

## 带有权重函数学习因子的粒子群算法

赵远东, 方正华\*

(南京信息工程大学 电子与信息工程学院, 南京 210044)

(\*通信作者电子邮箱 hsfzh1988@126.com)

**摘要:**粒子群算法(PSO)中惯性权重和学习因子的独自调整策略削弱了算法进化过程的统一性和粒子群的智能特性,很难适应复杂的非线性优化,为此提出一种利用惯性权重来控制学习因子的 PSO 算法。该算法将学习因子视作惯性权重的线性、非线性以及三角函数,在惯性权重随时间线性或非线性递减的过程中,学习因子发生相应的递减或递增变化,进而通过增强两者之间的相互作用来平衡算法的全局探索和局部开发能力,更好地引导粒子进行优化搜索。同时为了分析惯性权重和学习因子的融合性能,采用线性和非线性权重法进行比较,测试函数的优化结果表明了采用非线性递减权重的优越性。最后通过对多个基准测试函数的优化分析,并与带有异步线性变化和三角函数学习因子调整方法的 PSO 进行比较发现,该策略利用惯性权重调整学习因子,能达到平衡粒子个体学习能力和向群体学习能力的的作用,提高了算法的优化精度。

**关键词:**粒子群算法;学习因子;惯性权重;统一性;基准函数

**中图分类号:** TP18 **文献标志码:** A

### Particle swarm optimization algorithm with weight function's learning factor

ZHAO Yuandong, FANG Zhenghua\*

(School of Electronic and Information Engineering, Nanjing University of Information Science and Technology, Nanjing Jiangsu 210044, China)

**Abstract:** Concerning the problem that the independent adjusting strategy of inertia weight and learning factor reduces evolution unity and intelligence feature of Particle Swarm Optimization (PSO) algorithm, and cannot adapt to the complex and nonlinear optimization problems, a new PSO algorithm with learning factor controlled by inertia weight function was proposed. Learning factor in the presented PSO was regarded as inertia weight's linear, nonlinear or trigonometric function, and increased or decreased progressively when inertia weight decreased by degrees linearly or nonlinearly. This strategy could effectively enhance the interaction of inertia weight and learning factor, then balance the global exploration and local exploitation and preferably lead particles to search globally optimal solution. Then the inertia weights were given to linear and nonlinear methods to analyze fusion performance of weight and learning factor, and the experimental results to test functions show that nonlinear weight is better. Finally, the experimental simulation results on benchmark test functions and the comparison with PSO with asynchronous linear and trigonometric function learning factor draw a conclusion that the strategy uses inertia weight to adjust learning factor, balances particle learning ability of individual and population, and improves optimization precision of algorithm.

**Key words:** Particle Swarm Optimization (PSO); learning factor; inertia weight; unity; benchmark function

## 0 引言

粒子群算法(Particle Swarm Optimization, PSO)是1995年由Eberhart和Kennedy<sup>[1]</sup>提出的一种模拟鸟类觅食行为过程的随机智能优化算法,该算法结构简单,运行速度快且所需调整的参数少,被广泛应用于函数优化和工程实践等诸多领域<sup>[2]</sup>,已经成为一种重要的优化工具。

由于PSO算法易早熟收敛和易陷入局部最优,相继出现了很多改进的PSO算法<sup>[3-5]</sup>,其中一个比较简单方便的改进策略就是调整算法参数。PSO中比较重要的可调参数包括惯性权重和学习因子,合理调整和搭配这两个参数能够有效引导粒子群进行优化搜索,提高算法的求解精度。在Shi等<sup>[6]</sup>首次将惯性权重概念引入PSO算法之后相继出现了很多对惯性权重和学习因子的调整策略,其中对前者有线性递减法<sup>[6]</sup>、非线性递减法<sup>[7]</sup>和S型函数调整法<sup>[8]</sup>等;对后者也有

