

基于格子 Boltzmann 方法的一维 Burgers 方程的数值模拟

兰中周, 乐励华*, 高云

(东华理工大学 理学院, 南昌 330013)

(*通信作者电子邮箱 lhle@ecit.edu.cn)

摘要:基于格子 Boltzmann 方法(LBM)的一维 Burgers 方程的数值解法,已有 2-bit 和 4-bit 模型。文中通过选择合适的离散速度模型构造出恰当的平衡态分布函数;然后,利用单松弛的格子 Bhatnagar-Gross-Krook 模型、Chapman-Enskog 展开和多尺度技术,提出了用于求解一维 Burgers 方程的 3-bit 的格子 Boltzmann 模型,即 D1Q3 模型,并进行了数值实验。实验结果表明,该方法的数值解与解析解吻合的程度很好,且误差比现有文献中的误差更小,从而验证了格子 Boltzmann 模型的有效性。

关键词:格子 Boltzmann 方法; Burgers 方程; Chapman-Enskog 展开; 3-bit 格子; 格子 BGK 模型

中图分类号:TP391.9

Numerical simulation of one-dimensional Burgers' equation based on lattice Boltzmann method

LAN Zhongzhou, LE Lihua*, GAO Yun

(School of Science, East China Institute of Technology, Nanchang Jiangxi 330013, China)

Abstract: For the numerical simulation of one-dimensional Burgers' equation based on Lattice Boltzmann method, there had been 2-bit and 4-bit models. In this paper, an equilibrium distribution function was constructed by choosing the proper kind of discrete velocity model. And then, using Lattice Bhatnagar-Gross-Krook (LBGK) model, Chapman-Enskog expansion and multiscale technique, a 3-bit Lattice Boltzmann Method (LBM) called D1Q3 model was proposed for the one-dimensional Burgers equation. Some numerical experiments were carried out and the numerical results were in good agreement with analytical solutions, therefore the effectiveness of the new method was verified.

Key words: Lattice Boltzmann Method (LBM); Burgers equation; Chapman-Enskog expansion; 3-bit lattice; Lattice Bhatnagar-Gross-Krook (LBGK) model

0 引言

在流体力学中,非线性对流扩散方程——Burgers 方程是不可压缩的 Navier-Stokes 方程忽略压力项后的一类简化模型,用于描述诸多物理现象的数学模型,如交通流问题、冲击波模型、湍流问题等。然而,对于较小的黏性系数来说,非线性对流项将会占据主导作用,进而解会随时间的推移产生激波,导致求得的解析解是不切实际的,因此,研究 Burgers 方程的数值解是十分有意义的。基于此,众多科学工作者对 Burgers 方程提出了许多数值方法,如 Galerkin 方法^[1-2]、有限差分法^[2-6],此外,还有 B-样条配置法^[7-9]、B-样条 Galerkin 方法^[10]、B-样条有限元法^[11]等。但是,在通常情况下,由于 Burgers 方程的有限元格式和有限差分格式的自由度很大,因此这将在实际应用中带来很大的麻烦。本文的目的是,能在减少计算量和存储空间的同时,又能使其数值解具有较高精度的前提下,可以利用格子 Boltzmann 方法(Lattice Boltzmann method, LBM)的 3-bit 模型来计算 Burgers 方程的数值解。

闫广武^[12]和沈智军^[13-14]分别在平衡态分布函数的高阶距的 LBM 时利用多尺度展开技术和在格子 Boltzmann 方程中添加修正项 $\varepsilon h_i(x, t)$ 研究了 Burgers 方程,对于一维模

