

宣纸上的墨水扩散模拟

范东云, 李海晟*

(华东师范大学 计算机科学技术系, 上海 200241)

(*通信作者电子邮箱 hslh@cs.ecnu.edu.cn)

摘要:墨水扩散是一个复杂的物理现象, 针对墨水在宣纸上的扩散模拟问题, 提出了一个基于变系数扩散方程的模拟方法, 其扩散系数由宣纸结构和随时间而减少的剩余墨水量决定。模拟分为两个阶段: 宣纸结构的模拟和墨水扩散动态过程的模拟。为了模拟宣纸结构, 使用一种由权重不同且方向随机的直线段均匀分布而成的加权纤维结构。墨水扩散的动态过程由变系数扩散方程来阐述, 为了高效地生成扩散图像, 使用 Crank-Nicolson 数值方法求解墨水扩散方程, 并且预计算纤维结构和动态更新扩散图像。与以往类似的模拟方法相比, 该方法能够生成更加自然的扩散边界, 并有效地解决了边界过于平滑的问题。实验结果表明该方法能够真实地模拟不同宣纸上的墨水扩散效果。

关键词: 宣纸结构; 墨水扩散; 扩散模拟; 加权纤维结构; 变系数扩散方程

中图分类号: TP391.9 **文献标志码:** A

Simulation of ink diffusion on Xuan paper

FAN Dongyun, LI Haisheng

(Department of Computer Science and Technology, East China Normal University, Shanghai 200241, China)

Abstract: Ink diffusion is a complex physical phenomenon. Concerning the problem of simulating ink diffusion on Xuan paper, this paper proposed a simulation method based on diffusion equation with variable coefficient, and its diffusion coefficient depended on Xuan paper structure and the residue of ink which reduced with time. There were two steps for simulation: simulating Xuan paper structure and simulating the dynamic procedure of diffusion. To simulate Xuan paper structure, a weighting fiber structure was proposed, which consisted of uniformly distributed line segments with different weights and random directions. The dynamic procedure of ink diffusion was described by the diffusion equation. To generate the diffusion image efficiently, Crank-Nicolson method was used to solve the diffusion equation, fiber structure was pre-computed, and the diffusion image was updated dynamically. Compared with the previous similar simulation methods, this method rendered more natural diffusion boundary, and overcame the problem of excessively smooth boundary. The experimental results demonstrate that this approach is able to simulate the effects of ink diffusion on different Xuan paper realistically.

Key words: Xuan paper structure; ink diffusion; diffusion simulation; weighting fiber structure; diffusion equation with variable coefficient

0 引言

中国古代文房四宝中的墨和纸是中国传统书法艺术的主要材料和载体, 其中宣纸因具有色泽耐久、吸水能力强、纹理清晰、润墨性好等特点被公认为书画创作的上等纸张, 许多传世书画艺术珍品都是在宣纸上创作的。独具魅力的宣纸书法艺术引起许多计算机图形领域的研究人员和学者的兴趣, 他们致力于研究书法艺术的计算机模拟和生成方法, 其中墨水扩散模拟是重要的基础工作, 涉及宣纸结构和墨水扩散特性两方面的内容。

纸张是由纸浆和纤维丝构成, 要完整地模拟纸张, 涉及数量众多的纤维丝和纸浆, 空间组合结构复杂, 运算量很大, 因此现有的方法主要是通过构建抽象纤维结构来模拟纸张及其物理特性。1991年, Guo等^[1]用显微镜观察纸结构发现纸张中存在许多随机分布的纤维, 提出了模拟纸的二维纤维结构模型: 用均匀分布的网格将纸平面划分成多个小区域, 每个小

区域内随机生成大量相互交错的短直线段以模拟纤维丝。此后, Lee^[2]改进了 Guo 等的工作, 用正弦曲线代替直线段作为纤维丝的形状; 这类模型实现简单, 但是扩散过程中粒子的承载单位是方格矩阵, 会造成扩散区域过于规则和扩散边界的走样。2005年余斌等^[3]提出了呈现正态分布的纤维点和纤维丝组成的纸张模型, 将生成的纤维丝视为传输介质, 用 Wang 等^[4]提出的“伪布朗运动”模拟墨水中的碳粒子在纤维集合中的运动; 为了模拟宣纸结构, 该方法需要生成大量的纤维点以及与之关联的纤维走向和长度, 其模拟过程需要大量的运算和存储空间。

