

# 求解半定规划的新算法

于冬梅\*, 高雷阜

(辽宁工程技术大学 理学院, 辽宁 阜新 123000)

(\*通信作者电子邮箱 gaoleifu@163.com)

**摘要:**为了提高求解半定规划问题的运算效率,提出了一种新的求解半定规划的非单调信赖域算法。将半定规划的最优性条件转化为无约束优化问题,并构造无约束优化问题的信赖域子问题,修正信赖域半径的校正条件,当初始搜索点处于峡谷附近时仍能搜索到全局最优解。实验结果表明,对于小规模 and 中等规模的半定规划问题,该算法的迭代次数都比经典的内点算法少,运行速度快。

**关键词:**半定规划;信赖域算法;非单调策略;内点算法;无约束优化

**中图分类号:** TP301.6 **文献标志码:** A

## New algorithm for semidefinite programming

YU Dongmei\*, GAO Leifu

(College of Science, Liaoning Technical University, Fuxin Liaoning 123000, China)

**Abstract:** In order to improve the operational efficiency of SemiDefinite Programming (SDP), a new nonmonotonic trust region algorithm was proposed. The SDP problem and its duality problem were transformed into unconstrained optimization problem and the trust region subproblem was constructed, the trust region radius correction condition was modified. When the initial search point was near the canyon, the global optimal solution still could be found. The experimental results show that the number of iterations of the algorithm is less than the classical interior point algorithm for small and medium scale semidefinite programming problems, and the proposed algorithm works faster.

**Key words:** SemiDefinite Programming (SDP); trust region algorithm; nonmonotonic strategy; interior algorithm; unconstrained optimization

## 0 引言

半定规划(SemiDefinite Programming, SDP)是线性规划(Linear Programming, LP)的拓广,它的特殊之处在于约束条件满足“对称矩阵的仿射组合半正定”,进而使目标函数极大(极小)化。在SDP模型下,线性规划、凸二次规划(Convex Quadratic Programming, CQP)、二阶锥优化(Second-Order Cone Programming, SOCP)等规划问题均可看作其特殊形式<sup>[1]</sup>。同时,半定规划在控制论、特征值优化、组合优化和工业工程设计等多方面的广泛应用以及内点算法在半定规划理论和实践上的有效性,使其成为优化领域里一个非常重要的研究方向。因此,研究半定规划及其求解算法具有较高的理论价值与实际意义。

信赖域算法是求解非线性优化问题的一类重要方法,它的研究起源于1970年Powell的工作,他提出了求解无约束优化问题的信赖域算法。我国优化专家袁亚湘研究员在信赖域算法的设计和收敛性分析方面,取得了一系列的重要成果。信赖域算法因其很好的稳定性、适应性和很强的收敛性在求解无约束优化问题中备受青睐<sup>[2]</sup>。本文采用信赖域方法和非单调技术相结合的方法,提出了基于半定规划问题的信赖域改进算法。算法通过引入一个参数,使得信赖域半径的校正条件适当地放宽了,从而放大信赖域半径,进而跳出峡谷,搜索到全局最优解。数值实验结果表明本文的非单调信赖域

算法对于半定规划问题的求解是非常有效的。

## 1 问题的提出

考虑如式(1)所示的标准形式的半定规划问题和如式(2)所示的其对偶问题:

$$\begin{aligned} \min & C \cdot X \\ \text{s. t.} & \langle A_i, X \rangle = b_i; i = 1, 2, \dots, m \\ & X \geq 0 \end{aligned} \quad (1)$$

$$\begin{aligned} \max & b^T y \\ \text{s. t.} & A^T y + S = C \\ & y \in \mathbb{R}^m, S \geq 0 \end{aligned} \quad (2)$$

其中:  $C, A_i \in \mathbb{R}^{n \times n}$ ;  $X \in \mathbb{S}^{n \times n}$  为对称矩阵;“ $\cdot$ ”表示Frobenius内积;  $C \cdot X = \text{Tr}(CX) = \sum_{i=1, j=1}^{i=n, j=n} C_{ij} X_{ij}$  表示矩阵  $CX$  的迹;  $X \geq 0$  表示  $X$  是半正定矩阵,给定的  $m$  维向量为  $b = (b_1, b_2, \dots, b_m)^T \in \mathbb{R}^m$ 。

半定规划内点算法在理论上已经非常成熟,已被证明是求解半定规划问题的有效方法之一<sup>[3-7]</sup>,但是内点法也有它的缺陷,它要求每一步迭代都可行,而且每一步迭代都位于中心路径内,需要对称化算子,计算量很大。因此本文尝试用改进信赖域算法求解半定规划问题。