型,他们提出 4-bit 模型,即 D1Q4 模型;段雅丽等^[15]应用多尺度技术针对该方程提出 2-bit 模型,即 D1Q2 模型。在本文中,对于该方程提出 3-bit 模型,即 D1Q3 模型。首先,在粒子流动和碰撞过程中,将速度离散成 3 个方向,每一个节点与其相邻近的 3 个节点相连,构造出离散速度模型;然后,根据格子 BGK (Lattice Bhatnagar-Gross-Krook, LBGK) 模型和离散速度模型给出分布函数的演化形式,进而导出粒子局部平衡态函数;最后,利用多尺度技术、Chapman-Enskog 展开和 Taylor 展开分析,将格子 Boltzmann 方程恢复为 Burgers 方程。数值实验证明,本文 D1Q3 模型与现有文献^[7, 9-10, 15-17]的模型和方法相比较而言,模型更简单,精度也较高。本文考虑的 Burgers 方程的形式为:

$$\frac{\partial u}{\partial t} + u \frac{\partial u}{\partial x} - \frac{1}{Re} \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = 0; Re > 0 \quad (1)$$

其中: Re 是黏性系数 ν ($= 1/Re$) 的 Reynolds 数,初始条件和边界条件在数值实例中给出。

1 格子 Boltzmann 模型

根据 LBM 的原理,粒子在每个时间步的运动分为流动过程和碰撞过程。本文利用单松弛的 LBGK 模型,并结合这两

收稿日期:2013-03-26;修回日期:2013-05-20。

作者简介:兰中周(1985-),男,河南濮阳人,硕士研究生,主要研究方向:格子 Boltzmann 方法及其科学计算;乐励华(1965-),男,江西抚州人,教授,主要研究方向:复杂流动的格子 Boltzmann 建模、计算机仿真;高云(1986-),女,河南信阳人,硕士,主要研究方向:格子 Boltzmann 方法及其科学计算。

个过程给出了粒子分布函数的演化形式:

$$f_i(x + c_i \Delta t, t + \Delta t) - f_i(x, t) = -1/\tau [f_i(x, t) - f_i^{eq}(x, t)] \quad (2)$$

其中: f_i 是粒子的密度分布函数; $c_i = \{c_0, c_1, c_2\} = \{0, c, -c\}$, $c = \Delta x / \Delta t$ 是粒子的离散速度方向; Δx 是格子步长; Δt 是时间步长; τ 是无量纲松弛时间; f_i^{eq} 是粒子的局部平衡态分布函数。

粒子的局部平衡态分布函数可以表示为:

$$f_i^{eq} = \begin{cases} u - \frac{u^3}{3c^2} - \frac{\alpha u}{3}, & i = 0 \\ \frac{1}{2} \left(\frac{u^2}{2c} + \frac{u^3}{3c^2} + \frac{\alpha u}{3} \right), & i = 1 \\ \frac{1}{2} \left(-\frac{u^2}{2c} + \frac{u^3}{3c^2} + \frac{\alpha u}{3} \right), & i = 2 \end{cases} \quad (3)$$

其中 α 是调整约束条件的参数。宏观量 u 定义为:

$$u = \sum_i f_i \quad (4)$$

由守恒定律,平衡分布函数须满足以下约束条件:

$$u = \sum_i f_i^{eq} = \sum_i f_i \quad (5)$$

根据式(4)~(5),可得

$$\sum_i f_i^{(n)} = 0; n \geq 1 \quad (6)$$

如果平衡态分布函数可以满足动量守恒以及各向同性这两个约束条件的话,那么就可以恢复到正确的 Burgers 方程。下面分别给出这两个约束条件表达式:

$$\sum_i c_i f_i^{eq} = \frac{u^2}{2} \quad (7)$$

$$\sum_i c_i c_i f_i^{eq} = \frac{u^3}{3} + \alpha c_s^2 u \quad (8)$$

其中 $c_s^2 = 3c^2/4$ 。

对空间导数、时间导数以及分布函数都进行 Chapman-Enskog 展开:

$$f_i = f_i^{eq} + \varepsilon f_i^{(1)} + \varepsilon^2 f_i^{(2)} \quad (9)$$

$$\frac{\partial}{\partial t} = \varepsilon \frac{\partial}{\partial t_1} + \varepsilon^2 \frac{\partial}{\partial t_2} \quad (10)$$

$$\frac{\partial}{\partial x} = \varepsilon \frac{\partial}{\partial x_1} \quad (11)$$

