通信系统中都具有极大的潜力。

目前 LDLC 的研究主要围绕编译码算法及 H 矩阵的构造展开^[6-7], 然而为了满足功率受限的条件, LDLC 编码前需要进行整形处理。最优的整形方案是将码字映射到球形的整形区域内, 以使每个码字都能服从高斯分布, 在理论上这可以实现 1.53 dB 的整形增益^[8], 然而实际操作中却难以实现。所以, 一般地是将码字映射到有限的星座图上, 使最终传输的信号在每个星座点上都能均匀分布。

本文通过构造一种特殊的下三角 H 矩阵, 以将码字序列

映射到不同长度的星座点上, 进而通过对两种整形方案的讨论, 分析了格点在整形前后的变化, 并对其整形增益进行了仿真分析。

1 格码的定义

一般通过 $n \times n$ 的生成矩阵 G 来定义一个 n 维格 Λ , 它由 n 个 n 维欧氏空间中线性独立的列矢量 $g_1, \dots, g_n \in \mathbf{R}^n$ 构成, 即:

$$G = [g_1 \ g_2 \ \dots \ g_n] = \begin{bmatrix} g_{11} & \dots & g_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ g_{n1} & \dots & g_{nn} \end{bmatrix} \quad (1)$$

格中的任意一个格点均可用 n 个线性独立行向量的整系数线性组合表示, 即:

$$\Lambda = \{x = Gb; b \in \mathbf{Z}^n\} \quad (2)$$

定义 $H = G^{-1}$ 为此格的校验矩阵。格 Λ 中格点 x 的 Voronoi 域定义为围绕每个格点的一个区域, 每个格点的 Voronoi 域均满足域中的任意一点到该格点的距离比到其他所有格点的距离都不大。 $V(0)$ 称为格 Λ 的 Voronoi 域, 它的容量为 $V(\Lambda) = \det(G)$ ^[9]。

2 LDLC 及其整形

LDLC 是这样一种 n 维格码, 它也可以通过非奇异生成

收稿日期: 2013-01-30; 修回日期: 2013-03-08。

作者简介: 朱联祥(1971-), 男, 陕西户县人, 教授, 博士, 主要研究方向: 无线定位、通信信号处理、数字信号处理、信息论与编码; 罗洪瑜(1987-), 女, 四川南部人, 硕士研究生, 主要研究方向: 信道编码、信号与信息处理。

矩阵 G 来定义,其中 G 满足 $|\det(G)| = 1$ 、校验矩阵 H 满足稀疏特性,它将整数信息矢量 b 直接线性变换成为 n 维空间的码字,即: $x = Gb$,其中,校验矩阵 H 为生成矩阵 G 的逆矩阵。构造 LDLC 的实质就是构造 H 矩阵或 G 矩阵,其编码格用 A_c 来表示。

根据定义, G 不具备稀疏特性,如果由 G 和信息矢量直接相乘来得到编码码字,其计算复杂度为 $O(n^2)$,因此,为了降低编码复杂度,一般利用 H 的稀疏特性,采用 Jacobi 方法求解方程 $Hx = b$ 来实现高效编码,其复杂度为 $O(n)$ 。

通过编码,可以使最小欧氏距离增大,误码率降低,但也会使信号平均功率增大。所以一般在编码前通过整形处理,使得输入信息序列只映射到属于整形区域的格点上,从而使信号平均功率保持在一定的范围以内^[10]。把原来映射到格点 $x = Gb$ 的信息矢量 b 改为映射到整形区域内的一些格点 $x' = Gb'$,即把矢量 b 映射为矢量 b' ,这个过程就叫作整形^[9]。目前,一般的整形方法能取得 1 dB 左右的整形增益。

所以 LDLC 是由生成格 $A_c (\subset \mathbf{R}^n)$ 及整形区域格 $B (\subset \mathbf{R}^n)$ 共同决定的,其中 B 是 A_c 的子格。