### 1.1 改写中心路径

求解半定规划的问题等价于求解一个非线性方程组,即

**收稿日期:** 2013-06-03; **修回日期:** 2013-10-28。 **基金项目:** 教育部高校博士学科点专项科研基金联合资助项目(20132121110009); 国家自然科学基金资助项目(11326224); 辽宁省教育厅基金资助项目(L2012105)。

**作者简介:** 于冬梅(1986-),女,辽宁鞍山人,博士研究生,主要研究方向:最优化理论与应用、半定规划、锥规划; 高雷阜(1963-),男,辽宁阜新新人,教授,博士,主要研究方向:最优化理论与应用、混沌动力系统预测。

半定规划的最优性(Karush-Kuhn-Tucker, KKT)条件:

$$F(X, y, S) = \begin{bmatrix} (A_i \cdot X - b_i)_{i=1}^m \\ \sum_{i=1}^m y_i A_i + S - C \\ XS \end{bmatrix} = 0 \quad (3)$$

其中:  $X, S \geq 0$ , 表示  $X, S$  是半正定矩阵。在求解问题(1)和(2)中, 每一步迭代都需要考虑不等式约束  $X, S \geq 0$ , 但在实际中, 保证这种可行性是不容易的。为了解决这个问题, 本文引入推广的 Fischer-Burmeister 函数<sup>[8-10]</sup>, 把问题(3)转化为一个无约束优化问题, 并构造信赖域子问题, 然后把信赖域法和非单调技术结合求解问题(3)的解。

定义映射  $\varphi: \mathbf{R} \times \mathbf{R} \rightarrow \mathbf{R}$  为

$$\varphi(a, b) := a + b - (a^2 + b^2)^{1/2}$$

它具有如下性质:

$$\varphi(a, b) = 0 \Leftrightarrow a \geq 0, b \geq 0, ab = 0$$

把上面的 Fischer-Burmeister 函数进行推广, 定义一个矩阵值函数  $\Phi: \mathbf{R}^{n \times n} \times \mathbf{R}^{n \times n} \rightarrow \mathbf{R}^{n \times n}$ ,

$$\Phi(X, S) = X + S - (X^2 + S^2)^{\frac{1}{2}}$$

同理也有类似的性质<sup>[5]</sup>:

$$\Phi(X, S) = 0 \Leftrightarrow X \geq 0, S \geq 0, XS = 0 \quad (4)$$

$\Phi(X, S)$  是 Frechet 意义上的不可微函数, 引入参数  $\mu$ , 令  $\mu \geq 0$  为任意非负数, 定义映射  $\Phi_\mu: \mathbf{S}^{n \times n} \times \mathbf{S}^{n \times n} \rightarrow \mathbf{S}^{n \times n \times n}$  为

$$\Phi_\mu(X, S) := X + S - (X^2 + S^2 + 2\mu^2 I)^{1/2} \quad (5)$$

可以证明下面的结论:

定理 1<sup>[4]</sup> 令  $\mu > 0$  为任意正数, 则有

$$\Phi_\mu(X, S) = 0 \Leftrightarrow X > 0, S > 0, XS = \mu^2 I$$

其中  $X > 0$  表示  $X$  是正定矩阵。

证明 首先假设  $X > 0, S > 0, XS = \mu^2 I$  成立, 则可以推出  $XS + SX = 2\mu^2 I$ , 所以

$$(X + S)^2 = X^2 + S^2 + 2\mu^2 I$$

则有

$$X + S = (X^2 + S^2 + 2\mu^2 I)^{1/2}$$

从而可以得到  $\Phi_\mu(X, S) = 0$ 。

反之, 如果对于两个对称阵  $X, S \in \mathbf{S}^{n \times n}$ , 有  $\Phi_\mu(X, S) = 0$ , 即

$$X + S = (X^2 + S^2 + 2\mu^2 I)^{1/2}$$

等式两边同时平方得:

$$(X + S)^2 = X^2 + S^2 + 2\mu^2 I$$

$$X + S \in \mathbf{S}_{++}^{n \times n}$$

等价于

$$\begin{cases} XS + SX = 2\mu^2 I \\ X + S \in \mathbf{S}_{++}^{n \times n} \end{cases} \quad (6)$$

