

5 次幂圈嵌套网络图的边-平衡指数集(m 模 3 余 2)

郑玉歌, 刘金萌*

(河南理工大学 数学与信息科学学院, 河南 焦作 454003)

(* 通信作者电子邮箱 xingfu0147@126.com)

摘要: 针对网络图边-平衡指数集标号问题, 在等圈嵌套网络图的基础上, 提出了幂圈嵌套网络图的概念, 进而研究无限路 5 次幂圈嵌套网络图的边-平衡指数集。利用基础图、带齿套圈子图、五点扇形子图组设计新思路, 大大降低了构造标号图的复杂程度, 确定了当 m 模 3 余 2 时, 无限路 5 次幂圈嵌套图的边-平衡指数集, 并且给出了边-平衡指数集对应图形标号的设计方法。

关键词: 边-友好标号; 边-平衡指数集; 5 次幂圈嵌套图; 带齿套圈子图; 五点扇形子图组

中图分类号: TN911.1 **文献标志码:** A

Edge-balanced index sets of five-power-cycle nested network graph (When m is divided by 3, the remainder is 2)

ZHENG Yuge, LIU Jinmeng*

(School of Mathematics and Information Science, Henan Polytechnic University, Jiaozuo Henan 454003, China)

Abstract: To cope with the edge-balanced index sets of network graph labeling, on the basis of the equal-cycle nested network graph, a new concept of power-cycle nested network graph was proposed. Moreover, the edge-balanced index sets of five-power-cycle nested network graph were investigated. It reduced the difficulty of five-power-cycle nested network graph labeling because of the new design of the basic graph, nested-cycle subgraph with gear and five-vertex sector subgraph group. The results show that the edge-balanced index sets of five-power-cycle nested graph when m is divided by 3, the remainder is 2. At the same time, the design method of the corresponding graphs is also provided.

Key words: edge-friendly labeling; edge-balanced index set; five-power-cycle nested graph; nested-cycle subgraph with gear; five-vertex sector subgraph group

0 引言

图的标号问题是图论中的一个重要研究课题, 而边-平衡指数是其中的热点问题, 其理论可以应用到信息工程、通信网络、计算机科学、经济管理、医学等方面。1995 年, Kong 等在文献[1]中定义了边-平衡性和强边-平衡性, 并提出了 2 个猜想。2002 年, Chen 等在文献[2]中扩充了边-平衡多重图的概念, 证明了文献[1]中的猜想是正确的, 并证明一个图是边-平衡的, 不是 NP-难问题。文献[3-4]中研究了图的点-平衡指数集和友好指数集, 文献[5]中运用构造法研究了新的边-平衡图族, 文献[6]中研究了轮图的边-平衡指数集, 文献[7]中研究了星圈交图的边-平衡指数集。文献[8-9]提出了无限链图, 研究了 $k_4 - e$ 链的边-平衡指数集, 确定了其完备指数集和完美指数集。文献[10-12]中研究了 $C_n \times P_3$, $C_n \times P_2$ 和 $C_n \times P_{11}$ 边-平衡指数集, 文献[13]完全解决了无限路等圈嵌套图边-平衡指数集。本文在等圈嵌套图的基础上, 对幂圈嵌套图 $C_{5m} \times P_{m_5}$ 按基础图、套圈子图、五点扇形子图组分部研究, 完全解决了无限路幂圈嵌套图 $C_{5m} \times P_{m_5}$ 边-平衡指数集; 给出了 $m \equiv 2 \pmod{3}$ 且 $m \geq 4$ 时, $C_{5m} \times P_{m_5}$ 边-平衡指数集的计算公式和图形的构造性证明, 其结果可运用到

到编码理论和信息工程。

1 预备知识

一个图 G 对应着一个有序对 (V, E) , 记为 $G = (V, E)$ 。其中: 图 G 的顶点集记为 $V(G)$, 边集记为 $E(G)$ 。本文研究的图均为简单图。

定义 1 设 f 是图 G 的边集 $E(G)$ 上的一个 0,1 标号函数, 即 $\forall e \in E(G)$, 定义 $f(e) = 0$ 或 1, 标号为 0 或 1 的边集记为 $E(0), E(1)$, 用 $e(0), e(1)$ 分别来表示此二集合的基数。由 f 诱导出一个顶点标号 $f^*: V(G) \rightarrow \{0, 1\}$ 的定义如下:

$$f^*(x) = \begin{cases} 0, & e_x(0) > e_x(1) \\ 1, & e_x(1) > e_x(0) \\ \text{不定义}, & e_x(0) = e_x(1) \end{cases}$$

其中 $e_x(0), e_x(1)$ 表示与 x 关联的边中标号为 0 或 1 的边集合的基数。图 G 中标号为 0 或 1 的顶点集分别记为 $V(0), V(1)$, 它们的基数分别记为 $v(0), v(1)$ [1]。

定义 2 设 f 是图 G 的边集 $E(G)$ 上的一个 0,1 标号函数, 如果 $|e(0) - e(1)| \leq 1$, 那么就称 f 为图 G 的边-友好标号 [1]。