目前, 墨水扩散的模拟工作基本上将其视为碳粒子和水粒子分别做自由运动的结果。Small^[5]最早提出应用细胞自动机理论仿真水彩画; Curtis 等^[6]对 Small 的模型进行了扩充, 引入了更复杂的浅水流动仿真模型模拟水彩画的扩散效果; 1995年, Kunii 等^[7]通过仔细分析墨水扩散过程, 发现墨水扩散边缘的颜色灰度与碳粒子在水中的浓度存在明显的关

收稿日期: 2013-05-13; 修回日期: 2013-07-23。

作者简介: 范东云(1989-), 男, 江西吉安人, 硕士研究生, 主要研究方向: 计算机图形学; 李海晟(1968-), 男, 浙江东阳人, 副教授, 主要研究方向: 图形图像的变形、3D建模与绘制。

系,因而采用线性微分方程来描述碳粒子和水粒子扩散过程中的浓度变化规律。后来他们改进了线性微分方程^[8],以提高墨水扩散的真实感。通过求解偏微分方程得到的边缘一般比较光滑,因此这类方法模拟的扩散边缘形状光滑不够自然。2003 年,Way 等^[9]通过将纸张划分为多层结构,将墨水视为水粒子和碳粒子的集合,将扩散现象视为纸张的吸水性导致水流运动而碰撞碳粒子的过程,此方法能模拟多种墨水扩散的效果,但是由于其运动过程模拟过于复杂,导致其运算效率较低。2006 年,Chu 等^[10]提出了基于改进的 Lattice-Boltzman 算法^[11]和三层流体渗透模型来模拟水和碳粒子在宣纸上的吸收、渗透和扩散过程,并在文献[12]提出的毛笔模型的基础上,实现了一个电子创作系统,取得了较好的实验结果,但其过程复杂,运算量大。

本文首次把宣纸中的纤维视为阻碍墨水扩散的物质,并赋以权重刻画纤维对墨水扩散阻碍作用的大小,提出了模拟宣纸的加权纤维结构,在此基础上,把纤维结构的权重和宣纸上剩余墨水量相结合作为扩散系数,给出了描述墨水扩散的变系数扩散方程,该方程可用稳定的 Crank-Nicolson 方法求解,能够在线性时间内从上一帧图像获得随后的扩散图像。本文的方法综合考虑了宣纸结构和墨水属性,能够真实地模拟墨水扩散的颗粒状边缘,克服了类似模拟方法容易产生边界过于平滑的问题。

1 加权纤维结构

宣纸起源于中国唐朝时期,是一种主要的高级书画用纸。因其具有保存方便、经久不脆和不易褪色的特点,而享有“纸寿千年”之誉,一笔落下,墨韵清晰,层次分明。宣纸独特的渗透和润滑性,使其成为中国书法艺术的主要载体。尽管宣纸上的书法作品风格迥异,但字的边缘均有颗粒状现象,如图 1 所示,而这种现象在比较光洁的普通纸张上不明显或没有。因此要真实地模拟这种扩散现象,必须考虑宣纸的结构及其物理特性。



图1 宣纸上的书法

由于原材料和加工方法不同,宣纸品种丰富,但通过使用高倍率的显微镜观察后发现不同品种的宣纸结构基本相同,类似于纤维丝网结构。图 2 是半熟宣纸放大 500 倍的结构图,从中可知纸张由不同长度和形状的纤维丝随机叠放和粘连而成,呈现网状结构。由于纤维丝的无序交错和堆叠,宣纸表面形成许多凸起和凹陷区域,其中凸起区域是纤维丝或多条纤维丝的交接处,而凹陷区域则是纤维丝围成的多边形。为叙述方便,本文称多条纤维丝相交接处为纤维结,凹陷区域为空洞,并把宣纸的单位面积上空洞数量称为纤维密度记为 D ,它与纤维丝疏密程度有关,也是宣纸扩散性能的影响因素之一,由宣纸的品种决定。