多种类似的取值策略<sup>[9-11]</sup>。但是在这些取值中,惯性权重和学习因子各自独立变化,互不影响,一定程度上降低了PSO算法的智能效应,不利于粒子群进行全局搜索。基于上述问题,本文将学习因子视作惯性权重的函数,提出了一种学习因子随惯性权重而动态变化的PSO算法,并通过测试基准函数和比较相关PSO算法验证了本文算法的性能。

## 1 PSO 算法介绍

### 1.1 PSO 算法模型

粒子群算法是基于群体和适应度概念的、智能的随机搜索算法<sup>[12]</sup>,而粒子*i*的信息可用*D*维的位置 $X_i = (x_{i1}, x_{i2}, \dots, x_{iD})$ 和速度 $V_i = (v_{i1}, v_{i2}, \dots, v_{iD})$ 来表征,粒子的位置代表问题的可能解,并且通过适应度来衡量粒子位置的优劣。该算法首先初始化一群随机粒子,再通过多次迭代找到最优解。而在每一次迭代中,粒子通过跟踪两个“极值”来更新自己:一个

收稿日期:2013-03-08;修回日期:2013-05-04。 基金项目:国家自然科学基金资助项目(61070159)。

作者简介:赵远东(1963-),男,江苏南京人,副教授,主要研究方向:人工智能、神经网络;方正华(1988-),男,安徽黄山人,硕士,主要研究方向:粒子群算法。

是粒子本身找到的最优解,即个体极值点(用  $pbest$  表示其位置);另一个是整个种群目前找到的最优解,即全局极值点(用  $gbest$  表示其位置)。粒子在找到上述两个极值后,就根据下面两个公式来更新自身的速度和位置:

$$v_{id}^{t+1} = \omega v_{id}^t + c_1 rand_1(pbest_{id}^t - x_{id}^t) + c_2 rand_2(gbest_d^t - x_{id}^t) \quad (1)$$

$$x_{id}^{t+1} = x_{id}^t + v_{id}^{t+1} \quad (2)$$

其中: $\omega$  为惯性权重; $c_1$  和  $c_2$  为学习因子,且  $c_1$  为认知学习因子, $c_2$  为社会学习因子; $t$  为迭代次数; $rand_1$  和  $rand_2$  为  $[0,1]$  区间的随机数。

## 1.2 学习因子取值策略

鉴于学习因子在粒子群算法中的重要作用,研究者们从不同角度分析了学习因子,并相继出现了多种取值策略,举例如下。

### 1.2.1 线性变化学习因子法

1)同步学习因子法。Suganthan<sup>[9]</sup>测试了一种学习因子随时间而同步线性变化的方法,即

$$c_1 = c_2 = c_{\max} - (c_{\max} - c_{\min}) * t/T \quad (3)$$

其中: $c_{\max}$  和  $c_{\min}$  分别为最大学习因子和最小学习因子, $t$  为当前迭代次数, $T$  为最大迭代次数。通过不断调整学习因子的取值范围来改善优化结果。

2)异步学习因子法。Ratnaweera 等<sup>[10]</sup>通过分析认知部分和社会部分对算法的不同影响提出了一种随时间而异步线性变化的学习因子,即:

$$\begin{cases} c_1 = c_{1s} + (c_{1e} - c_{1s}) * t/T \\ c_2 = c_{2s} + (c_{2e} - c_{2s}) * t/T \end{cases} \quad (4)$$

其中: $c_{1s}$  和  $c_{1e}$  分别为  $c_1$  的迭代初值和迭代终值, $c_{2s}$  和  $c_{2e}$  分别为  $c_2$  的迭代初值和迭代终值,其设置方法包括对称线性变化和不对称线性变化两种。

### 1.2.2 三角函数变化学习因子法

为了满足不同时期的搜索要求,引进非线性变化的学习因子<sup>[13]</sup>,即:

$$\begin{cases} c_1 = 1.3 + 1.2 \cos(\pi * t/T) \\ c_2 = 2.0 - 1.2 \cos(\pi * t/T) \end{cases} \quad (5)$$