定义 3 如果图 G 存在边-友好标号 f , 则称集合 $\{v(0) -$

收稿日期: 2013-07-16; 修回日期: 2013-10-15。

基金项目: 国家自然科学基金资助项目(51175153/E050903); 河南省教育厅科学技术研究重点项目(12B110009)。

作者简介: 郑玉歌(1956-), 女, 河南济源人, 教授, 主要研究方向: 图论与编码; 刘金萌(1989-), 女, 河南焦作人, 硕士研究生, 主要研究方向: 图论与编码。

$v(1) \mid$: 边标号 f 是友好的 $\}$ 为图 G 的边-平衡指数集,记为 $EBI(G)^{[1]}$ 。

定义4 C_{5m} 表示有 m 个圈,从内到外依次记为第1圈,第2圈,……,第 m 圈,其中第 i 圈上有 5^i 个点的圈套图。

定义5 P_{m_5} 表示每条路都有5个顶点,且每条路中除终点外其他点处均有5个分叉的射线路形图。

定义6 幂圈嵌套图 $C_{5m} \times P_{m_5}$ 表示圈套图 C_{5m} 与路形图 P_{m_5} 的笛卡尔积。

方便起见,对图进行以下标号:图 $C_{5m} \times P_{m_5}$ ($m \geq 4$)中的 m 个圈,在最里圈上的顶点顺时针的标号 $(1)_1, (1)_2, (1)_3, (1)_4, (1)_5$;类似地,从里到外,在最外圈上的顶点顺时针的标号为 $(m)_1, (m)_2, \dots, (m)_{5m-1}, (m)_{5m}$;符号 $(j)_i$ 表示第 j 圈上第 i 个点。

幂圈嵌套图 $C_{5m} \times P_{m_5}$ 中的射线路为:

$$(1)_{i_1} \rightarrow (2)_{i_2} \rightarrow (3)_{i_3} \rightarrow \dots \rightarrow (m-2)_{i_{m-2}} \rightarrow (m-1)_{i_{m-1}} \rightarrow (m)_{i_m}; \quad i_k = 5(i_{k-1} - 1) + j_{k-1}; \\ 1 \leq i_1 \leq 5; 1 \leq j_{k-1} \leq 5; 2 \leq k \leq m$$

即:

$$(1)_1 \rightarrow (2)_1 \rightarrow (3)_1 \rightarrow \dots \rightarrow (m-1)_1 \rightarrow (m)_1; \\ (1)_1 \rightarrow (2)_1 \rightarrow (3)_1 \rightarrow \dots \rightarrow (m-1)_1 \rightarrow (m)_2; \\ \vdots \\ (1)_1 \rightarrow (2)_{51} \rightarrow (3)_{52} \rightarrow \dots \rightarrow (m-1)_{5m-2} \rightarrow (m)_{5(5m-2-1)+4}; \\ (1)_1 \rightarrow (2)_{51} \rightarrow (3)_{52} \rightarrow \dots \rightarrow (m-1)_{5m-2} \rightarrow (m)_{5m-1}; \\ \vdots \\ (1)_5 \rightarrow (2)_{52} \rightarrow (3)_{53} \rightarrow \dots \rightarrow (m-1)_{5m-1} \rightarrow (m)_{5(5m-1-1)+4}; \\ (1)_5 \rightarrow (2)_{52} \rightarrow (3)_{53} \rightarrow \dots \rightarrow (m-1)_{5m-1} \rightarrow (m)_{5m}$$

例1 图1给出了2个 $C_{5m} \times P_{m_5}$ 图形。

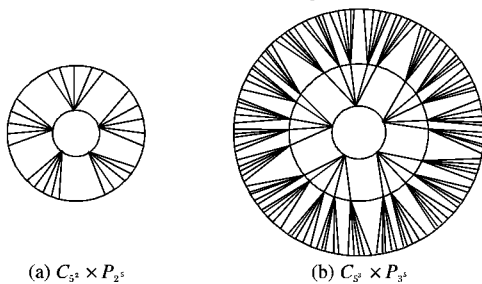


图1 $C_{5m} \times P_{m_5}$ 的2个例子

定义7 1-点 x 称为饱和1-点,是指与点 x 关联的 n 条边,当 x 为奇度点时,满足 $e_x(1) = e_x(0) + 1$;当 x 为偶度点时,满足 $e_x(1) = e_x(0) + 2$;否则称为不饱和1-点。0-点 x 称为饱和0-点,是指在点 x 关联的 n 条边,满足 $e_x(0) = n$;否则称为不饱和0-点^[13]。

定义8 令 $3t+2$ ($t \in \mathbb{N}^+$),以第 $3t+2$ ($t \in \mathbb{N}^+$)圈上的点作为起点,第 $3(t+1)+2$ ($t \in \mathbb{N}^+$)圈上的点为终点的路形图所经过的点的导出子图,作为带齿套圈子图,记作 V_t ($t = 1, 2, \dots, (m-5)/3$)。

