

## 基于动态参数的函数空间学习最优核映射

谭治英<sup>1,2,3\*</sup>, 陈颖<sup>1</sup>, 冯勇<sup>4</sup>, 宋小波<sup>3</sup>

(1. 电子科技大学 计算机科学与工程学院, 成都 610054; 2. 中国科学院 成都计算机应用研究所, 成都 610041;  
3. 中国科学院 合肥研究院先进制造技术研究所, 江苏 常州 213164; 4. 中国科学院 重庆绿色智能技术研究院, 重庆 401120)  
(\* 通信作者电子邮箱 tanzhiying1010@gmail.com)

**摘要:**核函数方法可挖掘出高精度快速印刷品图像间的非线性分布规律,而挖掘能力由所选择的核函数及其参数来决定。这两者的学习与选择同样是核函数理论继续发展与实际应用需要迫切解决的问题。针对印刷品智能检测这一特定背景,提出了一种新的基于优化问题的从具有动态参数的函数空间中学习核函数及参数的方法,以此来使核函数方法达到最优性能。与传统的计算方法不同之处在于其核函数空间中的核参数是连续变化的,这使学习的范围得到一个维度上的扩展。实验结果显示,结合理论分析的迭代算法仅需要10次迭代便可得到统计最优的核函数及参数,利用学习到的核函数计算的复原误差是统计最小的。

**关键词:**核方法; 优化问题; 缺陷检测; 核主成分分析; 图像复原

**中图分类号:** TP391; TP18 **文献标志码:** A

### Learning optimal kernel mapping based on function space with dynamic parameters

TAN Zhiying<sup>1,2,3\*</sup>, CHEN Ying<sup>1</sup>, FENG Yong<sup>4</sup>, SONG Xiaobo<sup>3</sup>

(1. School of Computer Science and Engineering, University of Electronic Science and Technology of China, Chengdu Sichuan 610054, China;  
2. Chengdu Institute of Computer Applications, Chinese Academy of Sciences, Chengdu Sichuan 610041, China;  
3. Hefei Institute of Physical Science, Chinese Academy of Sciences, Hefei Anhui 213164, China;  
4. Chongqing Institute of Green and Intelligent Technology, Chinese Academy of Sciences, Chongqing 401122, China)

**Abstract:** The kernel function methods can discover the nonlinear distribution rules among the images of high precision prints. And the mining capacity is decided by the kernel function and its parameters. Selecting the kernel function is imminent to the development and application in kernel function theory. Based on the intelligent detection of prints, a new learning kernel method based on the optimization was presented for the industry of high precision printing to make the kernel function method to achieve optimal performance. Unlike the traditional calculation method, the kernel's parameter was continuously changing in kernel space, which meant that the learning scope expanded one dimension. The experimental results show that the iterative algorithm based on the theoretical analysis only needs ten iterations to get the statistical optimal kernel function and its parameters, and the recovery error of the kernel function is statistically minimum.

**Key words:** kernel method; optimization problem; defect detection; Kernel Principal Component Analysis (KPCA); image reconstruction

## 0 引言

当今,超高精度快速印刷行业的智能检测技术正逐步取代人工检测,智能检测所采用的智能算法必须切合实际需求。很难找到普遍适应而且处处最优的智能处理算法,针对超高精度印刷这一应用背景,使智能检测算法达到检测能力最大化的研究具有非常重要的意义。复杂的印刷工序往往使印刷成品带有不同程度的差异,比如机械引起的噪声,纸张的形变,胶、凹印的相对位移等。同时,当采用机器视觉技术对样本进行检测时,光照及图像采集系统在使用过程中会产生一定差异。经统计显示,这些差异呈现出非线性分布的特性,因而采用核函数方法来检测处理比依赖模板匹配来检测更合理。

核函数选择的优劣直接影响到核方法最终的效果,因此,合理选择核函数显得尤为重要。当前,虽然许多选择核函数

的方法被提出,但依然不存在一种普遍适用的选择核函数的标准。Bartlett等<sup>[1]</sup>给出了两类问题中函数的一个泛化误差界,揭示了泛化误差与所选择的核函数、所采用的训练样本集密切相关。从Lanckriet等<sup>[2]</sup>提出利用半正定规划来学习核矩阵开始,每年不断有新的选择核函数的方法被提出和应用。