2.1 H 矩阵的构造

一般地,LDLC 的 H 矩阵是方阵,且行和列的度数 d 相等,即非零元素个数相同。 H 矩阵是通过生成序列来构造的,即由 d 个非零值 $h_1 \geq h_2 \geq \dots \geq h_d \geq 0$ 构成。根据经验,通常有两种构造 LDLC 生成序列的方法:选用最小 d 个质数的倒数或 $\{1, \varepsilon, \varepsilon, \dots, \varepsilon\}$ 的序列形式,其中 $\varepsilon < 1, \varepsilon = 1/\sqrt{d}$ 。

由于 LDLC 的编码采用的是 Jacobi 方法通过迭代求解方程 $Hx = b$,为了使编码和整形复杂度降低,迭代更方便,本文构造了一种特殊的下三角 H 矩阵,其中最大度数为 d ,并满足对角线上的元素为 1, H 的行从上到下度数从 1 逐渐增加到 d , H 的列在相同的规律下从右到左度数从 1 逐渐增加到 d 。

本文以一个 $n=8, d=3$ 的下三角矩阵为例,生成序列为 $(1, 0.8, 0.5)$ 。行的度数从上到下满足从 1 到 3 递增的规律。第 1, 2 行只有一个非零元素,第 3, 4 行有两个非零元素,第 5 到 8 行有三个非零元素,该矩阵的列从右向左也满足此规律。

$$\begin{pmatrix} 1.0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1.0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -0.8 & 0 & 1.0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0.8 & 1.0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -0.5 & 0 & 0 & -0.8 & 1.0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -0.8 & 0 & 0.5 & 0 & 1.0 & 0 & 0 \\ 0 & 0.5 & 0 & 0 & 0.8 & 0 & 1.0 & 0 \\ 0 & 0 & 0.5 & 0 & 0 & 0.8 & 0 & 1.0 \end{pmatrix}$$

其构造规则如表 1 所示。

表 1 构造 H 矩阵的参数

列数	度	星座点数目 M
1~2	1	2
3~4	2	2
5~8	3	4

M 为星座图的星座点数目,每 $m = \lg M$ 个比特对应星座图上的一个星座点。假如所有的整数星座点数目都对应 4,那么数据率为 2 比特/整数。减少星座点数目,必然使得数据率降低。图 1 构造的 H 矩阵的平均数据率为 $(4 \times 1 + 4 \times 2)/$

$8 = 1.5$ 比特/整数,可见产生了 0.5 比特/整数的损失。所以在本文的 H 矩阵构造中,需要恰当地选择构造规则,在保证复杂度低的前提下减少损失。

2.2 LDLC 的整形

受 LDLC 迭代译码算法及低密度奇偶校验码 (Low Density Parity Check, LDPC) 编码算法的启发,本文讨论了两种整形算法运用于 LDLC。

本文假设每个整数信息 b_i 都是从有限的星座图 $(0, 1, \dots, L-1)$ 中提取的, L 为星座点数目。为了使整数对应于不同的星座点数目,并将第 i 个整数 b_i 的星座点数目表示为 L_i 。

2.2.1 超立方整形

超立方整形旨在找到 b' , 使得编码后码字 $x' = Gb'$ 均匀分布。因此,假设:

$$b'_i = b_i - L_i k_i \quad (3)$$

其中 k_i 为整数。该整形方法是从校验矩阵的第 1 行开始,即从 $i=1$ 开始,直到 $i=n$ 结束。对于每一个方程,选择 k_i 的值,以使得 $|x'_i| \leq L_i/2$, 这里 x'_i 是最终码字元素,即: $k_i =$

$$\left\lfloor \frac{1}{L_i} \left(b_i - \sum_{l=1}^{i-1} H_{i,l} x'_l \right) \right\rfloor$$

根据式 (3) 计算出修正后整数 b' , 然后很容易按下式计算出码字元素 x'_i :

$$x'_i = b'_i - \sum_{l=1}^{i-1} H_{i,l} x'_l$$

由于 H 是稀疏的,因此以上计算的复杂度为 $O(nd)$ 。在译码器处,信息整数 b_i 只需经过简单的模 L_i 运算就能从 b'_i 中得到结果: $b_i = b'_i \bmod L_i$ 。

这种方法也可以看作是码间干扰 (Inter-Symbol Interference, ISI) 信道上 Tomlinson-Harashima 预编码机制^[11]。因此,只要矩阵是非奇异的,码字都将均匀分布。