定义9 对于给定的带齿套圈子图 V_t ($t = 1, 2, \dots, (m-5)/3$),以路形图的起点为基础,将 V_t ($t = 1, 2, \dots, (m-5)/3$)等分成扇形图,若起点在第 ∂ 圈,则它可以分为 5^∂ 个扇形子图,依次分别记为 $S_1, S_2, \dots, S_{5^\partial}$ 。

定义10 对于给定的带齿套圈子图中的扇形子图,定义为五点扇形子图组, $H(i) = S_{5i+1} \cup S_{5i+2} \cup S_{5i+3} \cup S_{5i+4} \cup S_{5i+5}$ ($0 \leq i \leq 5^\partial - 1$)。

注1 在不混淆的情况下,把图中标号为0(或1)的边记为0-边(或1-边),0-点(或1-点)表示标号为0(或1)的顶点。

注2 文中所有涉及的参数无特殊说明均为自然数。

注3 由于下文所有 $H(i)$ 的标号均相同,故记 $H = H(i)$ 。

注4 $(2k-1), (2k)_s \leftrightarrow (2k)_s, (2k)_{s+1}$ 表示边 $(2k-1), (2k)_s$ 由0-边变为1-边,同时边 $(2k)_s, (2k)_{s+1}$ 由1-边变为0-边。

注5 在构造边-平衡指数集的标号图时,所做的每一步变换都是在上一步的基础上完成的。

2 引理及证明

引理1 在幂圈嵌套图 $C_{5m} \times P_{m_5}$ 中,当 $m = 5$ 时,有 $\max\{EBI(C_{5^5} \times P_{5^5})\} = 2969$ 。

证明 对图 $C_{5^5} \times P_{5^5}$ 构造最大边-平衡指数标号。

第一步 首先将下列 $\langle 1 \rangle$ 至 $\langle 8 \rangle$ 射线路以及 $\langle 9 \rangle$ 至 $\langle 16 \rangle$ 圈中的边标号为0。

$$\langle 1 \rangle > (1)_a(2)_b(3)_c(4)_d(5)_e (a \in [1, 5]; b = 1 + 5w, w \in [0, 4]; c = 1 + 25w, w \in [0, 4]; d = 1 + w + 125s, w \in [0, 4], s \in [0, 4]; e = 1 + w + 625s, w \in [0, 24], s \in [0, 4])$$

$$\langle 2 \rangle > (2)_b(3)_c(4)_d(5)_e (b = 2 + w + 5s, w \in [0, 3], s \in [0, 4]; c = 6 + w + 25s, w \in [0, 2] \cup [5, 7] \cup [10, 11] \cup \{15\}, s \in [0, 4]; d = 26 + w + 125s, w \in [0, 14] \cup [25, 39] \cup [50, 59] \cup [75, 79], s \in [0, 4]; e = 126 + w + 625s, w \in [0, 74] \cup [125, 199] \cup [250, 299] \cup [375, 399], s \in [0, 4])$$

$$\langle 3 \rangle > (3)_c(4)_d(5)_e (c = 2 + w + 5s + 25f, w \in [0, 3], s \in \{0, 4\}, f \in [0, 4]; d = 6 + w + 25s + 125f, w \in [0, 1] \cup [5, 7] \cup [10, 12] \cup [15, 16], s \in \{0, 4\}, f \in [0, 4]; e = 26 + w + 125s + 625f, w \in [0, 9] \cup [25, 39] \cup [50, 64] \cup [75, 84], s \in \{0, 4\}, f \in [0, 4])$$

$$\langle 4 \rangle > (3)_c(4)_d(5)_e (c = 9 + w + 5s + 25f, w \in [0, 1], s \in [0, 1], f \in [0, 4]; d = 41 + w + 25s + 125f, w \in [0, 1] \cup [5, 6], s \in [0, 1], f \in [0, 4]; e = 201 + w + 125s + 625f, w \in [0, 9] \cup [25, 34], s \in [0, 1], f \in [0, 4])$$

$$\langle 5 \rangle > (3)_c(4)_d(5)_e (c = 18 + w + 25s, w \in [0, 2], s \in [0, 4]; d = 86 + w + 125s, w \in [0, 1] \cup [5, 7] \cup [10, 11], s \in [0, 4]; e = 426 + w + 625s, w \in [0, 9] \cup [25, 39] \cup [50, 59], s \in [0, 4])$$

$$\langle 6 \rangle > (4)_d(5)_e (d = 8 + w + 25s + 125f, w \in [0, 2] \cup [6, 7] \cup [11, 12] \cup [15, 17], s \in \{0, 4\}, f \in [0, 4]; e = 36 + 5w + 125s + 625f, w \in [0, 2] \cup [6, 7] \cup [11, 12] \cup [15, 17], s \in \{0, 4\}, f \in [0, 4])$$

$< 7 > (4)_d(5)_e (d = 43 + w + 25s + 125f, w \in [0, 2] \cup [5, 7], s \in [0, 1], f \in [0, 4]; e = 211 + 5w + 125s + 625f, w \in [0, 2] \cup [5, 7], s \in [0, 1], f \in [0, 4])$