Micchelli等<sup>[3]</sup>提出了通过正则化来学习核函数的方法;Cortes等<sup>[4-5]</sup>提出了通过线性及非线性组合来学习核函数的方法;Argyriou等<sup>[6]</sup>采用计算正则化误差最小化的方法,从而由连续的参数化的基函数的凸组合中学习最优的核函数;Ong等<sup>[7]</sup>定义了超再生核Hilbert空间,并用超核来计算核函数;Sonnenburg等<sup>[8]</sup>则提出了一种解决大尺度的多核学习问题的方法;Zien等<sup>[9]</sup>给出了通过多核学习来解决多类问题的方法;Rakotomamonjy等<sup>[10]</sup>设计了一种与组合核函数法等价的多核学习算法;Cortes等<sup>[4]</sup>采用基于L2正则化学习非线性组合核函数的方法;Shao等<sup>[11]</sup>提出了一种依赖于训练样本的特

收稿日期:2013-02-01;修回日期:2013-03-21。

基金项目:国家973计划项目(2011CB302402);国家自然科学基金资助项目(11171053)。

作者简介:谭治英(1985-),女,山东安丘人,助理研究员,博士,主要研究方向:机器视觉、图像处理;陈颖(1981-),男,山西晋中人,博士,主要研究方向:数值仿真;冯勇(1965-),男,四川西昌人,研究员,博士,主要研究方向:符号计算、自动推理;宋小波(1981-),男,浙江湖州人,副研究员,博士,主要研究方向:机器视觉、仿生机器人。

殊的核函数形式,并采用最大方差展开法(Maximum Variance Unfolding, MVU)的思路通过优化问题来学习核函数;Cortes等<sup>[12]</sup>提出通过两个阶段来学习的核方法;Kloft等<sup>[13]</sup>提出基于 $L_p$ 范数的多核学习算法。此外,将核对齐值也是当前被成功用于学习核函数的目标之一<sup>[12]</sup>。

在上述这些文献中,绝大多数是用来解决监督问题,这是因为监督问题的标签使得学习目标比较明确,而且所学习的核函数可直接通过测试集进行检验。而相对对于非监督问题的核函数学习方法显得比较薄弱。采用核方法对图像进行降噪属于非监督问题的一种。高斯函数以其较强的鲁棒性而被大量应用于多核线性及非线性方法中。而在这些学习方法中,目前还没有一个合理的选择高斯函数带宽的标准。本文将带宽动态变化的高斯函数作为基函数,将标准化内积矩阵作为学习目标,通过优化问题的求解得到高斯函数的带宽及组合系数,并将学习的核函数应用于某印刷品的缺陷检测中。

## 1 核方法

基于核的机器学习方法或称核方法是一类较新的机器学习方法,是统计学习理论与核技术相结合的产物。近几年来,为满足不断提高的技术要求,各种核方法的扩展形式被提出及应用,比如多核学习、学习向量值函数等,从而促使核方法向更多的方向发展。

### 1.1 学习核函数

利用训练样本集来学习核函数的方法可使核函数体现更多的先验知识,从而在提高计算精度同时,有效地提高核函数的泛化能力。

核方法最成功的应用最先体现在支持向量机(Support Vector Machines, SVM)的分类器中,在监督问题或回归问题中,对应每个训练集 $S$ 存在唯一的类标签或函数值向量 $y$ 。通常的学习核函数的方法是将向量 $y$ 作为学习目标,利用岭回归等优化问题来选择核函数。