该调整策略能够有效增强算法在搜索过程中的局部和全局搜索能力,得到比较好的优化结果。

## 2 基于惯性权重的学习因子调整策略

### 2.1 惯性权重和学习因子

惯性权重的引入从根本上改善了 PSO 算法性能,也使其成为 PSO 中最重要的可调全局参数。学习因子加强了粒子的学习能力,增强了粒子避免陷入局部极值的可能性,能有效改善算法收敛性。虽然许多调整惯性权重和学习因子的策略能够有效改善 PSO 算法性能,但是两者的调整方法相互脱离,一定程度上削弱了算法进化过程的统一性,不利于算法的优化搜索。

在文献[14]中给出了选择和调整 PSO 参数的指导性条件式如下:

$$\begin{cases} 1 - \omega > 0 \\ 2\omega + 2 > \varphi_1 + \varphi_2 \end{cases} \quad (6)$$

其中: $\varphi_1 = c_1 rand_1$ ,  $\varphi_2 = c_2 rand_2$ 。该公式对通过改变参数来提高算法性能有重要的指导意义,有助于实际中 PSO 算法参

数的选择和使用。但是该条件式涉及  $\omega$ 、 $c_1$  和  $c_2$  三个变量,在实际应用时会显得过于繁琐,如果能够通过某种方法使其仅剩一个变量,那么复杂度会大大降低。通过对带有压缩因子的 PSO 算法的分析,作者试图将学习因子视作惯性权重的函数,即: $c_1 = f(\omega)$ ,  $c_2 = g(\omega)$ ,此时条件式变成:

$$\begin{cases} 1 - \omega > 0 \\ 2\omega + 2 > rand_1 f(\omega) + rand_2 g(\omega) \end{cases} \quad (7)$$

通过惯性权重来控制学习因子,不仅便于实际应用,而且增强了算法进化过程的统一性。

### 2.2 学习因子调整策略

考虑到惯性权重和学习因子具有线性、非线性和三角函数等调整策略,本文亦采用类似的改进策略来调整学习因子并比较算法优劣性,具体如下所示:

取值策略一 学习因子与权重呈线性函数关系:

$$\begin{cases} c_1 = c_{11} = M\omega + N \\ c_2 = c_{21} = 2.5 - c_{11} \end{cases} \quad (8)$$

取值策略二 学习因子与权重呈非线性函数关系:

$$\begin{cases} c_1 = c_{12} = A\omega^2 + B\omega + C \\ c_2 = c_{22} = 2.5 - c_{12} \end{cases} \quad (9)$$

取值策略三 学习因子与权重呈余弦函数关系:

$$\begin{cases} c_1 = c_{13} = X + Z \cos(\pi\omega) \\ c_2 = c_{23} = Y - Z \cos(\pi\omega) \end{cases} \quad (10)$$

其中  $A, B, C, M, N, X, Y$  和  $Z$  为常系数,通过对 Griewank、Sphere 和 Rosenbrock 等典型测试函数的测试以及借鉴已有的学习因子调整策略,得到一组系数组合: $M = 0.5, N = 1.5, A = 0.5, B = 1, C = 0.5, X = 1.3, Y = 2.0, Z = 1.2$ 。此外,为了比较惯性权重和学习因子的三种不同函数关系所对应的 PSO 算法的性能及其适用范围,下文对经典的两个单峰函数和两个多峰函数进行仿真测试并与其他学习因子调整方法进行比较。对于惯性权重可以采用多种取值策略,但由于典型的线性递减惯性权重无法和运算过程中非线性变化的特点相匹配,所以本文采用一种常用的非线性递减权重法,即指数函数递减法:

$$\omega = \omega_{\min} + (\omega_{\max} - \omega_{\min}) * \exp[-20(t/T)^6] \quad (11)$$