$< 8 > (4)_d(5)_e (d = 88 + w + 125s, w \in [0, 2] \cup [6, 7] \cup [10, 12], s \in [0, 4]; e = 435 + 5w + 625s, w \in [0, 2] \cup [6, 7] \cup [10, 12], s \in [0, 4])$

$< 9 >$ 第1圈,第4圈中的边。

$< 10 > (2)_b(2)_{b+1} (b = 4 + w + 5s, w \in [0, 1], s \in [0, 4])$

$< 11 > (3)_c(3)_{c+1} (c = 1 + w + 5s, w \in [4, 7] \cup [9, 12] \cup [14, 16] \cup [19, 20] \cup [24], s \in [0, 4])$

$< 12 > (5)_e(5)_{e+1} (e = 37 + 2w + 5s + 125f + 625l, w \in [0, 1], s \in [0, 2] \cup [6, 7] \cup [11, 12] \cup [15, 17], f \in \{0, 4\}, l \in [0, 4])$

$< 13 > (5)_e(5)_{e+1} (e = 212 + 2w + 5s + 125f + 625l, w \in [0, 1], s \in [0, 2] \cup [5, 7], f \in [0, 1], l \in [0, 4])$

$< 14 > (5)_e(5)_{e+1} (e = 436 + 2w + 5s + 625f, w \in [0, 1], s \in [0, 2] \cup [6, 7] \cup [10, 12], f \in [0, 4])$

$< 15 > (5)_e(5)_{e+1} (e = 1 + 2w, w \in [0, 14])$

$< 16 > (5)_e(5)_{e+1} (e = 32 + 2w, w \in [0, 1])$

第二步 在第一步标号的基础上,将 $(4)_d(5)_e (d = 1 + w, w \in [0, 5]; e = 1 + w, w \in [0, 29])$ 和 $(3)_2(4)_7, (4)_7(5)_{32}, (4)_7(5)_{33}, (4)_7(5)_{34}, (4)_7(5)_{35}$, 由0-边变为1-边。

第三步 其余边标记为1-边。

标号的 $C_{55} \times P_{55}$ 中,一共有7805条边,其中3902条0-边,构造图形满足边友好标号, $|e(0) - e(1)| \leq 1$ 。如下点为0-点:

$(3)_c (c = 1 + w + 5s, w \in [5, 7] \cup [10, 12] \cup [15, 16] \cup \{0, 20\}, s \in [0, 4]);$

$(4)_d (d = 126 + w + 125s, w \in [0, 4], s \in [0, 3]);$

$(4)_d (d = 11 + w, w \in [0, 2] \cup [5, 7] \cup [10, 11]);$

$(4)_d (d = 106 + w, w \in [0, 1] \cup [5, 7] \cup [10, 12] \cup [15, 16]);$

$(4)_d (d = 86 + w + 125s, w \in [0, 1] \cup [5, 7] \cup [10, 11], s \in [0, 4]);$

$(4)_d (d = 26 + w + 125s, w \in [0, 14] \cup [25, 39] \cup [50, 59] \cup [75, 79], s \in [0, 4]);$

$(4)_d (d = 41 + w + 25s + 125f, w \in [0, 1] \cup [5, 6], s \in [0, 1], f \in [0, 4]);$

$(4)_d (d = 131 + w + 25s + 125f, w \in [0, 1] \cup [5, 7] \cup [10, 12] \cup [15, 16], s \in [0, 4], f \in [0, 3])$ 。

$v(0) = 468$, 总点数为3905, 故 $|v(1) - v(0)| = |3905 - 2 \times 468| = 2969$ 。

可以证明 $\max\{EBI(C_{55} \times P_{55})\} = 2969$ 。在此构造图中,除了 $(3)_2$ 点是不饱和和1-点外,其余点均已饱和。0-点全是最大度点,若是将图中饱和和0-点变为1-点或不定义点,至少去掉4条0-边,因此要想改变图中某个0-点的标号,至少需要将与之相关联的4条0-边与图中的4条1-边进行互换,显然这样的互换必然导致0-点的个数不变或增加,而1-点的个数必

将减少,那么 $|v(0) - v(1)|$ 的值也相应地必将减少。

引理2 在幂圈嵌套图 $C_{5m} \times P_{m_5}$ 中,对五点扇形子图组 H , 有 $\max\{EBI(H)\} = 589$ 。

证明 因为所有五点扇形子图组的图形特征一样,在此仅给出 $H = H(0) = S_1 \cup S_2 \cup S_3 \cup S_4 \cup S_5$ 的标号,其他五点扇形组的标号和它一致。

对 H 构造最大边-平衡指数标号函数。

第一步 首先将下列 $< 1 >, < 2 >, < 3 >$ 射线以及 $< 4 >, < 5 >, < 6 >, < 7 >$ 圈中的边标号为0。

$< 1 > (\partial)_a(\partial+1)_b(\partial+2)_c(\partial+3)_d (a \in [1, 5]; b = 1 + w + 5s, w \in [0, 1], s \in [0, 4]; c = 1 + w + 25s, w \in [0, 9], s \in [0, 4]; d = 1 + w + 125s, w \in [0, 49], s \in [0, 4])$