设 $S = ((x_1, y_1), (x_2, y_2), \dots, (x_N, y_N)) \in (X \times Y)^N$ 是一个训练样本集, $X$ 是输入空间, $Y \in \mathbf{R}$ 是标签空间,记 $y = [y_1, y_2, \dots, y_N]^T$ , $K_\mu$ 表示由训练样本集 $S$ 构成的Gram矩阵,那么对于所有的 $i, j = 1, 2, \dots, N$ , $[K_\mu]_{i,j} = k_\mu(x_i, x_j)$ 。根据标准的岭回归的对偶优化算法得到优化问题<sup>[2]</sup>:

$$\min_{\mu \in M} \max_{\alpha \in \mathbf{R}^N} -\alpha'(K_\mu + \lambda I)\alpha + 2\alpha'y \quad (1)$$

其中 $M$ 是一个正的有界凸集合。利用核函数 $k$ 计算训练集 $S$ 的核矩阵 $K$ 可以看作是一个相似度矩阵。

Cortes等<sup>[4]</sup>提出了学习非线性组合核函数的方法。该方法旨在从一组基本核函数的多项式组合中学习核函数,其定义的核函数类为

$$K = \left\{ k_\mu = \sum_{k=1}^m \mu_k k_k; \mu \geq 0, \|\mu - \mu_0\|_q \leq \Lambda \right\} \quad (2)$$

其中: $q = 1$ 或者 $q = 2$ ;  $\mu_0$ 是一个给定的参数,可以选取 $\mu_0 = 0$ 。

### 1.2 基于核主成分分析的图像复原法

设 $x$ 是带噪声的测试样本, $\varphi(x)$ 是特征空间 $F$ 中的相应的向量。用 $P_d\varphi(x)$ 表示 $\varphi(x)$ 在特征空间中的关于训练样本集的线性投影, $K$ 表示由核函数 $k$ 相应于 $X$ 的核矩阵。

Kloft等<sup>[13]</sup>提出了一种基于KPCA的图像复原算法。通过最小化式(3)的目标函数,来得到 $P_d\varphi(x)$ 的近似复原图像。令

$$\rho(z) = \|\varphi(z) - P_d\varphi(x)\|^2 \quad (3)$$

其中: $z \in \mathbf{R}^n$ ,  $\rho(z)$ 表示特征空间中的残差量。由非线性映射 $\varphi(x)$ 的连续性可以知道,在特征空间中非常接近的两点,在原样本空间中也是比较接近的。

利用式(3)计算得到的复原结果虽然相对于训练样本空间是最优的,但是,由于其求解方法使得最终得到的原像存在严重的模糊现象,为此采用如下的基于局部线性的求解方法。式中的 $p$ 个最近邻居 $x^i = 0 (i = 1, 2, \dots, p)$ 通过 $P_d\varphi(x)$ 在特征空间中计算确定,使最终计算结果具有更高的精度。

$$\begin{aligned} \min \rho(t_1, t_2, \dots, t_p) &= \left\| \varphi \left( \sum_{i=1}^p t_i x^i \right) - P_d\varphi(x) \right\|^2 \\ \text{s. t. } \sum_{i=1}^p t_i &= 1 \\ t_i &\geq 0 \end{aligned}$$

其解可通过如下的迭代公式计算得到:

$$t = [[X^p]^T X^p]^{-1} [[X^p]^T X] B \quad (4)$$

其中:  $t = [t_1, t_2, \dots, t_p]^T$ ,  $X = [x_1, x_2, \dots, x_N]$ ,  $\beta_l = w_l k \left( \sum_{i=1}^p t_i x^i, x_l \right) (l = 1, 2, \dots, N)$ ,  $w_l = \sum_{j=1}^d \sum_{i=1}^N \alpha_i^j k(x, x_i) \alpha_i^j$ ,  $B = [\beta_1 / \sum_{i=1}^N \beta_i, \beta_2 / \sum_{i=1}^N \beta_i, \dots, \beta_N / \sum_{i=1}^N \beta_i]^T$ 。

向量 $t$ 初始值可以取 $t = [1/p, 1/p, \dots, 1/p]^T$ 。

原像的计算过程可简化为三步:首先利用核主成分分析法计算样本在特征空间中的低维坐标 $y_i (i = 1, 2, \dots, N)$ ,其次在特征空间中计算新样本点的 $p$ 个最近邻居,最后对这 $p$ 个最近邻居采用迭代算法计算原像。