其中 ε 是一个很小的扩张参数。

式(4)利用 Taylor 展开,可得

$$\Delta t \frac{\partial f_i}{\partial t} + \Delta t \frac{\partial}{\partial t} (c_i f_i) + \frac{1}{2} \Delta t^2 \frac{\partial^2 f_i}{\partial t^2} + \Delta t^2 \frac{\partial^2}{\partial t \partial x} (c_i f_i) + \frac{1}{2} \Delta t^2 \frac{\partial^2}{\partial t \partial x} (c_i^2 f_i) + O(\varepsilon^3) = -1/\tau (f_i - f_i^{eq}) \quad (12)$$

将式(9)~(11)代入式(12),可以推导出一系列格子 Boltzmann 方程:

$$o(\varepsilon): \frac{\partial f_i^{eq}}{\partial t_1} + \frac{\partial}{\partial x_1} (c_i f_i^{eq}) = -\frac{f_i^{(1)}}{\tau \Delta t} \quad (13)$$

$$o(\varepsilon^2): \frac{\partial f_i^{eq}}{\partial t_2} + \frac{\partial f_i^{(1)}}{\partial t_1} + \frac{\partial}{\partial x_1} (c_i f_i^{(1)}) + \frac{\Delta t}{2} \left(\frac{\partial}{\partial t_1} + c_i \frac{\partial}{\partial x_1} \right)^2 f_i^{eq} = -\frac{1}{\tau \Delta t} f_i^{(2)} \quad (14)$$

利用式(13),式(14)可改写为:

$$\frac{\partial f_i^{eq}}{\partial t_2} + \left(\frac{\partial}{\partial t_1} + c_i \frac{\partial}{\partial x_1} \right) \left(1 - \frac{1}{\tau} \right) f_i^{(1)} = -\frac{1}{\tau \Delta t} f_i^{(2)} \quad (15)$$

由式(5)~(8),式(13)可改写为:

$$\sum_i c_i f_i^{(1)} = -\tau \Delta t \left[u \frac{\partial u}{\partial t_1} + \frac{\partial}{\partial x_1} \left(\frac{u^3}{3} \right) + \alpha c_s^2 \frac{\partial u}{\partial x_1} \right] \quad (16)$$

式(13)两边对 i 求和,再利用式(5)~(7),得到

$$\frac{\partial u}{\partial t_1} + \frac{\partial}{\partial x_1} \left(\frac{u^2}{2} \right) = 0 \quad (17)$$

类似地,式(15)两边对 i 求和,再利用式(5)~(7),得到

$$\frac{\partial u}{\partial t_2} - \alpha c_s^2 \left(\tau - \frac{1}{2} \right) \Delta t \frac{\partial^2 u}{\partial x_1^2} = 0 \quad (18)$$

当 ε 乘式(17)加 ε^2 乘式(18)时,令 $\nu = \alpha c_s^2 (\tau - 1/2) \Delta t$, 最终方程恢复为:

$$\frac{\partial u}{\partial t} + u \frac{\partial u}{\partial x} - \nu \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = 0 \quad (19)$$

即为 Burgers 方程。

2 数值模拟

为了验证 3-bit LBM 的精确性,定义相对总体误差(Global Relative Error, GRE)、绝对误差(Absolute Error, AE)以及 L_2, L_∞ 范数误差如下:

$$\begin{cases} GRE = \frac{\sum_i |u_i - u_i^*|}{\sum_i |u_i^*|} \\ AE = |u_i - u_i^*| \end{cases} \quad (20)$$

$$\begin{cases} L_2 = \|u_i - u_i^*\|_2 = \left[\frac{1}{n} \sum_{i=0}^n (u_i^* - u_i)^2 \right]^{1/2} \\ L_\infty = \|u_i - u_i^*\|_\infty = \max |u_i - u_i^*| \end{cases} \quad (21)$$