$< 2 > (\partial+1)_b(\partial+2)_c(\partial+3)_d (b = 3 + w + 5s, w \in [0, 2], s \in [0, 4]; c = 11 + w + 25s, w \in [0, 1] \cup [5, 7] \cup [10, 11], s \in [0, 4]; d = 51 + w, w \in [0, 9] \cup [25, 39] \cup [50, 59])$

$< 3 > (\partial+2)_c(\partial+3)_d (c = 13 + w + 25s, w \in [0, 2] \cup [6, 7] \cup [10, 12], s \in [0, 4]; d = 61 + w + 125s, w \in \{0, 5, 10, 30, 35, 50, 55, 60\}, s \in [0, 4])$

$< 4 > (\partial+2)_{th}$ 中的边

$< 5 > (\partial+1)_b(\partial+1)_{b+1} (b = 1 + w + 5s, w \in [0, 1] \cup \{4\}, s \in [0, 4])$

$< 6 > (\partial+3)_d(\partial+3)_{d+1} (d = 62 + 2w + 5s + 125f, w \in [0, 1]; s \in [0, 2] \cup [6, 7] \cup [10, 12], f \in [0, 4])$

$< 7 > (\partial+3)_d(\partial+3)_{d+1} (d = 1 + 2w, w \in [0, 4])$

第二步 在第一步标号标号的基础上,将其中 $(\partial+2)_c(\partial+3)_d (c = 1 + w, w \in [0, 1], d = 1 + w, w \in [0, 9])$ 由0-边变成1-边。

第三步 其余边标记为1-边。

每个 H 中共有1550条边,其中0-边为775条。满足边-友好标号的定义,即 $|e(0) - e(1)| \leq 1$ 。在构造的标号图 H 中, $(\partial+1)_b (b = 1 + w + 5s, w \in [0, 1], s \in [0, 4]) (\partial+2)_c (c = 1 + w + 25s, w \in [2, 11] \cup [15, 17] \cup [20, 21], s \in [0, 4]) (\partial+2)_c (c = 26 + w + 25s, w \in [0, 1], s \in [0, 3])$ 均为0-点, $v(0) = 93$ 。图中每个顶点都在顶点标号 f^* 下定义,所以 $|v(1) - v(0)| = |682 - 93| = 589$ 。

可以证明 $\max\{EBI(H)\} = 589$ 。构造 H 标号图中点均为饱和点,没有不定义点且0-点均是最大度点,若是将图中饱和和0-点变为1-点或不定义点,至少去掉4条0-边,因此要想改变图中某个0-点的标号,至少需要将与之相关联的4条0-边与图中的4条1-边进行互换,显然这样的互换必然导致0-点的个数不变或增加,而1-点的个数必将减少,那么 $|v(0) - v(1)|$ 的值也相应地必将减少。因此可得589为该图的最大边-平衡指数。

注 为了满足总套圈的指数计算,规定 H 中点的总个数不包括其自身的五个齿点。

引理3 若 $m \equiv 2 \pmod{3}$ 且 $m \geq 4$ 时,对于幂圈嵌套图 $C_{5m} \times P_{m_5}$, 有 $\max\{EBI(C_{5m} \times P_{m_5})\} = \frac{19 \times 5^{m-1} + 1}{4}$ 。

证明 当 $m = 5$ 时,由引理1知公式成立。下证 $m > 5$

时公式成立。

显然, $C_{5m} \times P_{m_5} = C_{55} \times P_{55} \cup \left(\bigcup_{t=1}^{(m-5)/3} V_t \right)$, 将 $m=5$ 时得到的最大指数标号图作为基础图, 带齿套圈图 $V_t (t=1, 2, \dots, (m-5)/3)$ 中 H 的标号方法与引理 2 中 H 标号方法相同, 由于在标号过程中始终保持点特征的一致性, 且依然满足边-友好标号, 因此得到的标号图对应的是 $C_{5m} \times P_{m_5} (m \geq 4)$ 的最大边-平衡指数。由引理 2 知, $\max\{EBI(H)\} = 589$ 。当带齿套圈图的起点所在圈记作第 $\partial = 3t+2 (t \in \mathbb{N}^+)$ 时, 根据带齿套圈图中 H 的定义可知, 在带齿套圈图 $V_t (t=1, 2, \dots, (m-5)/3)$ 中包含 5^{3t+1} 个 H 。

计算 $C_{5m} \times P_{m_5} (m > 5)$ 的最大边平衡指数:

$$\begin{aligned} \max\{EBI(C_{5m} \times P_{m_5})\} &= \max\{EBI(C_{55} \times P_{55})\} + \\ &\sum_{t=1}^{(m-5)/3} \max\{EBI(V_t)\} = \\ &2969 + 589 \times 5^4 + 589 \times 5^7 + \dots + 589 \times 5^{m-4} = \\ &2969 + \frac{19 \times 5^{m-1} - 11875}{4} = \frac{19 \times 5^{m-1} + 1}{4} \end{aligned}$$

综上可得, 若 $m \equiv 2 \pmod{3}$ 且 $m \geq 4$, 那么 $C_{5m} \times P_{m_5}$ 的最大边-平衡指数为 $\frac{19 \times 5^{m-1} + 1}{4}$ 。