## 2 学习核函数算法

### 2.1 理论分析

标准化内积矩阵可表示训练样本间的相似程度。这恰与核矩阵的性质相一致。为此,将标准化内积矩阵作为学习目标是合理的。为了使核矩阵最大限度地表示出训练样本间的相似度,可采用如下的优化问题来学习核函数。

$$\min_{\sigma, u} F(\sigma, u) = \sum_{i=1}^N \sum_{j=1}^N (G(i, j) - K(i, j))^2 \quad (5)$$

其中

$$\begin{aligned} F(\sigma, u) &= \sum_{i=1}^N \sum_{j=1}^N \left( u \exp \left( -\frac{\|x_i - x_j\|^2}{2\sigma_1^2} \right) + \right. \\ &\quad \left. (1 - u) \exp \left( -\frac{\|x_i - x_j\|^2}{2\sigma^2} \right) - G(i, j) \right)^2 \end{aligned} \quad (6)$$

记  $k_1(i, j) = \exp \left( -\frac{\|x_i - x_j\|^2}{2\sigma_1^2} \right)$ ,  $k(i, j) = \exp \left( -\frac{\|x_i - x_j\|^2}{2\sigma^2} \right)$ , 计算函数 $F(\sigma, u)$ 取得稳定点的必要条件:

$$\frac{\partial F}{\partial \sigma} = \frac{2(1-u)}{\sigma^3} \sum_{i=1}^N \sum_{j=1}^N [uk_1(i, j) + (1-u)k(i, j) - G(i, j) \cdot \|x_i - x_j\|^2 \cdot k(i, j)] \quad (7)$$

$$\frac{\partial F}{\partial u} = 2 \sum_{i=1}^N \sum_{j=1}^N [uk_1(i, j) + (1-u)k(i, j) - G(i, j) \cdot (k_1(i, j) - k(i, j))] \quad (8)$$

整理式(8)得

$$u = \frac{\sum_{i=1}^N \sum_{j=1}^N (k(i,j) - G(i,j)) \cdot (k(i,j) - k_1(i,j))}{\sum_{i=1}^N \sum_{j=1}^N (k(i,j) - k_1(i,j))^2} \quad (9)$$

将式(9)代入式(7)得

$$R(\sigma) = \sum_{i=1}^N \sum_{j=1}^N \left( \sum_{p=1}^N \sum_{q=1}^N (k(p,q) - G(p,q)) \cdot (k(p,q) - k_1(p,q)) \cdot k(i,j) \cdot (k_1(i,j) - k(i,j)) + \sum_{p=1}^N \sum_{q=1}^N (k_1(p,q) - k(p,q))^2 \cdot (k(i,j) - G(i,j)) \cdot \|x_i - x_j\|^2 \cdot k(i,j) \right) = 0 \quad (10)$$

在训练样本集  $X$  确定的前提下,指数函数  $k_1(i,j) = \exp\left(-\frac{\|x_i - x_j\|^2}{2\sigma_1^2}\right)$  与  $k(i,j) = \exp\left(-\frac{\|x_i - x_j\|^2}{2\sigma^2}\right)$  ( $i, j = 1, 2, \dots, N$ ) 关于带宽是严格单调递增的。依据这个性质,并将式(10)中的各指数项作为元素构成向量  $\alpha$ ,其余包含系数  $u$  的项组成向量  $\beta$ ,则求解函数的稳态解等价于求解方程组

$$\begin{cases} \alpha'x = c \\ x = \beta \end{cases} \quad (11)$$

图1中给出了解可能存在的情况,其中虚线框表示可行域,  $P_1, P_2$  表示交点。方程(11)的解与图1中直线与曲线的交点是一致的。从中可知解至多存在两组。对图1中虚线框所表示优化问题的可行域,即  $\sigma > 0, u \in [0, 1]$ 。所以,在约束条件下,(c)存在两个解,(a)与(b)存在一个解,即对应稳定点个数不同。