2.2.2 系统整形

在系统的二进制码中,信息比特直接成为码字的组成部分,因此译码后可直接从码字中提取信息比特。这种思想也可以应用到格码当中。定义系统格码为信息整数可以从非噪声码字中提取的格码,及对码字进行取整运算: $b_i = \lfloor x'_i \rfloor$ 。

为了使整形和编码后产生一个系统格码,假设 $b'_i = b_i - k_i$, 此处 k_i 为整数,这个方法也是从第一个校验方程开始,对于每一个方程,选择 k_i 的值,使得 $|x'_i - b_i| \leq 1/2$, 此处 x'_i 是最终的码字元素,即 $k_i = - \left\lfloor \sum_{l=1}^{i-1} H_{i,l} x'_l \right\rfloor$, 计算出修正的整数 b'_i , 可得到码字元素 x'_i , 然后通过 x'_i 取整来计算 b_i 的值。

这种方法也可以看作是 ISI 信道上归一化的弹性预编码机制^[12]。使用系统编码,编码信号相当于未编码加上一个附加的“抖动”信号,该“抖动”信号的幅值不超过 $1/2$ 。实验证明,小小的抖动信号能够产生较大的编码增益^[13]。

2.2.3 功率分析

LDLC 的生成由格 A_c 和整形区域 B 共同决定, A_c 的容量为 $V(A_c) = \det(G) = 1$, 整形区域 B 的容量为 $V(B) = M^n V(A_c) = M^n$ (其中 M 为信号星座点数目),进而可知整形区域 B 内码失个数为 $V(B)/V(A_c) = M^n$, 由于格点等概率分布,则平均的传输功率为 $P_{\text{avg}} = \frac{1}{M^n} \sum_{x \in A_c \cap B} \|x\|^2$ ^[14]。当格 A_c 和整形区域 B 确定后,平均传输功率也被唯一确定。

3 数据仿真及分析

本文对整形前后格点分布做了仿真,图1为整形前后码字格点的分布情况,图中,正六边形的虚线区域为 Voronoi 域,每个 Voronoi 域有一个中心点。整形前,格点随机分布,整形后码字 \mathbf{x}' 的格点沿格的 Voronoi 域均匀分布,图中的横纵坐标为抽象的空间表示,无量纲。

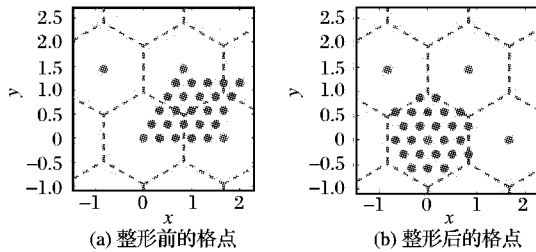


图1 格点的分布

本文构造了一个维度为 $n = 10\,000$ 的 \mathbf{H} 矩阵,构造规则如表2所示,如果星座点数目均为8,那么信息率为3比特/整数,采用本文的构造,通过计算可得,信息率为 $(100 \times 1 + 350 \times 2 + 9\,550 \times 3) / 10\,000 = 2.945$ 比特/整数,相对于星座点数目均为8的矩阵损失了0.055比特/整数的信息率。

采用上文的超立方整形和系统整形方案,设置维度 $n = 10\,000$,度数为 $d = 7$,生成序列为 $\{1, 1/\sqrt{7}, 1/\sqrt{7}, 1/\sqrt{7}, 1/\sqrt{7}, 1/\sqrt{7}, 1/\sqrt{7}\}$ 。

表2 构造 \mathbf{H} 矩阵的参数

列数	度	星座点数目 M
1 ~ 50	1	2
51 ~ 100	2	2
101 ~ 200	3	4
201 ~ 450	4	4
451 ~ 1000	5	8
1001 ~ 2000	6	8
2001 ~ 10000	7	8

仿真结果用误码率(Symbol Error Rate, SER)和整形增益来描述,仿真结果如图2所示。根据仿真结果可以看出,当 $n = 10\,000$,SER 为 10^{-5} 时,整形增益达到了1.31 dB。从图中也可以看出,这两种整形方案的性能很接近。实际上这两种方案都是产生了均匀分布的信号,它们在理论上拥有相同的整形性能。如上文所述,最优的整形方案能产生1.53 dB的整形增益,因此这0.22 dB的差距和所选择的整形算法有关。但是,与一般的仅能产生1 dB整形增益相比,已有了较大提高,这使得后续的 LDLC 硬件实现方面的研究有了意义。