另外,通过观察宣纸上的墨水扩散过程,容易得出下述结论,墨水扩散的速度和范围与扩散源的墨水量成正比,墨水量多,扩散速度快且范围大;反之,则速度慢且范围小。从微观

角度来看,由于纤维丝直径为 10 nm,而水分子直径为 0.4 nm,碳粒子直径为 10 ~ 150 nm^[10],当墨水遇到纤维丝阻碍时,如要越过它继续扩散,则需要一定量的墨水形成足够的水压;否则墨水只能在纤维丝的一侧自由扩散。因此,纤维丝在墨水扩散中起着阻碍渗透和改变扩散方向的作用,而纤维结的厚度和高度是纤维丝的数倍,阻碍墨水扩散的能力更强。空洞其实是纤维丝围成的多边形区域,内部无阻挡物,类似于蓄水池,起着容纳墨水的作用。因此,本文把宣纸抽象成一个有长度不等值线段随机相交而成的网格来模拟其纤维结构,直线段表示纤维丝,并定义纤维结构上各点的权重如下:

$$B(x, y) = \begin{cases} f, & \text{点}(x, y) \text{ 处于纤维丝上} \\ d, & \text{点}(x, y) \text{ 处于纤维结中} \\ 0, & \text{点}(x, y) \text{ 处于纤维空洞中} \end{cases} \quad (1)$$

其中 f 与 d 应满足约束条件 $0 < f < d < 1$,其取值根据不同的宣纸种类而定。



图2 显微镜 500 倍率下的半熟宣纸结构

为了生成分布均匀方向随机的纤维丝,本文将宣纸划分为若干大小相同的正方形虚拟网格作为纤维结的容器,每个网格中随机生成一个纤维结,并将近邻的网格内的纤维结随机相连形成纤维丝。

图 3 是基于以上方法生成的纤维结构图,各参数如下:网格数量为 60×60 ,网格内的纤维结连接上限为 2,近邻空间大小为 7×7 。图中圆点为纤维结,直线段为纤维丝,空白区为空洞。

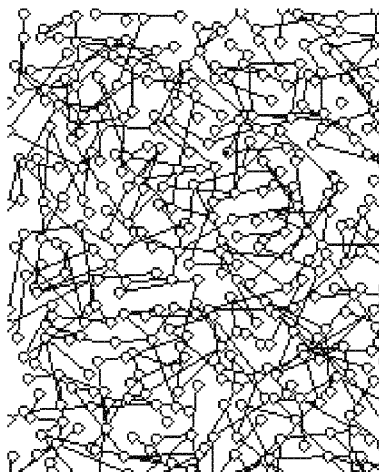


图3 宣纸纤维结构的模拟

2 墨水扩散方程

墨水扩散实际上是水携带碳粒子从高浓度区域向低浓度区域传递的过程。随着扩散的进行,墨水不断被宣纸吸收和自然蒸发,导致墨水量减少,从而扩散动力减弱,最终使得墨水扩散停止。宣纸可看作是一种非均匀传输介质,墨水在宣纸上任意一点的扩散性能由该点的墨水量和纤维属性共同决定。由此,本文用非均匀等向介质中的变系数扩散方程来描

述墨水在宣纸中的扩散,其扩散系数取决于剩余墨水量和纤维结构的权重因子。

通过观察和分析墨水扩散的过程,不难得出以下结论:当墨水在扩散源附近时,其扩散速度较快,继而速度逐渐减小直至停止。该现象是由于单位面积上剩余墨水量的变化造成的。本文将单位面积上的剩余墨水量简称为剩余墨水量。当墨水刚开始扩散时,因墨水扩散而增长的墨水覆盖区域面积较小,墨水量损失较少,因此剩余墨水量变化较小;而随着时间的推移,扩散的范围逐渐变大,剩余墨水量的衰减速度也加快,从而使得扩散速度变慢,最后,当剩余墨水量减小到不足以支持墨水跨越宣纸纤维时停止扩散。本文用余弦函数来刻画剩余墨水量的变化规律。设 Q 为初始墨水量, $q(t)$ 是剩余墨水量随时间变化的函数,定义如下:

$$q(t) = \cos \frac{\pi t}{2(Q+a)}; \quad Q > 0 \quad (2)$$

其中 a 为偏置参数,并使得 $t_{\max} < Q+a$,从而墨水量衰减至一定值时,即停止扩散。

墨水在宣纸上任一点 $P(x,y)$ 的扩散性能与当前时刻的剩余墨水量成正比,而纤维结构上的权重则表示纤维的阻碍作用,因此本文将扩散系数定义为 $q(t)$ 和 $1-B(x,y)$ 的乘积,即 $k(t,x,y) = q(t)(1-B(x,y))$ 。由此得到宣纸上的墨水扩散方程:

$$\begin{cases} \frac{\partial U}{\partial t} = k(t,x,y) \left(\frac{\partial^2 U}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 U}{\partial y^2} \right) \\ U(x,y,t)|_{t=0} = \sigma(x,y) \end{cases} \quad (3)$$