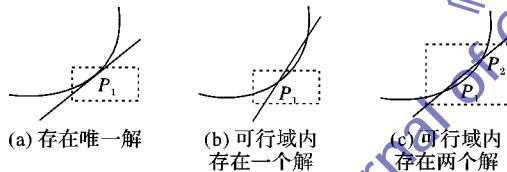


图1 二维空间中式(11)的解的分布情况

## 2.2 学习核函数算法

算法1中给出了计算式(5)中优化问题的迭代算法,通过算法1可以计算最优带宽  $\sigma$ ,然后通过式(9)计算相应的最优组合系数  $u$ 。其中步骤7)用来判断中心点函数值与左边函数值是否同号,步骤10)用来判断中心点函数值是否与右边函数值是否同号。

算法1 中值迭代算法。

- 1) 输入:  $X = [x_1, x_2, \dots, x_N]$ ,  $\sigma_1(0), \sigma_r(0), \varepsilon$ ;
- 2) 计算矩阵  $G, G(i,j) = \frac{\langle x_i, x_j \rangle}{\sqrt{\langle x_i, x_i \rangle} \sqrt{\langle x_j, x_j \rangle}}$
- 3)  $R_1(0) = R(\sigma_1(0)), R_r(0) = R(\sigma_r(0))$
- 4)  $v = 0$
- 5) while ( $|R_r(v) - R_l(v)| > \varepsilon$ )
- 6)  $v = v + 1, \sigma_c = \frac{\sigma_1(v-1) + \sigma_r(v-1)}{2}, R_c = R(\sigma_c)$
- 7) if  $R_1(v-1) \cdot R_c > 0$
- 8)  $R_1(v) = R_c, R_r(v) = R_r(v-1), \sigma_1(v) = \sigma_c, \sigma_r(v) = \sigma_r(v-1)$
- 9) end
- 10) if  $R_r(v-1) \cdot R_c > 0$
- 11)  $R_r(v) = R_c, R_l(v) = R_l(v-1), \sigma_r(v) = \sigma_c, \sigma_l(v) = \sigma_l(v-1)$

- 12) end
- 13) end
- 14) 输出:  $\sigma = (\sigma_1(v) + \sigma_r(v))/2$

## 3 数值实验

为了检验学习的核函数在图像去噪中的性能,将学习到的核函数应用于某印刷品的缺陷检测中。实验中,采用基于局部线性性质的复原方法<sup>[15]</sup>。图2给出了缺陷检测的基本流程。

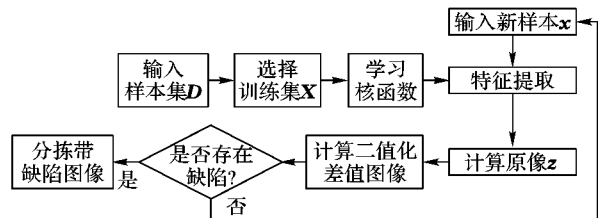


图2 缺陷检测的流程

取  $\sigma_1(0) = 100, \sigma_r(0) = 100000$ , 经过15次迭代后,得到带宽的最优取值  $\sigma = 14.755$ 。此时对应的组合系数  $u = 0.00001$ 。这表明单个高斯函数较任何两个高斯函数的线性组合的效果更好。

图3中给出了高斯带宽的迭代结果,所处理对象为图4中展示的大小为  $64 \times 64 \times 3$  的彩色图像。从图3的迭代结果可以看出,迭代10次后结果即可达到稳定态。图4中子图(a)是4幅含有缺陷的图像,(b)是利用所学习的核函数进行降噪的结果,(c)是原像与降噪后图像做差后的二值化的结果。从二值化结果来看,所学的核函数可以很好地检测出印刷品上的缺陷,而且未出现模糊现象。