其中 u_i 和 u_i^* 分别为数值解和解析解。

例1 若 Burgers 方程(1)的边界条件和初始条件分别为:

$$u(0, t) = u(1, t) = 0; t \geq 1 \quad (22)$$

$$u(x, 0) = \frac{x}{1 + (1/t_0)^{1/2} \exp(x^2/4\nu)}; 0 \leq x \leq 1 \quad (23)$$

该方程的解析解在文献[2,10]中已给出:

$$u(x, t) = \frac{x/t}{1 + (t/t_0)^{1/2} \exp(x^2/4\nu t)}; t \geq 1, 0 \leq x \leq 1 \quad (24)$$

其中 $t_0 = \exp(1/8\nu)$ 。

图1为不同时刻 LBM 计算的结果与解析解的比较,可以看出本文方法的数值解与解析解吻合得比较好。参数选取: $\Delta x = 0.01, \Delta t = 0.002, \nu = 0.005$ 。

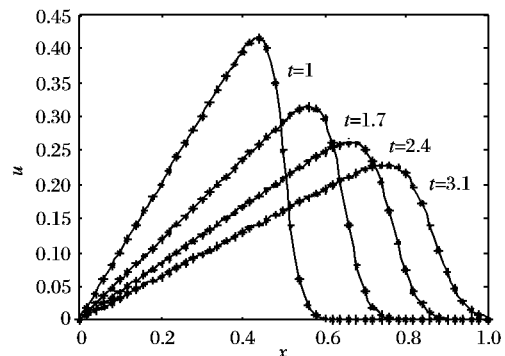


图1 不同时刻下 LBM 计算的结果与解析解比较

图2为文献[15]与本文的 GRE 的对数随格子步长的对数变化的关系,可以看出本文的 GRE 比文献[15]要小得多。参数选取: $\nu = 0.005, t = 2.4, \Delta x$ 从 1/50 到 1/400, c 值从 5 到 40。

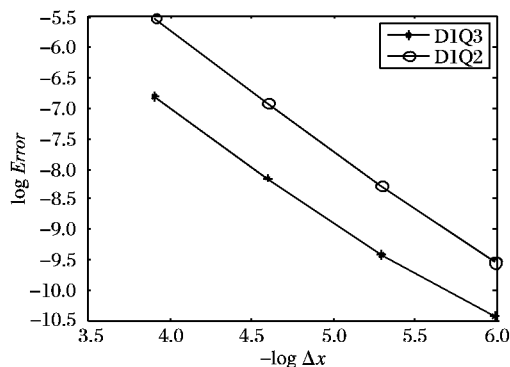


图2 GRE 随格子步长变化对比图

表1为各个节点在不同网格尺寸下的LBM数值解和解析解之间的对比,可以看出,本文方法的数值解与解析解之间有令人满意的吻合,且随着网格的细化,两者之间的绝对误差变得越来越小。参数选取: $\nu = 0.005, t = 2.4, \Delta x = 1/50$ 和 $\Delta t = 1/125$ 以及 $\Delta x = 1/100$ 和 $\Delta t = 1/500$ 。

表1 各个节点在不同网格尺寸下的解析解和数值解及其绝对误差

x	解析解	50 网格		100 网格	
		数值解	绝对误差 (AE)	数值解	绝对误差 (AE)
0.1	0.041666	0.041676	9.7E-6	0.041668	1.2E-6
0.2	0.083330	0.083338	5.6E-6	0.083333	7.0E-7
0.3	0.124995	0.124998	2.6E-6	0.124996	4.0E-7
0.4	0.166640	0.166643	3.2E-6	0.166640	7.0E-7
0.5	0.208114	0.208131	1.7E-5	0.208118	4.4E-6
0.6	0.247417	0.247502	8.4E-5	0.247439	2.1E-5
0.7	0.252172	0.251620	5.5E-4	0.252035	1.4E-4
0.8	0.073025	0.073845	8.2E-4	0.073232	2.1E-4
0.9	0.003023	0.002936	8.6E-5	0.003000	2.2E-5