其中 $\sigma(x,y)$ 是宣纸平面上墨水分布的初始函数。

只有少数变系数扩散方程能够求得解析解,一般情况下,可用数值方法求得其近似解。随着计算机和并行计算的发展,针对变系数扩散方程,相继出现了一些近似程度比较高的数值方法,常见的有泰勒级数展开法、Keller 盒式格式解法以及 Crank-Nicolson 隐式格式法^[15]。其中泰勒级数展开法的精度与方程形式有关且是有条件稳定的;Keller 盒式格式的解法虽具有二阶精度、无条件稳定等优点,但对方程的类型有要求,故不适合方程(3);因此本文使用具有二阶精度且无条件稳定的 Crank-Nicolson 法来求解方程(3)。

为了表达方便,将方程(3)的右式记为: $F(x,y,t, \frac{\partial^2 U}{\partial x^2}, \frac{\partial^2 U}{\partial y^2})$,并记其在 t_n 时刻 (x,y) 点的差分表达式为 $F_{x,y}^n$,即:

$$F_{x,y}^n = k(t,x,y) \cdot \left(\frac{U(x+h,y,t) - 2U(x,y,t) + U(x-h,y,t)}{h^2} + \frac{U(x,y+h,t) - 2U(x,y,t) + U(x,y-h,t)}{h^2} \right) \quad (4)$$

其中 h 为空间步长。

在 t_n 时刻,方程(3)的左式用关于时间变量的向前差分近似,得到其差分形式:

$$\frac{U^{n+1}(x,y) - U^n(x,y)}{\Delta t} = F_{x,y}^n \quad (5)$$

同理在 t_{n+1} 时刻,当方程(3)的左式用关于时间变量的向前差分近似,得到其差分形式:

$$\frac{U^{n+1}(x,y) - U^n(x,y)}{\Delta t} = F_{x,y}^{n+1} \quad (6)$$

将式(5)和式(6)相加后,得到求解方程(3)的 Crank-Nicolson 方程:

$$\frac{U^{n+1}(x,y) - U^n(x,y)}{\Delta t} = \frac{1}{2}(F_{x,y}^{n+1} + F_{x,y}^n) \quad (7)$$

这是一个三对角问题,应用三对角矩阵算法即可得到任意点在 t_n 时刻的结果,且不需要对矩阵直接求逆。Crank-Nicolson 是无条件稳定的,但是当时间步长与空间步长平方的比值过大,近似解中将存在虚假的振荡或衰减。因此,在使用该方程求解本模型的数值解时,空间上 x 和 y 方向的步长 h 都取为 1,时间步长 Δt 则为 $1/2$ 。

3 实验结果和讨论

基于上述原理和方法,实现了一个宣纸上的墨水扩散模拟系统,用户可以通过调节初始墨水量、宣纸的纤维密度和纤维结构权重获得多种扩散效果,并在 CPU 为 2.13 GHz、内存为 2 GB 的 PC 上模拟了多种扩散效果。图 4 是不同初始墨水量在相同宣纸上的扩散模拟结果。宣纸纤维密度取 90,纤维结和纤维丝的权重分别为 0.88 和 0.55,初始墨水量分别为 5,13,17。容易看出扩散的范围随着初始墨水量的增加而增大,这与实际的扩散结果一致。

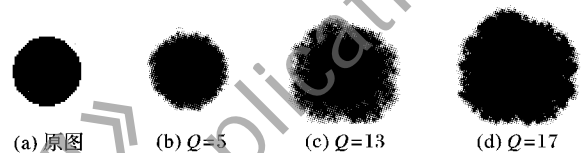


图4 不同初始墨水量下的扩散模拟结果

下一个例子是相同初始墨水量在不同宣纸结构上的扩散模拟结果,如图 5 所示。图 5(a) 为输入图;图 5(b)、图 5(c)、图 5(d) 是墨水量 Q 为 5,其纤维结构参数分别为 $D=90, d=0.88, f=0.55, D=70, d=0.92, f=0.65$,以及 $D=50, d=0.96, f=0.75$ 时的墨水扩散效果图。从中可知宣纸的纤维密度对墨水扩散的边缘有较大影响,扩散边缘随着纤维密度的增大变得细腻,这种模拟效果接近真实的扩散结果。