设对称矩阵  $X$  的谱分解为  $X = Q^T D Q$ , 其中  $Q \in \mathbf{R}^{n \times n}$  是正交矩阵,  $D = \text{Diag}(\lambda_1, \dots, \lambda_n)$ , 记  $A: X = Q S Q^T$ , 则式(6)可改写为:

$$\begin{cases} DA + AD = 2\mu^2 I \\ D + A \in \mathbf{S}_{++}^{n \times n} \end{cases} \quad (7)$$

对所有的  $i, j = 1, 2, \dots, n$ , 有

$$\begin{cases} (\lambda_i + \lambda_j) a_{ij} = 2\mu^2 \delta_{ij} \\ D + A \in \mathbf{S}_{++}^{n \times n} \end{cases} \quad (8)$$

其中:

$$\delta_{ij} = \begin{cases} 1, & i = j \\ 0, & i \neq j \end{cases}$$

特别地, 当  $i = j$  时, 对所有的  $i = 1, 2, \dots, n$  有  $2\lambda_i a_{ii} = 2\mu^2$  和  $\lambda_i + a_{ii} > 0$ , 显然, 对任意的  $i = 1, 2, \dots, n$  都有  $\lambda_i > 0$ 。因此, 对称矩阵  $X$  是正定矩阵。同理对  $S$  进行谱分解也可得到  $S$  的正定性。

由式(7)可得  $\lambda_i + \lambda_j > 0$ , 故对任意的  $i \neq j$  有  $a_{ij} = 0$ 。因此  $A$  是一个对角矩阵, 进而有  $DA = AD$ , 结合式(7)可得  $DA = \mu^2 I$ 。等式两边左乘  $Q^T$ , 右乘  $Q$  可得

$$\mu^2 I = Q^T D A Q = Q^T D Q S = X S$$

于是求解半定规划问题(1)就等价于求解问题(7):

$$F_\mu(X, y, S) = \begin{bmatrix} (A_i \cdot X - b_i)_{i=1}^m \\ \sum_{i=1}^m y_i A_i + S - C \\ \Phi_\mu(X, S) \end{bmatrix} = 0 \quad (9)$$

## 1.2 信赖域子问题

为了求解问题(9), 把它转化为一个无约束优化题, 令  $W = (X, y, S)$ , 定义一个函数

$$\Psi_\mu(W) = \frac{1}{2} \|F_\mu(W)\|^2$$

所以求解  $F_\mu(W) = 0$  转化成求解无约束最小优化问题  $\min \Psi_\mu(W)$ 。

根据信赖域的基本思想构造信赖域的子问题

$$\begin{aligned} \varphi_k(d_k) &= F(W_k) + \nabla F_\mu(W_k)^T d_k + \\ &\quad \frac{1}{2} d_k^T \nabla^2 F_\mu(W_k) \nabla F_\mu(W_k)^T d_k \\ \text{s.t. } \|d_k\| &\leq \Delta_k \end{aligned} \quad (10)$$

求信赖域子问题(9)的最优解  $d_k$ , 计算目标函数的实际下降量  $Are d_k = \|F_k\| - \|F(W_k + d_k)\|$  与预估下降量  $Pre d_k = \|\varphi_k(0)\| - \|\varphi_k(d_k)\|$  的比值  $r_k$ :

$$r_k = \frac{Are d_k}{Pre d_k} = \frac{\|F_k\| - \|F(W_k + d_k)\|}{\|\varphi_k(0)\| - \|\varphi_k(d_k)\|}$$

如果  $r_k \geq \eta_1$  ( $\eta_1 \in (0, 1)$ ), 则接受  $d_k, W_{k+1} = W_k + d_k$ , 信赖域半径增加或不变; 否则信赖域半径减少, 求新的  $d_k$  和  $r_k$ 。重复以上过程可求得无约束优化问题的最优解。

定义:

$$\|F_{l(k)}\| = \max_{0 \leq j \leq m(k)} \{\|F(W_{k-j})\|\} \quad (11)$$

其中:  $m(k) = \min\{m(k-1) + 1, M\}$ ,  $M$  是非负整数,  $m(0) = 0$ 。

对式(11)进一步修正, 在  $\|F_{l(k)}\|$  的前面乘以参数  $a_k$ 。若  $\|F_{l(k)}\| \geq \theta$ , 则  $a_k \geq 1$ ; 若  $\|F_{l(k)}\| < \theta$ , 则  $a_k < 1, \theta \in \mathbf{N}_+$ , 在迭代的过程中  $a_k$  总是趋向于 1 的, 即  $\lim_{k \rightarrow \infty} a_k = 1$ 。