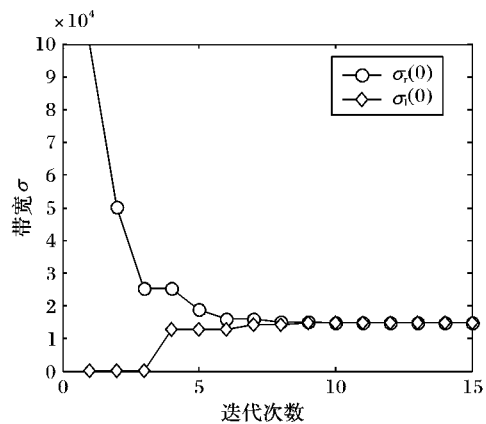


图3 带宽的迭代情况

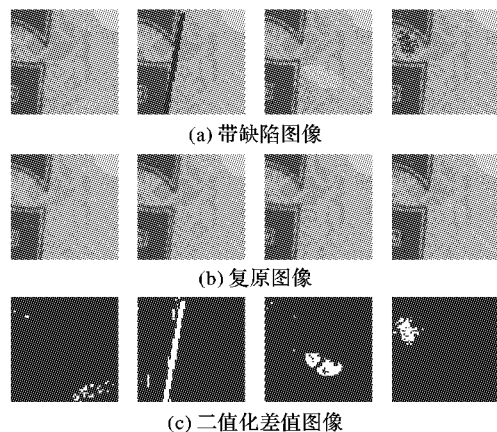


图4 利用学习到的核函数对印刷品降噪的结果

为进一步验证此学习核函数算法的性能,从好样品集中选择一个样本  $x$ , 然后人为添加部分缺陷得到带缺陷图像  $I$ , 最后用采用上面学习到的核函数对图像  $I$  进行降噪得到复原图像  $z$ 。同时,人工选择带宽部分带宽进行实验得到相应的复原图像,然后将原图像与复原图像进行误差比较,比较数据见表2。

表1 不同核参数下的复原误差

| 带宽     | 误差    | 带宽     | 误差  |
|--------|-------|--------|-----|
| 5 000  | 1 130 | 20 000 | 659 |
| 10 000 | 679   | 25 000 | 683 |
| 14 755 | 641   |        |     |

表1中的误差是利用公式  $\|x - z\|_2$  得到的,从表中的变化趋势来看,通过选择算法是比较有效的。这与选择核函数及参数的目标函数是一致的。

#### 4 结语

通过数值实验发现,将标准化内积矩阵作为目标来学习核函数的方法符合检测目的,可以较准确地计算出样本上的缺陷,同时也为非监督问题核函数及参数的选择确立了一个学习标准。结合最优解分布的理论分析得到的迭代算法是切实可行的,算法收敛速度比较快。学习到的核函数基本可以达到统计意义上的图像复原误差最小化。本文是利用学习组合系数来得到线性组合核函数的,下一步的研究内容是学习非线性组合核函数。