一般情况下取  $\omega_{\min} = 0.4$ ,  $\omega_{\max} = 0.9$ ,得到策略一和策略二的变化曲线,如图 1 所示。由图可知,在取值策略二中,当  $0 \leq t < 400$  时,惯性权重变化幅度较慢,使得学习因子变化幅度较慢,有利于粒子遍历整个搜索空间;当  $400 \leq t < 700$  时,三者变化幅度最快,使得各粒子有能力向全局最优位置的周围区域逼近;当  $700 \leq t \leq 1000$  时,三者变化幅度又减小,使粒子有足够时间在局部范围内搜索全局最优解。在取值策略一中,随着惯性权重的逐渐减小,学习因子的变化却一直缓慢,直至迭代过程结束;取值策略三类似于策略二,只是在学习因子变化率上存在差异。至于三种策略对应的 PSO 算法性能如何,以下通过实验验证。

### 2.3 粒子均匀分布

种群粒子的初始化位置往往是在搜索空间随机产生,这样可能会使各粒子的初始位置过于集中而不利于后期搜索。为此本文采用一种策略,即让初始粒子相对均匀地分布在搜索空间。假设有  $S$  个粒子,搜索空间为  $[a, b]^D$ ,则各粒子初始位置  $X_1^0, X_2^0, \dots, X_S^0$  可采用如下方法来设置:

$$X_i^0 \in \left[ a + \frac{b-a}{S}(i-1), b + \frac{b-a}{S}i \right]^D$$

其中  $D$  为空间维数,速度设置方法和位置设置方法一样。

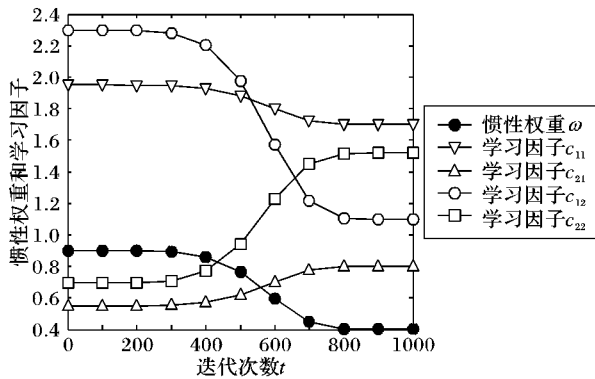


图1 策略一和策略二对应的学习因子变化曲线

## 2.4 算法流程

基于惯性权重函数学习因子的 PSO 算法的具体流程如下:

步骤1 设置算法的种群规模  $S$  和粒子维数  $D$ , 并利用前节方法初始化粒子位置和速度(其中搜索空间视具体函数而定), 求出  $pbest$  和  $gbest$ 。

步骤2 根据式(10) ~ (16) 分别计算惯性权重和学习因子。

步骤3 根据式(1) 和(2) 更新粒子速度和位置。

步骤4 评价粒子适应度, 并更新  $pbest$  和  $gbest$ , 判断是否满足进化停止条件, 若满足, 转至步骤5; 否则转至步骤2 继续优化。

步骤5 输出  $gbest$  对应的适应度值, 算法结束。

## 3 仿真实验分析

### 3.1 基准测试函数

本文利用常用于测试算法性能的 Benchmark 函数来比较学习因子各种取值的优劣性, 其中 Sphere 和 Rosenbrock 为单峰函数, Rastrigrin 和 Griewank 为带有三角函数的多峰函数。

Sphere 函数:

$$f_1(x) = \sum_{i=1}^D x_i^2; x_i \in [-100, 100]$$

Rosenbrock 函数:

$$f_2(x) = \sum_{i=1}^{D-1} [100(x_{i+1} - x_i^2)^2 + (x_i - 1)^2]; x_i \in [-10, 10]$$