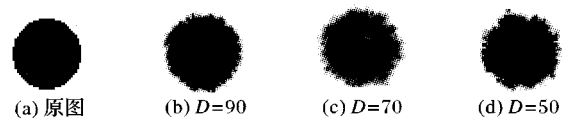


图5 不同纤维密度下的扩散效果

本模拟方法的一个重要应用是电子书法笔迹的边缘处理。通过适当选取初始墨水量和宣纸结构参数,应用该方法对电子书法笔迹进行扩散,可以得到宣纸上的书法效果,如图 6 所示。为了具有可比性,把真实宣纸上的书法边缘进行光顺处理,作为扩散模拟系统的输入电子书法,图 6(a) 即为边界光滑的电子书法笔迹,图 6(b) 是设置各参数 $D=90, Q=9, d=0.88, f=0.55$ 得到的实验效果图,而图 6(c) 是图 6(a) 对应的真实宣纸上的书法。实验结果表明,扩散后的边缘接近真实的书法边界。



图6 宣纸上书法效果的模拟结果

4 结语

本文提出了一个宣纸上墨水扩散的模拟方法,考虑了影

响墨水扩散的两个主要因素:宣纸结构和墨水属性。给出了模拟宣纸结构的加权纤维结构,并把纤维权重和纸上剩余墨水量相结合作为扩散系数,提出了描述墨水扩散的变系数扩散方程。为了提高运行效率,本文采用预先生成宣纸纤维结构的策略,而在模拟过程中只需求解扩散方程就可获得扩散图像。用户可以通过调节初始墨水量、纤维密度和纤维权重等参数获得不同的墨水扩散效果。实验结果表明该模型能较好地模拟不同宣纸上的多种墨水扩散效果。但该方法不能真实地模拟扩散边缘的灰度变化,主要原因有两个:一是扩散图像是通过求解扩散方程得到,而本文的求解方法只有 2 阶精度;二是由于墨水扩散是一个复杂的物理过程,涉及墨水性质、宣纸结构、宣纸吸水性、液体扩散过程等诸多因素,而本文方法只考虑了墨水量和单层宣纸结构。因此未来的研究重点是提出高精度的扩散方程的数值解法和考虑宣纸空间结构的扩散方程,从而更真实地模拟各种扩散效果。

参考文献:

- [1] GUO Q, KUNII T L. Modeling the diffuse paintings of Sumie [M]. Berlin: Springer, 1991.
- [2] LEE J. Diffusion rendering of black ink paintings using new paper and ink models [J]. Computers and Graphics, 2001, 25(2): 295–308.
- [3] 余斌,孙济洲,白海飞,等. 基于纸的物理建模的水墨画扩散效果仿真[J]. 系统仿真学报, 2005, 17(9): 2305–2309.
- [4] WANG X, JIAO J, SUN J. Graphical simulator for Chinese ink-wash drawing [J]. Transactions of Tianjin University, 2002, 8(1): 1–7.
- [5] SMALL D. Simulating watercolor by modeling diffusion, pigment, and paper fibers [C]// Proceedings of SPIE 1991: Image Handling and Reproduction Systems Integration. San Jose: International Society for Optics and Photonics, 1991: 140–146.
- [6] CURTIS C J, ANDERSON S E, SEIMS J E, *et al.* Computer-generated watercolor [C]// Proceedings of the 24th Annual Conference on Computer Graphics and Interactive Techniques. New York: ACM Press, 1997: 421–430.
- [7] KUNII T L, NOSOVSKIY G V, HAYASHI T. A diffusion model for computer animation of diffuse ink painting [C]// CA'95: Proceedings of the Computer Animation. Washington, DC: IEEE Computer Society, 1995: 98–102.
- [8] KUNII T L, NOSOVSKIY G V, VECHERININ V L. Two-dimensional diffusion model for diffuse ink painting [J]. International Journal of Shape Modeling, 2001, 7(1): 45–58.
- [9] WAY D L, HUANG S W, SHIH Z C. Physical-based model of ink diffusion in Chinese paintings [EB/OL]. [2013-04-25]. <http://wenku.baidu.com/view/681ea52c0066f5335a8121cc.html>.
- [10] CHU N S H, TAI C L. MoXi: real-time ink dispersion in absorbent paper [J]. ACM Transactions on Graphics, 2005, 24(3): 504–511.
- [11] SUCCI S. Lattice Boltzmann equation [M]. Oxford: Oxford University Press, 2001.
- [12] CHU N S H, TAI C L. Real-time painting with an expressive virtual Chinese brush [J]. Computer Graphics and Applications, 2004, 24(5): 76–85.
- [13] CHA S, PARK J, HWANG J, *et al.* An efficient diffusion model for viscous fingering [J]. The Visual Computer, 2012, 28(6/7/8): 563–571.
- [14] WANG C M, WANG R J. Image-based color ink diffusion rendering [J]. IEEE Transactions on Visualization and Computer Graphics, 2007, 13(2): 235–246.
- [15] 陆金甫,关治. 偏微分方程数值解法[M]. 北京: 清华大学出版社, 2004.