对信赖域半径的调整, 依赖于

$$Are d_{l(k)}^k = a_k \|F_{l(k)}\| - \|F(W_k + d_k)\|$$

与  $Pre d_k$  的比值, 若要求接受条件为

$$\rho_{l(k)}^k = \frac{Are d_{l(k)}^k}{Pre d_k} \geq \eta_1$$

就接受  $W_{k+1} = W_k + d_k$ 。

## 2 非单调信赖域算法求解半定规划问题

以下给出的非单调信赖域算法的具体实现过程:

第1步 给定初始点  $W^0 = (X^0, y^0, S^0)$ , 精度  $\varepsilon \geq 0$ , 取  $\bar{\Delta} > 0$  为信赖域半径的上界, 令  $\Delta_0 \in (0, \bar{\Delta}]$ ,  $0 < \eta_1 < \eta_2 < 1$ ,  $0 < r_1 < 1 < r_2$ ,  $k = 0, M$  为非负常数,  $\theta \in \mathbf{N}_+$ 。

第2步 检验终止条件, 计算  $G_k$ , 若  $\|G_k\| \leq \varepsilon$ , 则  $W^* = W_k$ , 算法终止。

第3步 求解子问题(10),为了求得  $W_k$ ,利用式(11)求得  $F_{l(k)}$ 。

第4步 计算  $\rho_{l(k)}^k = \frac{Are \ d_{l(k)}^k}{Pre \ d_k}$ ,其中

$$Are \ d_{l(k)}^k = a_k \| F_{l(k)} \| - \| F(W_k + d_k) \|$$

$$Pre \ d_k = \| \varphi_k(0) \| - \| \varphi_k(d_k) \|$$

第5步 校正信赖域半径

$$\Delta_{k+1} = \begin{cases} r_1 \Delta_k, & \rho_{l(k)}^k \leq \eta_1 \\ \min(r_2 \Delta_k, \bar{\Delta}), & \rho_{l(k)}^k \geq \eta_2 \\ \Delta_k, & \text{其他} \end{cases}$$

第6步 若  $\rho_{l(k)}^k \geq \eta_1$ ,则  $W_{k+1} = W_k + d_k$ ;否则  $W_{k+1} = W_k, k = k + 1$ ,转第2步。

### 3 算法仿真及比较

为了验证算法的可行性及有效性,在 Matlab7.0 中执行该算法,在实施算法时,为了与内点算法进行比较,初始点  $W^0 = (X^0, y^0, S^0)$  的选取与文献[11]相同,其中参数  $\eta_1 = 0.25, \eta_2 = 0.75, r_1 = 1, r_2 = 2, \Delta_0 = \| G_0 \| / 5, \bar{\Delta} = \| G_0 \| / 2$ ,精度  $\varepsilon = 10^{-6}$ 。

表1~2分别给出了本文算法针对 SDPT3<sup>[12]</sup>中五类问题的数值结果,为与其他内点算法进行比较,表中给出了3类最常见的分别沿 AHO、HKM、NT 方向<sup>[13-15]</sup>的内点算法的数值结果,其中 *neiter* 表示迭代次数,  $n$  和  $m$  表示问题的规模。由于内点算法对于求解中小规模半定规划问题非常有效,因此针对小规模( $n, m \leq 10$ )和中等规模( $10 < n, m < 50$ )的SDP问题进行仿真。实验结果表明,本文算法在解决一般规模的SDP问题时迭代次数明显少于内点法。因此,这种新的非单调信赖域算法特别适用于中小规模半定规划问题的求解。

表1 小规模SDP问题迭代次数的数值实验结果比较

问题	$n$	$m$	<i>neiter</i>			本文算法
			AHO	HKM	NT	
Nommin	10	8	9	9	10	5
Maxcut	10	10	8	8	8	4
ETP	9	80	7	14	12	6
Lovasz	8	7	13	8	8	7
LogCheby	10	10	17	15	12	9

表2 中等规模SDP问题迭代次数的数值实验结果比较

问题	$n$	$m$	<i>neiter</i>			本文算法
			AHO	HKM	NT	
Nommin	60	10	18	20	17	12
Maxcut	40	18	12	14	12	15
ETP	60	30	13	18	16	10
Lovasz	40	20	17	12	10	9
LogCheby	120	30	28	35	23	20