Rastrigrin 函数:

$$f_3(x) = \sum_{i=1}^D [x_i^2 - 10\cos(2\pi x_i) + 10]; x_i \in [-5, 5]$$

Griewank 函数:

$$f_4(x) = \frac{1}{4000} \sum_{i=1}^D x_i^2 - \prod_{i=1}^D \cos\left(\frac{x_i}{\sqrt{i}}\right) + 1; x_i \in [-600, 600]$$

### 3.2 算法测试及分析

算法参数设置如下: 种群规模  $S = 30$ , 粒子维数  $D = 10$ , 迭代次数  $T = 1000$ 。为更好地说明惯性权重与学习因子相互融合的性能优劣, 惯性权重取指数递减和线性递减两种策略, 再对学习因子取多种策略来比较相关 PSO 算法的性能。各函数优化结果如表 1、表 2 和图 2 ~ 5 所示, 适应度值用以 10 为底的对数表示, 其中曲线 1 ~ 5 分别表示采用指数递减的惯性权重, 学习因子取值方法依次是本文策略三、本文策略二、本文策略一、异步线性变化法和三角函数变化法。

表 1 采用指数递减权重时不同学习因子策略对应的

最佳适应度值(用以 10 为底的对数表示)

学习因子取值策略	各函数及对应的最佳适应度值			
	$f_1$	$f_2$	$f_3$	$f_4$
本文策略三	-6.1058	0.7597	0.8921	-5.5610
本文策略二	-6.5231	0.5912	0.2500	-6.2651
本文策略一	-5.3610	0.9921	0.9327	-5.4900
异步线性变化	-4.2981	0.9021	0.9900	-5.3921
三角函数变化	-3.8901	1.0152	1.1734	-4.6036

表 2 采用线性递减权重时不同学习因子策略对应的

最佳适应度值(用以 10 为底的对数表示)

学习因子取值策略	各函数及对应的最佳适应度值			
	$f_1$	$f_2$	$f_3$	$f_4$
本文策略三	-5.0271	0.8902	0.6901	-5.4125
本文策略二	-5.5903	0.7523	0.6000	-6.0852
本文策略一	-4.8023	1.0034	0.9721	-5.1129
异步线性变化	-3.6205	0.9927	1.1103	-5.0921
三角函数变化	-2.7531	1.2093	1.3701	-4.3651