另外,表2为本文的GRE随着 α 和松弛时间 τ 变化而变化的情况,且当 $\alpha = 0.9$ 时,相对总体误差(GRE)最小。参数选取同图1。

表2 GRE 在不同 α 和松弛时间 τ 下的结果

α	松弛时间 τ	相对总体误差 (GRE)
0.1	3.500	4.5800E-2
0.5	1.100	7.9100E-4
0.8	0.875	2.7214E-4
0.9	0.833	2.6738E-4
1.0	0.800	2.6979E-4
1.1	0.773	2.7263E-4
1.2	0.750	2.7696E-4
1.5	0.700	3.0411E-4
2.0	0.650	4.4970E-4

例2 若 Burgers 方程(1)的边界条件和初始条件分别为:

$$u(0, t) = u(1, t) = 0; t \geq 1 \quad (25)$$

$$u(x, 0) = \sin \pi x; 0 \leq x \leq 1 \quad (26)$$

该方程的解析解在文献[18]中已给出:

$$u(x, t) = \frac{2\pi\nu \sum_{k=1}^{\infty} k A_k \sin(k\pi x) \exp(-k^2\nu\pi^2 t)}{A_0 + \sum_{k=1}^{\infty} A_k \cos(k\pi x) \exp(-k^2\nu\pi^2 t)} \quad (27)$$

其中 Fourier 系数:

$$A_0 = \int_0^1 \exp\{-(2\pi\nu)^{-1}[1 - \cos(\pi x)]\} dx \quad (28)$$

$$A_k = 2 \int_0^1 \exp\{-(2\pi\nu)^{-1}[1 - \cos(\pi x)]\} \cos(k\pi x) dx; \quad k \geq 1 \quad (29)$$

表3列出了在不同节点上本文方法和其他方法的数值解与解析解之间的对比,可以看出本文方法比其他文献[9, 16-17]方法都要好得多。参数选取: $\Delta t = 0.001, \Delta x = 0.01, \nu = 0.1$ 。

图3为例2的数值结果,参数选取同表3。图4为例3的数值结果与解析解之间的对比,参数选取: $\alpha = 0.4, \mu = 0.6, \beta = 0.125, \Delta x = 1/36, \Delta t = 0.01, \nu = 0.01$ 。

例3 若 Burgers 方程(1)有解析解^[8]。

$$u(x, t) = \frac{\alpha + \mu + (\alpha - \mu) \exp \eta}{1 + \exp \eta} \quad (30)$$

其中: $\eta = \frac{\alpha(x - \mu t - \gamma)}{\nu}$, α, η 和 β 是常数。

表3 各个模型在不同节点上的数值解和解析解

x	数值解				解析解
	MQ ^[16]	MQOI ^[17]	BSQI ^[9]	LBM	
0.1	0.0664	0.07124	0.06628	0.06633	0.06632
0.2	0.1313	0.13431	0.13115	0.13125	0.13121
0.3	0.1928	0.19339	0.19269	0.19286	0.19279
0.4	0.2481	0.24538	0.24792	0.24816	0.24803
0.5	0.2919	0.28517	0.29175	0.29213	0.29191
0.6	0.3159	0.30473	0.31580	0.31653	0.31607
0.7	0.3079	0.29288	0.30791	0.30897	0.30810
0.8	0.2534	0.23784	0.25337	0.25498	0.25372
0.9	0.1459	0.13542	0.14583	0.14709	0.14606