引理 4 对于最外套层 $V_{(m-5)/3} (m \geq 8)$ 中的 H , 有 $\{588, 587, \dots, 1, 0\} \subset EBI(H)$ 。

证明 以引理 2 中构造的最大边-平衡指数的标号图作为原始图。下面对图中的 0-边和 1-边进行部分变换。

首先对奇数指数集进行构造:

第一步 $(\partial+2)_c(\partial+3)_d \leftrightarrow (\partial+3)_d(\partial+3)_{d+1} (c \in [3, 10], d = 11 + w + 5s, w \in [0, 2], s \in [0, 7])$, 依次变换, 得到 24 个奇指数的标号图, 对应指数分别为 $\{587, 585, \dots, 543, 541\}$ 。

第二步 $(\partial+3)_c(\partial+4)_d \leftrightarrow (\partial+3)_d(\partial+3)_{d+1} (c = 26 + w + 25s, w \in [0, 9], s \in [0, 3]; d = 126 + w + 5s + 125f, w \in [0, 2], s \in [0, 9], f \in [0, 3])$, 依次变换, 得到 120 个奇指数的标号图, 对应指数分别为 $\{539, 537, \dots, 299, 301\}$ 。

第三步 $(\partial+3)_c(\partial+4)_d \leftrightarrow (\partial+3)_d(\partial+3)_{d+1} (c = 11 + w + 25s, w \in [0, 1] \cup [5, 7] \cup [10, 11], s \in [0, 4]; d = 51 + w + 5s + 125f, w \in [0, 2], s \in [0, 1] \cup [5, 7] \cup [10, 11], f \in [0, 4])$, 依次变换, 得到 105 个奇指数的标号图, 指数分别为 $\{299, 333, \dots, 93, 91\}$ 。

第四步 $(\partial+2)_c(\partial+3)_d \leftrightarrow (\partial+3)_d(\partial+3)_{d+1} (c = 13 + w + 5s + 25f, w \in [0, 2], s \in [0, 2], f \in [0, 4]; d = 61 + 5w + 125s, w \in [0, 2] \cup [10, 11], s \in [0, 4])$, 依次变换, 得到 25 个奇指数的标号图, 指数分别为 $\{89, 87, \dots, 43, 41\}$ 。

第五步 $(\partial+2)_c(\partial+2)_{c+1} \leftrightarrow (\partial+2)_{c+1}(\partial+3)_d (c = 13 + w + 5s + 25f, w \in [0, 1], s \in [0, 2], f \in [0, 4]; d = 70 + 5w + 125s, w \in [0, 1, 10, 11], s \in [0, 4])$, 依次变换, 得到 20 个奇指数的标号图, 指数分别为 $\{39, 37, \dots, 3, 1\}$ 。

对偶数指数集进行构造:

第一步 $(\partial+3)_1(\partial+3)_2 \leftrightarrow (\partial+2)_1(\partial+3)_2$, 不定义点增加 1 个, $|v(0) - v(1)| = 588$ 。

第二步 进行与奇数集一至五步相同的变换, 得到指数集为 $\{586, 584, \dots, 2, 0\}$ 。

综上即可证明, 对于最外套层 $V_{(m-5)/3} (m \geq 8)$, $\{588, 587, \dots, 1, 0\} \subset EBI(H)$ 。

引理 5 对于带齿套圈图 $V_t (1 \leq t \leq (m-8)/3) (m \geq 11)$ 中, 任意 H 都有 $\{588, 587, \dots, 1, 0\} \subset EBI(H)$ 。

证明 将引理 3 中构造的最大指数的标号图作为原始图。 $V_t (1 \leq t \leq (m-5)/3)$ 中 H 记作 H_{v_t} 。由引理 2 知, $H_{v_{t+1}}$ 其自身的五个齿点算作 H_{v_t} 第三圈上的点。 V_t 上的一个 H_{v_t} 对应 V_{t+1} 上的 125 个 $H_{v_{t+1}}$, 从 125 个 $H_{v_{t+1}}$ 中取出 117 个, 每个 $H_{v_{t+1}}$ 依次变换 $(\partial+1)_{b+1}(\partial+1)_b \leftrightarrow (\partial+1)_b(\partial)_a (a \in [1, 5], b = 5 + 5w, w \in [0, 4])$ 。

那么 H_{v_t} 的第三圈有 117×5 个点从 1-点变为不定义点, 可以得到 585 个边-平衡指数对应的标号图, 故 $\{588, 587, \dots, 5, 4\} \subset EBI(H_{v_t})$, 再取出一个 $H_{v_{t+1}}$, $(\partial+1)_{b+1}(\partial+1)_b \leftrightarrow (\partial+1)_b(\partial)_a (a \in [1, 4], b = 5 + 5w, w \in [0, 3])$, H_{v_t} 的第三圈有 4 个点从 1-点变为不定义点, 此时 $\{3, 2, 1, 0\} \subset EBI(H_{v_t})$, 故有 $\{588, 587, \dots, 1, 0\} \subset EBI(H_{v_t}) (1 \leq t \leq (m-8)/3)$ 。