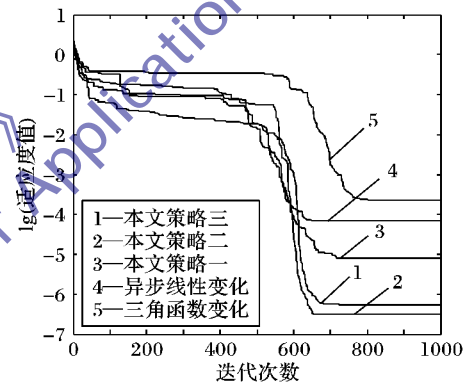


图2 Sphere 函数的适应度曲线

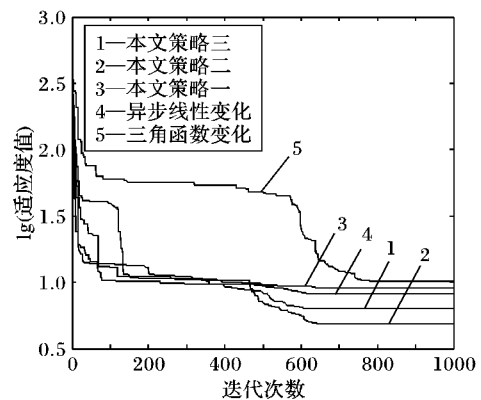


图3 Rosenbrock 函数的适应度曲线

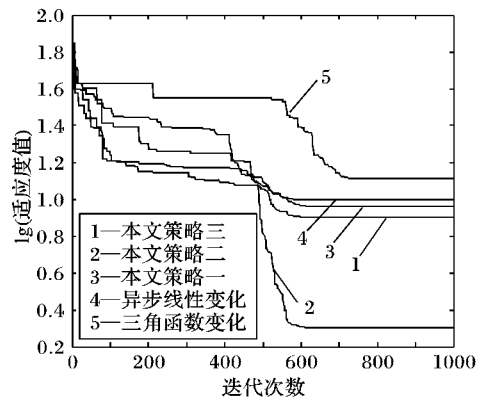


图4 Rastrigrin 函数的适应度曲线

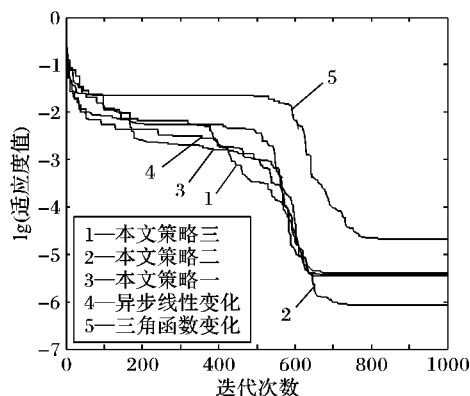


图5 Griewank 函数的适应度曲线

从表1和表2可以看出,利用本文学习因子取值策略的PSO算法求解出的各函数最优值总体上优于其他学习因子法,并且取值策略二效果最佳,策略三次之,策略一最差,而这正是参数非线性变化和PSO算法智能特性的有效利用。同时还可发现,采用指数递减权重与学习因子融合的效果总体上优于线性递减权重与学习因子的融合。实验结果表明,采用非线性惯性权重和学习因子相互作用的PSO算法能够有效改善算法的全局和局部搜索能力,并求解出更优解。

观察图2至图5可以发现,采用本文提出的学习因子取值策略的PSO在收敛速度上的效果并不明显,但是能够有效改善算法的优化精度。在粒子飞行过程中,本文提出的算法增加了粒子之间的相互作用,从而增强了搜索最优解的能力。此外,从图中还可发现,策略二在4个函数中均表现了良好的优化性能,其适用范围较广;策略三在单峰函数中的优化性能较好,而在多峰函数中却与其他学习因子法相差无几;策略一性能一般,并且在Rosenbrock函数中的效果较异步线性变化学习因子法差,其适用性较弱。

#### 4 结语

学习因子的多种改进策略一定程度上能够改善PSO算法的搜索性能,但是它和惯性权重的变化相互脱离,削弱了PSO进化过程的统一性而不利于粒子进行全局搜索,故本文在分析PSO算法学习因子各种取值策略的基础上提出了一种新的学习因子调整策略,即认知学习因子随惯性权重逐渐减小,社会学习因子随惯性权重逐渐增大。针对不同的优化

问题采用了三种函数对应关系,从对测试函数和多种相关PSO的比较分析不仅验证了该算法是一种有效的新型全局PSO算法,也为通过控制惯性权重和学习因子之间的相互关系来改善算法性能提供了一种新的研究思路。