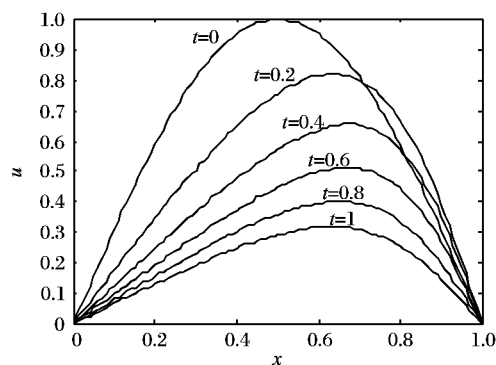


图3 在不同时刻下例2的数值结果

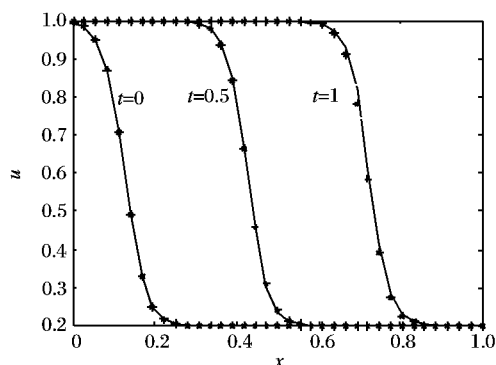


图4 在不同时刻下例3的数值解与解析解

表4为各个方法的 L_2 和 L_∞ 误差对比,可以得出本文的LBM精确性更好。

表4 各个方法的 L_2 和 L_∞ 误差对比

误差	LBM	BSQI ^[9]	QBCM2 ^[6]	QBCM ^[6]	CBCM ^[10]
$L_2 \times 10^3$	1.67642	3.43253	1.81958	1.92558	1.73106
$L_\infty \times 10^3$	5.90037	9.26698	6.94015	6.35489	5.48892

3 结语

通过对以上三个实例的数值模拟结果分析,可以看出本文的 LBM 在求解一维 Burgers 方程方面上,可以给出比较精细的数值解,且与解析解吻合的程度较高;利用两个 L_2 和 L_∞ 范数误差对比分析可知,本文的 LBM 的误差比其他文献方法的误差较小,因此,可以证明本文的 LBM 在数值的精确性效果上更好,得出本文的格子 Boltzmann 方法对于求解一维 Burgers 方程是有效可行的。

参考文献:

- [1] CHRISTIE I, MITCHELL A R. Upwinding of high order Galerkin methods in conduction-convection problems[J]. International Journal for Numerical Methods in Engineering, 2005, 12(11): 1764 – 1771.
- [2] DOGAN A. A Galerkin finite element approach to Burgers equation [J]. Applied Mathematics and Computation, 2004, 157(2): 331 – 346.
- [3] HIRSH R S. Higher order accurate difference solutions of fluid mechanics problems by a compact differencing technique[J]. Journal of Computational Physics, 1975, 19(1): 90 – 105.
- [4] MITCHELL A R, GRIFFITHS D F. The finite difference method in partial differential equations[M]. New York: John Wiley & Sons, 1980.
- [5] HASSANIEN I A, SALAMA A A, HOSHAM H A. Fourth-order finite difference method for solving Burgers equation[J]. Applied Mathematics and Computation, 2005, 170(2): 781 – 800.
- [6] PANDEY K, VERMA K L, VERMA A K. On a finite difference scheme for Burgers equation[J]. Applied Mathematics and Computation, 2009, 215(6): 2206 – 2214.
- [7] SAKA B, DAG I. Quartic B-spline collocation method to the numerical solutions of the Burgers' equation [J]. Chaos Solitons & Fractals, 2007, 32(3): 1125 – 1137.
- [8] DAG I, IRK D, SAKA B. A numerical solution of the Burgers equation using cubic B-splines[J]. Applied Mathematics and Computation, 2005, 163(1): 199 – 211.
- [9] ZHU C G, WANG R H. Numerical solution of Burgers equation by cubic B-spline quasi-interpolation [J]. Applied Mathematics and Computation, 2009, 208(1): 260 – 272.
- [10] DAG I, SAKA B, BOZ A. B-spline Galerkin methods for numerical solutions of the Burgers equation[J]. Applied Mathematics and Computation, 2005, 166(3): 506 – 522.
- [11] OZIS T, ESEN A, KUTLUAY S. Numerical solution of Burgers equation by quadratic B-spline finite elements[J]. Applied Mathematics and Computation, 2005, 165(1): 237 – 249.
- [12] HON Y C, MAO X Z. An efficient numerical scheme for Burgers equation[J]. Applied Mathematics and Computation, 1998, 95(1): 37 – 50.
- [13] CHEN R H, WU Z M. Applying multiquadric quasi-interpolation to solve Burgers equation[J]. Applied Mathematics and Computation, 2006, 172(1): 472 – 484.
- [14] 阎广武. 用格子 Boltzmann 方法研究 Burgers 方程[J]. 力学学报, 1999, 31(2): 143 – 151.
- [15] ZHANG J Y, YAN G W. A lattice Boltzmann model for the Korteweg-de Vries equation with two conservation laws [J]. Computer Physics Communications, 2009, 180(7): 1054 – 1062.
- [16] DUAN Y L, LIU R X, JIANG Y Q. Lattice Boltzmann model for the modified Burgers equation[J]. Applied Mathematics and Computation, 2008, 202(2): 489 – 497.
- [17] XU M, WANG R H, ZHANG J H, et al. A novel numerical scheme for solving Burgers equation[J]. Applied Mathematics and Computation, 2011, 217(9): 4473 – 4482.
- [18] SHI B C, GUO Z L. Lattice Boltzmann model for nonlinear convection-diffusion equations [J]. Physical Review E, 2009, 79(1): 016701.
- [19] SHI B C, GUO Z L. Lattice Boltzmann model for the one-dimensional nonlinear Dirac equation [J]. Physical Review E, 2009, 79(1): 066704.
- [20] 沈智军. 中子输运方程数值解与 Burgers 方程格子 Boltzmann 方法研究[D]. 北京: 北京工程物理研究院, 2000.
- [21] 沈智军, 袁光伟, 沈隆钧. 格子 Boltzmann 方法求解 Burgers 方程[J]. 计算物理, 2000, 17(1): 166 – 172.
- [22] 郭照立, 郑楚光, 李青, 等. 流体动力学的格子 Boltzmann 方法 [M]. 武汉: 湖北科学技术出版社, 2002.
- [23] GAO Y, LEL H, SHI B C. Numerical solution of Burgers' equation by lattice Boltzmann method [J]. Applied Mathematics and Computation, 2013, 219(14): 7685 – 7692.

(上接第 2431 页)

- [3] 王玉君, 张欣, 李从心, 等. 耦合 CFD 和详细化学动力学的燃烧模拟及其并行计算的实现[J]. 燃烧科学与技术, 2008, 14(5): 474 – 479.
- [4] 杨顺华, 乐嘉陵, 赵慧勇, 等. 煤油超燃冲压发动机三维大规模并行数值模拟[J]. 计算物理, 2009, 26(4): 534 – 540.
- [5] 范维澄. 计算燃烧学[M]. 合肥: 安徽科学技术出版社, 1987.
- [6] 王福军. 计算流体动力学分析[M]. 北京: 清华大学出版社, 2004.
- [7] 赵坚行. 燃烧的数值模拟[M]. 北京: 科学出版社, 2002.
- [8] BARRETT R, BERRY M, CHAN T F. Templates for the solution of linear systems: building blocks for iterative methods[M]. Philadelphia: Society for Industrial and Applied Mathematics, 1994.
- [9] 张舒, 褚艳利. GPU 高性能运算之 CUDA[M]. 北京: 中国水利水电出版社, 2009.
- [10] NVIDIA Corporation. CUSPARSE Library [EB/OL]. [2013-03-20]. http://docs.nvidia.com/cuda/pdf/CUDA_CUSPARSE_Users_Guide.pdf.
- [11] van der VORST H A. A vectorizable variant of some ICCG methods [J]. SIAM Journal on Scientific and Statistical Computing, 1982, 3(3): 350 – 356.
- [12] 吕同富, 康兆敏, 方秀男. 数值计算方法[M]. 北京: 清华大学出版社, 2008.