综上即证明, 在 $V_t (1 \leq t \leq (m-8)/3) (m \geq 11)$ 中, $\{588, 587, \dots, 1, 0\} \subset EBI(H)$ 。

引理 6 在幂圈嵌套图 $C_{5m} \times P_{m_5}$ 中, 当 $m=5$ 时, $\{2968, 2967, \dots, 1, 0\} \subset EBI(C_{55} \times P_{55})$ 。

证明 下面变换都是将引理 1 中构造的最大指数的标号图作为原始图。

首先对奇数指数集进行构造:

第一步 $(4)_d(5)_e \leftrightarrow (5)_e(5)_{e+1} (d = 11 + w + 5s + 125f, w \in [0, 2], s \in [0, 1] \cup \{16\} \cup [20, 21], f \in [0, 4]; e = 51 + w + 25s + 625f, w \in [0, 2] \cup [5, 7] \cup [10, 12], s \in [0, 1] \cup \{16\} \cup [20, 21], f \in [0, 4])$, 依次变换, 得到 225 个奇数指数的标号图, 指数分别为 $\{2967, 2965, \dots, 2521, 2519\}$ 。

第二步 $(4)_d(5)_e \leftrightarrow (5)_e(5)_{e+1} (d = 131 + w + 125s, w \in [0, 1], s \in [0, 3]; e = 651 + w + 625f, w \in [0, 2] \cup [5, 7], s \in [0, 3])$, 依次变换, 得到 24 个奇数指数的标号图, 指数分别为 $\{2517, 2515, \dots, 2473, 2471\}$ 。

第三步 $(4)_d(5)_e \leftrightarrow (5)_e(5)_{e+1} (d = 21 + w + 5s + 125f, w \in [0, 1], s \in [4, 5] \cup [9, 10] \cup \{0, 13, 15, 17, 20\}, f \in [0, 4]; e = 101 + w + 25s + 625f, w \in [0, 2] \cup [5, 7], s \in [4, 5] \cup [9, 10] \cup \{0, 13, 15, 17, 20\}, f \in [0, 4])$, 依次变换, 得到 270 个奇数指数的标号图, 指数分别为 $\{2469, 2467, \dots, 1933, 1931\}$ 。

第四步 $(4)_d(5)_e \leftrightarrow (5)_e(5)_{e+1} (d = 26 + w + 25s + 125f, w \in [0, 14], s \in [0, 1], f \in [0, 4]; e = 126 + w + 5s + 125f + 625l, w \in [0, 2], s \in [0, 14], f \in [0, 1], l \in [0, 4])$, 依次变换, 得到 450 个奇数指数的标号图, 得到指数分别为 $\{1929, 1927, \dots, 1033, 1031\}$ 。

第五步 $(4)_d(5)_e \leftrightarrow (5)_e(5)_{e+1} (d = 101 + w + 125s, w \in [0, 4], s \in [0, 4]; e = 126 + w + 5s + 625f, w \in [0, 2], s \in [0, 4], f \in [0, 4])$, 依次变换, 得到 75 个奇数指数的标号图, 得到指数分别为 $\{1029, 1027, \dots, 883, 881\}$ 。

第六步 $(4)_d(5)_e \leftrightarrow (5)_e(5)_{e+1} (d = 76 + w + 125s, w \in [0, 9], s \in [0, 4]; e = 126 + w + 5s + 625f, w \in [0, 2],$

$s \in [0, 9], f \in [0, 4]$), 依次变换, 得到 150 个奇数指数的标号图, 得到指数分别为 $\{879, 877, \dots, 583, 581\}$ 。

第七步 $(4)_d(5)_e \leftrightarrow (5)_e(5)_{e+1} (d = 126 + w + 125s, w \in [0, 4], s \in [0, 3]; e = 626 + w + 5s + 625f, w \in [0, 2], s \in [0, 4], f \in [0, 3])$, 依次变换, 得到 60 个奇数指数的标号图, 得到指数分别为 $\{879, 877, \dots, 463, 461\}$ 。

第八步 $(4)_d(5)_e \leftrightarrow (5)_e(5)_{e+1} (d = 14 + w + 5s + 125f, w \in [0, 1], s \in [0, 1] \cup [20, 21], f \in [0, 4]; e = 66 + w + 25s + 625f, w \in [0, 5], s \in [0, 1] \cup [20, 21], f \in [0, 4])$, 依次变换, 得到 40 个奇数指数的标号图, 得到指数分别为 $\{459, 457, \dots, 383, 381\}$ 。

第九步 $(4)_d(5)_e \leftrightarrow (5)_e(5)_{e+1} (d = 23 + w + 5s + 125f, w \in [0, 2], s \in \{0\} \cup [4, 5] \cup [9, 10], f \in [0, 4]; e = 111 + w + 25s + 625f, w \in [0, 5, 10], s \in \{0\} \cup [4, 5] \cup [9, 10], f \in [0, 4])$, 依次变换, 得到 75 个奇数指数的标号图, 得到指数分别为 $\{379, 377, \dots, 233, 231\}$ 。