(上接第 3178 页)

5 结语

本文通过对图像记忆性特性的研究,提出了一种基于视觉显著熵与改进的 Object Bank 特征的记忆性预测方法,能自动地预测图像的记忆性值。与现有方法进行实验对比,表明了本文所提方法的有效性。

参考文献:

- [1] ISOLA P, XIAO J, TORRALBA A, *et al.* What makes an image memorable [C]// Proceedings of the 2011 IEEE Conference on Computer Vision and Pattern Recognition. Piscataway: IEEE Press, 2011: 145–152.
- [2] LOWE D. Distinctive image features from scale-invariant keypoint [J]. International Journal of Computer Vision, 2004, 60(2): 91–110.
- [3] DALIL J, TRIGGS B. Histograms of oriented gradients for human detection [C]// Proceedings of the 2005 IEEE Computer Society Conference on Computer Vision and Pattern Recognition. Piscataway: IEEE Press, 2005: 886–893.
- [4] SHECHTMAN E, MICHAL I. Matching local self-similarities across images and videos [C]// Proceedings of the 2007 IEEE Conference on Computer Vision and Pattern Recognition. Piscataway: IEEE Press, 2007: 1–8.
- [5] OLIVA A, TORRALBA A. Modeling the shape of the scene: a holistic representation of the spatial envelope [J]. International Journal of Computer Vision, 2001, 42(3): 145–175.
- [6] ITTI L, KOCH C, NIEBUR E. A model of saliency-based visual attention for rapid scene analysis [J]. IEEE Transactions on Pattern Analysis and Machine Intelligence, 1998, 20(11): 1254–1259.
- [7] JUDD T, EHINGER K, DURAND F, *et al.* Learning to predict where humans look [C]// Proceedings of 2009 IEEE 12th International Conference on Computer Vision. Piscataway: IEEE Press, 2009: 2106–2113.
- [8] WANG R, McKENNA J, HAN J, *et al.* Visualizing image collections using high-entropy layout distributions [J]. IEEE Transactions on Multimedia, 2010, 12(8): 803–813.
- [9] BELONGIE S, MALIK J, PUZICHA J. Shape matching and object recognition using shape contexts [J]. IEEE Transactions on Pattern Analysis and Machine Intelligence, 2002, 24(4): 509–522.
- [10] FELZENSZWALB P, GIRSHICK R, MCALLESTER D, *et al.* Object detection with discriminatively trained part based models [J]. IEEE Transactions on Pattern Analysis and Machine Intelligence, 2010, 32(9): 1627–1645.
- [11] LI L, SU H, XING E, *et al.* Object Bank: a high-level image representation for scene classification and semantic feature sparsification [C]// Proceedings of the Twenty-Fourth Annual Conference on Neural Information Processing Systems. Vancouver: Curran Associates Inc, 2010: 1378–1386.
- [12] LI L, HAO S, LIM Y, *et al.* Objects as attributes for scene classification [C]// Proceedings of the 11th European Conference on Computer Vision. Berlin: Springer-Verlag, 2010: 57–69.
- [13] CHANG C C, LIN C J. LIBSVM: a library for support vector machines [J]. ACM Transactions on Intelligent Systems and Technology, 2011, 2(3): 27.