### 4 结语

在信赖域算法和非单调信赖域算法中,信赖域半径的选取是很关键的一步。如果选取的初始搜索点恰好处于峡谷附近,那么,它在搜索时就会沿着峡谷缓慢前进,往往在搜索时出现锯齿现象,搜索到的最优解很可能是局部最优解。新算法通过将半定规划问题转化为无约束优化问题,并引入一个参数,使得信赖域半径的校正条件适当放宽,进而跳出峡谷,搜索到全局最优解,实验结果表明算法是有效的。将信赖域算法与非单调技术结合求解大规模半定规划问题将是今后的

研究重点。

参考文献:

- [1] WOLKOWICZ H, SAIGAL R, VANDENBERGHE L. Handbook of semidefinite programming[M]. Boston: Kluwer Academic Publishers, 2000: 1-27.
- [2] YUAN Y X, SUN W Y. Optimization theories and methods[M]. Beijing: Science Press, 2006: 599-600. (袁亚湘, 孙文渝. 最优化理论与方法[M]. 北京: 科学出版社, 2006: 599-600.)
- [3] CHEN X, TSENG P. Non-interior continuation methods for solving semidefinite complementarity problems[J]. Mathematical Programming, 2003, 95(3): 431-474.
- [4] LIU C H. Study on complexity of some interior-point algorithms in conic programming[D]. Xi'an: Xi'an Jiaotong University, 2012. (刘长河. 锥规划中若干内点算法的复杂性研究[D]. 西安: 西安交通大学, 2012.)
- [5] CHANG X K, GAO L F. Search directions of inexact primal-dual path-following algorithms for a special class of quadratic SDP[J]. Journal of Mathematics in Practice and Theory, 2011, 41(5): 217-223. (常晓凯, 高雷阜. 一类二次半定规划内点算法的搜索方向[J]. 数学的实践与认识, 2011, 41(5): 217-223.)
- [6] ZHANG W Q, ZHANG S G. Analysis of complexity of a primal-dual interior point algorithms based on a new kernel function for semidefinite optimization[J]. Journal of Fujian Teachers University: Natural Science, 2013, 29(2): 16-22. (张维泉, 张圣贵. 基于新函数下的半定规划原始对偶内点算法的复杂度分析[J]. 福建师范大学学报: 自然科学版, 2013, 29(2): 16-22.)
- [7] BENSON H, DAVID F S. Interior-point methods for nonconvex nonlinear programming: primal-dual methods and cubic regularization[EB/OL]. [2010-11-21]. [http://www.optimization-online.org/DB\\_HTML/2012/05/3457.html](http://www.optimization-online.org/DB_HTML/2012/05/3457.html).
- [8] LI G D. A trust region method with automatic determination of the trust region radius[J]. Chinese Journal of Engineering Mathematics, 2006, 23(5): 843-848. (李改弟. 一个自动确定信赖域半径的信赖域方法[J]. 工程数学学报, 2006, 23(5): 843-848.)
- [9] KANZOW C, NAGEL C. Semidefinite programs: new search directions, smoothing-type methods, and numerical results[J]. SIAM Journal on Optimization, 2003, 13(1): 1-23.
- [10] WANG M. A class of non-monotonic trust region algorithm for unconstrained optimization problems[D]. Beijing: Beijing University of Technology, 2008. (王梅. 求无约束优化问题的一类非单调信赖域算法[D]. 北京: 北京工业大学, 2008.)
- [11] HELMBERG C, RENDL F. An interior-point method for semidefinite programming[J]. SIAM Journal on Optimization, 1996, 6(2): 342-361.
- [12] TOH K C, TODD M J, TUTUNCU R H. SDPT3 — a Matlab software package for semidefinite programming, version 2.1[J]. Optimization Methods and Software, 1999, 11(2): 545-581.
- [13] YUAN Y. Conditions for convergence of trust region algorithms for nonsmooth optimization[J]. Mathematical Programming, 1985, 31(2): 220-228.
- [14] YANG G, TING C, QUN Y. Study on issues management of software project based on SDP-21 framework in the automobile industry[C]// FDMECE2012: Proceedings of the 16th International Conference on Fluid Dynamic and Mechanical & Electrical Control Engineering. Chongqing: Chinese Association of Fluid Power Control Engineering, 2012: 110-114.
- [15] ZHANG M, TAN H, SU Y D. Research of semi-definite programming SVM model[J]. Computer Engineering and Design, 2011, 21(5): 31-36. (张敏, 覃华, 苏一丹. 半定规划支持向量机模型的研究[J]. 计算机工程与设计, 2011, 21(5): 31-36.)