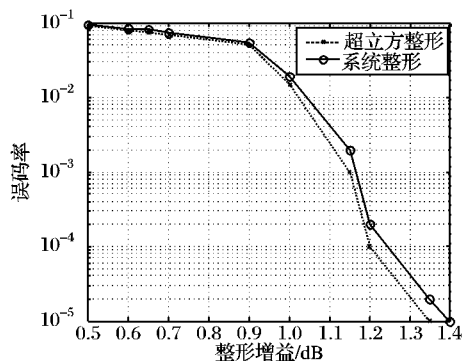


图2 仿真结果

4 结语

本文选用了下三角 \mathbf{H} 矩阵,使得整形和编码复杂度降低,硬件实现难度降低,两种整形方案取得了较好的整形增益,但相对于理想的1.53 dB的整形增益来说,还有较大的提升空间。因此,优化 \mathbf{H} 矩阵及寻找更优的整形方案将是下一步的研究方向。

参考文献:

- [1] 贺玉成. 格及其编码和译码[J]. 西安电子科技大学学报, 1990, 17(1): 70-78.
- [2] SOMMER N, FEDER M, SHALVI O. Low density lattice codes [J]. IEEE Transactions on Information Theory, 2008, 54(4): 1561-1585.
- [3] KURKOSKI B M, DAUWELS J. Message-passing decoding algorithm of low-density lattice codes with Gaussian approximation [C]// Proceedings of 2012 IEEE International Conference on Wireless Information Technology and Systems. Washington, DC: IEEE Computer Society, 2012: 1-4.
- [4] YONA Y, FEDER M. Efficient parametric decoder of low density lattice codes [C]// Proceedings of 2009 IEEE International Symposium on Information Theory. Washington, DC: IEEE Computer Society, 2009: 744-748.
- [5] YONA Y, FEDER M. Max-product algorithm for low density lattice codes [C]// Proceedings of 2012 IEEE International Symposium on Information Theory. Washington, DC: IEEE Computer Society, 2012: 1727-1731.
- [6] UCHIKAWA H, KURKOSKI B M, KASAI K, et al. Iterative encoding with Gauss-Seidel method for spatially-coupled low-density lattice codes [C]// Proceedings of 2012 IEEE International Symposium on Information Theory. Washington, DC: IEEE Computer Society, 2012: 1737-1741.
- [7] KURKOSKI B M, DAUWELS J. Reduced-memory decoding of low-density lattice codes [J]. IEEE Communications Letters, 2010, 14(7): 659-661.
- [8] FORNEY G D, Jr, UNGERBECK G. Modulation and coding for linear Gaussian channels [J]. IEEE Transactions on Information Theory, 1998, 44(6): 2384-2408.
- [9] 王晓松, 常贵然. 下一代无线通信系统中调制与编码关键技术研究[D]. 沈阳: 东北大学, 2009.
- [10] KURKOSKI B M, LOELIGER H A. Power-constrained communications using LDLC lattices [C]// Proceedings of 2009 IEEE International Symposium on Information Theory. Washington, DC: IEEE Computer Society, 2009: 739-743.
- [11] LI Y, BIE Z S, LIN J R, et al. Complex low-density lattice codes designed for ISI channels via spatial coupling [C]// Proceedings of 2012 IEEE International Conference on ICT Convergence. Washington, DC: IEEE Computer Society, 2012: 426-431.
- [12] SOMMER N, FEDER M, SHALVI O. Shaping methods for low-density lattice codes [C]// Proceedings of 2009 IEEE International Symposium on Information Theory. Washington, DC: IEEE Computer Society, 2009: 238-243.
- [13] 李琳. 编码调制与星座映射相关技术研究[D]. 北京: 北京邮电大学, 2011.
- [14] LAROA R, FARVARDIN N, TRETTET S A. On optimal shaping of multidimensional constellations [J]. IEEE Transactions on Information Theory, 1994, 40(4): 1044-1056.