#### 参考文献:

- [1] BARTLETT P, SHAWE-TAYLOR J. Generalization performance of support vector machines and other pattern classifiers [M]// Advances in Kernel Methods — Support Vector Learning. Cambridge: MIT Press, 1999: 43–54.
- [2] LANCKRIET G R G, CRISTIANINI N, BARTLETT P, et al. Learning the kernel matrix with semi-definite programming [J]. Journal of Machine Learning Research, 2004, 5(1): 27–72.
- [3] MICCHELLI C A, PONTIL M. On learning vector-valued functions [J]. Neural Computation, 2005, 17(1): 177–204.
- [4] CORTES C, MOHRI M, ROSTAMIZADEH A.  $L_2$  regularization for learning kernels [C]// UAI '09: Proceedings of the Twenty-Fifth Conference on Uncertainty in Artificial Intelligence. Arlington, Virginia: AUAI Press, 2009: 109–116.
- [5] CORTES C, MOHRI M, ROSTAMIZADEH A. Learning non-linear combinations of kernels [C]// NIPS 2009: Proceedings of the Twenty-Third Annual Conference on Neural Information Processing Systems. [S. l.]: NIPS Foundation, 2009: 396–404.
- [6] ARGYRIOU A, MICCHELLI C A, PONTIL M. Learning convex combinations of continuously parameterized basic kernels [C]// COLT 2005: Proceedings of the 18th Annual Conference on Learning Theory, LNCS 3559. Berlin: Springer, 2005: 338–352.
- [7] ONG C S, SMOLA A J, WILLIAMSON R C. Learning the kernel with hyperkernels [J]. The Journal of Machine Learning Research, 2005, 6: 1043–1071.
- [8] SONNENBURG S, RÄTSCCH G, SCHÄFER C, et al. Large scale multiple kernel learning [J]. The Journal of Machine Learning Research, 2006, 7: 1531–1565.
- [9] ZIEN A, ONG C S. Multiclass multiple kernel learning [C]// ICML 2007: Proceedings of the 24th Annual International Conference on Machine Learning. New York: ACM, 2007: 1191–1198.
- [10] RAKOTOMAMONJY A, BACH F R, CANU S, et al. SimpleMKL [J]. The Journal of Machine Learning Research, 2008, 9: 2491–2521.
- [11] SHAO J-D, RONG G, LEE J M. Learning a data-dependent kernel function for KPCA-based nonlinear process monitoring [J]. Chemical Engineering Research and Design, 2009, 87(11): 1471–1480.
- [12] CORTES C, MOHRI M, ROSTAMIZADEH A. Two-stage learning kernel algorithms [C]// ICML 2010: Proceedings of the 27th International Conference on Machine Learning. Haifa, Israel: Omni Press, 2010: 239–246.
- [13] KLOFT M, BREFELD U, SONNENBURG S, et al.  $L_p$ -norm multiple kernel learning [J]. Journal of Machine Learning Research, 2011, 12: 953–997.
- [14] MIKA S, SCHÖLKOPF B, SMOLA A, et al. Kernel PCA and denoising in feature spaces [C]// Proceedings of The 1998 Conference on Advances in Neural Information Processing Systems II. Cambridge: MIT Press, 1999: 536–542.
- [15] TAN Z Y, FENG Y, XU K J, et al. Calculating the pre-image using the kernel methods [J]. Advances in Information Sciences and Service Sciences, 2012, 4(22): 612–618.
- [5] STARCK J L, ELAD M, DONOHO D L. Image decomposition via the combination of sparse representations and variational approach [J]. IEEE Transactions on Image Processing, 2005, 14(10): 1570–1582.
- [6] 李敏, 冯象初. 基于小波空间的图像分解变分模型 [J]. 电子学报, 2008, 36(1): 184–187.
- [7] OSHER S J, SOLE A, VESE L A. Image decomposition and restoration using total variation minimization and the  $H^{-1}$  norm [J]. Multiscale Modeling and Simulation: A SIAM Interdisciplinary Journal, 2003, 1(3): 349–370.
- [8] LE T M, VESE L A. Image decomposition using total variation and  $\text{div} (BMO)^*$  [J]. Multiscale Modeling and Simulation, 2005, 4(2): 390–423.
- [9] GARNETT J B, LE T M, MEYER Y, VESE L A. Image decomposition using total variation and homogeneous besov spaces [J]. Applied and Computational Harmonic Analysis, 2007, 23(1): 25–56.
- [10] 殷海青, 江玲玲, 刘红卫. 联合纹理提取和边缘检测的新方法 [J]. 系统工程与电子技术, 2010, 32(4): 847–850.
- [11] 魏伟波, 潘振宽, 赵增芳. 彩色纹理图像分解的 VO 模型及其 Split Bregman 方法 [J]. 仪器仪表学报, 2012, 33(10): 2279–2285.
- [12] XU C, LI M, SUN X L. An edge-preserving variational method for image decomposition [J]. Chinese Journal of Electronics, 2013, 22(1): 109–113.
- [13] 张力娜, 冯象初, 刘晨华. 一种耦合卡通—纹理分解及边缘检测的方法 [J]. 激光与红外, 2009, 39(5): 542–545.
- [14] AMBROSIO L, TORTORELLI V. Approximation of functionals depending on jumps by elliptic functionals via  $\Gamma$ -convergence [J]. Communication on Pure and Applied Mathematics, 1990, 43(8): 999–1036.

(上接第2336页)