#### 参考文献:

- [1] KENNEDY J, EBERHART R. Particle swarm optimization [C]// Proceedings of the 1995 IEEE International Conference on Neural Networks. Piscataway: IEEE, 1995, 4: 1942-1948.
- [2] 纪震, 廖惠连. 粒子群算法及应用[M]. 北京: 科学出版社, 2009.
- [3] KENNEDY J. Stereotyping: improving particle swarm performance with cluster analysis [C]// Proceedings of the 2000 Congress on Evolutionary Computation. Piscataway: IEEE, 2000, 2: 1507-1512.
- [4] LIU B, WANG L, JIN Y-H, et al. Improved particle swarm optimization combined with chaos [J]. Chaos, Solitons and Fractals, 2005, 25(5): 1261-1267.
- [5] SHI Y, EBERHART R C. Fuzzy adaptive particle swarm optimization [C]// Proceedings of the 2001 IEEE Congress on Evolutionary Computation. Piscataway: IEEE, 2001: 101-106.
- [6] SHI Y, EBERHART R C. A modified particle swarm optimizer [C]// IEEE World Congress on Computational Intelligence: The 1998 IEEE International Conference on Evolutionary Computation Proceedings. Piscataway: IEEE, 1998: 69-73.
- [7] CHATTERJEE A, SIARRY P. Nonlinear inertia variation for dynamic adaption in particle swarm optimization [J]. Computers & Operations Research, 2006, 33(3): 859-971.
- [8] 田东平, 赵天绪. 基于Sigmoid惯性权重的自适应粒子群优化算法[J]. 计算机应用, 2008, 28(12): 3058-3061.
- [9] SUGANTHAN P N. Particle swarm optimiser with neighbourhood operator [C]// CEC 99: Proceedings of the 1999 Congress on Evolutionary Computation. Piscataway: IEEE, 1999, 3: 1958-1962.
- [10] RATNAWEERA A, HALGAMUGE S. Self-organization hierarchical particle swarm optimizer with varying acceleration coefficients [J]. Evolutionary Computation, 2004, 8(3): 240-255.
- [11] 毛开富, 包广清. 基于非对称学习因子调节的粒子群优化算法[J]. 计算机工程, 2010, 36(19): 182-184.
- [12] 谢晓峰, 张文俊. 微粒群算法综述[J]. 控制与决策, 2003, 18(2): 130-134.
- [13] 徐生兵. 一个改进学习因子的粒子群算法[J]. 信息安全与技术, 2012, 7(19): 17-19.
- [14] 李宁, 孙德宝. 基于差分方程的PSO算法粒子运动轨迹分析[J]. 计算机学报, 2006, 29(11): 2052-2061.

(上接第2264页)

- [5] STERLE C. Location-routing models and methods for freight distribution and infomobility in city logistics [D]. Napoli: Università degli Studi di Napoli "Federico II", 2009.
- [6] BOCCIA M, CRAINIC T G, SFORZA A, et al. A metaheuristic for a two echelon location-routing problem [J]. Experimental Algorithms, 2010, 6049: 288-301.
- [7] CRAINIC T G, SFORZA A, STERLE C. Tabu search heuristic for a two-echelon location-routing problem [R]. Montreal: CIRRELT, 2011.
- [8] JIN L, ZHU Y L, SHEN H, et al. A hybrid genetic algorithm for two-layer location-routing problem [C]// Proceedings of 2010 4th International Conference on New Trends in Information Science and Service Science. Piscataway: IEEE, 2010: 642-645.
- [9] 王绍仁, 马祖军. 震害紧急响应阶段应急物流系统中的LRP[J]. 系统工程理论与实践, 2011, 31(8): 1497-1507.
- [10] NGUYEN V P, PRINS C, PRODHON C. Solving the two-echelon location routing problem by a GRASP reinforced by a learning process and path relinking [J]. European Journal of Operational

Research, 2012, 216(1): 113-126.

- [11] NGUYEN V P, PRINS C, PRODHON C. A multi-start iterated local search with tabu list and path relinking for the two-echelon location-routing problem [J]. Engineering Applications of Artificial Intelligence, 2012, 25(1): 56-71.
- [12] KENNEDY J, EBERHART R. Particle swarm optimization [C]// Proceedings of 1995 International Conference on Neural Networks. Washington, DC: IEEE Computer Society, 1995: 1942-1948.
- [13] KHARE A, RANGNEKAR S. A review of particle swarm optimization and its applications in Solar Photovoltaic system [J]. Applied Soft Computing, 2012, 13(5): 2997-3006.
- [14] RESENDE M G C, RIBEIRO C C, GLOVER F, et al. Scatter search and path-relinking: fundamentals, advances, and applications [M]// Handbook of Metaheuristics: International Series in Operations Research & Management Science Volume 146. Berlin: Springer-Verlag, 2010: 87-107.
- [15] 胡大伟. 设施定位和车辆路线问题模型及其启发式算法研究[D]. 西安: 长安大学, 2008: 129-133.