第十步 $(5)_e(5)_{e-1} \leftrightarrow (5)_{e-1}(5)_{e-2} (e = 70 + 5w + 25s + 625f, w \in [0, 1], s \in [0, 1] \cup [20, 21], f \in [0, 4])$, 依次变换, 得到 40 个奇数指数的标号图, 得到指数分别为 $\{229, 227, \dots, 153, 151\}$ 。

第十一步 $(5)_e(5)_{e-1} \leftrightarrow (5)_{e-1}(5)_{e-2} (e = 115 + 5w + 25s + 625f, w \in [0, 2], s \in [4, 5] \cup [9, 10] \cup \{0\}, f \in [0, 4])$, 依次变换, 得到 75 个奇数指数的标号图, 得到指数分别为 $\{149, 147, \dots, 3, 1\}$ 。

对偶数指数集进行构造:

第一步 $(2)_4(2)_5 \leftrightarrow (2)_5(1)_1, |v(0) - v(1)| = 2968$ 。

第二步 重复与奇数集第一~第十一步相同的变换, 得到偶指数集 $\{2966, 2964, \dots, 2, 0\}$ 。综上证明 $\{2968, 2967, \dots, 1, 0\} \subset EBI(C_{5m} \times P_{55})$ 。

引理 7 在无限路幂圈嵌套图 $C_{5m} \times P_{m_5}$ 中, 当 $m \equiv 2 \pmod{3}$ 且 $m > 4$ 时, 有

$$\left\{ \frac{19 \times 5^{m-1} - 3}{4}, \frac{19 \times 5^{m-1} - 7}{4}, \dots, 1, 0 \right\} \subset EBI(C_{5m} \times P_{m_5})$$

证明

①当 $m = 5$ 时, 由引理 6 知公式成立。

下证 $m > 5$ 时公式成立。下面变换都是将引理 3 中构造的最大指数的标号图作为原始图。

②当 $m = 8$ 时, $C_{58} \times P_{85} = C_{55} \times P_{55} \cup V_1$ 。

第一步 根据引理 4 对 H 变换方法, V_1 中每个 H 的指数可以减少 589, 依次变换, 即得到边-平衡指数 $\{588, 587, \dots, 1, 0\}$ 对应的标号图。 V_1 中 625 个 H , 它们与引理 4 中 H 的边变换方法相同, 依次变换, 得到边-平衡指数 $\{371\,093, 371\,092, \dots, 2969\}$ 对应的标号图。

第二步 在 V_1 中取出 593 个 H , 每个 H , $(6)_{b+1}(6)_b \leftrightarrow (6)_b(5)_a (a \in [1, 5], b = 5 + 5w, w \in [0, 4])$, 依次变换, 得到边-平衡指数 $\{2968, 2967, \dots, 5, 4\}$ 对应的标号图。

第三步 在 V_1 再取出 1 个 H , $(6)_{b+1}(6)_b \leftrightarrow (6)_b(5)_a$

($a \in [1, 4], b = 5 + 5w, w \in [0, 3]$), 依次变换, 得到边-平衡指数 $\{3, 2, 1, 0\}$ 对应的标号图。

③当 $m \geq 11$ 时, $C_{5m} \times P_{m_5} = C_{55} \times P_{55} \cup \left(\bigcup_{t=1}^{(m-5)/3} V_t \right)$ 。

第一步 $V_{(m-5)/3}$ 有 5^{m-4} 个 H , 它们与引理 4 中 H 边变换方法相同, 则它们的指数可以减少 $589 \times 5^{m-4}$, 依次变换, 得到边-平衡指数 $\left\{ \frac{19 \times 5^{m-1} - 3}{4}, \frac{19 \times 5^{m-1} - 7}{4}, \dots, \frac{19 \times 5^{m-1} - 2356 \times 5^{m-4} + 1}{4} \right\} \subset EBI(C_{5m} \times P_{m_5})$ 对应的标号图。

第二步 $V_t (1 \leq t \leq (m-8)/3)$ 中的 H 与引理 5 中 H 的边变换方法相同, 所有 H 平衡指数依次减少到 0, 得到边-平衡指数 $\left\{ \frac{19 \times 5^{m-4} - 3}{4}, \frac{19 \times 5^{m-4} - 7}{4}, \dots, 2969 \right\} \subset EBI(C_{5m} \times P_{m_5})$ 对应的标号图。

第三步 重复当 $m = 8$ 时, 第二、三步同样的变换, 得到边-平衡指数 $\{2968, 2967, \dots, 1, 0\}$ 对应的标号图。

综上证明, 当 $m \equiv 2 \pmod{3}$ 且 $m \geq 4$ 时, 有 $\left\{ \frac{19 \times 5^{m-1} - 3}{4}, \frac{19 \times 5^{m-1} - 7}{4}, \dots, 1, 0 \right\} \subset EBI(C_{5m} \times P_{m_5})$ 。

3 主要结论

由引理 3 和引理 7 得:

定理 1 在无限路幂圈嵌套图 $C_{5m} \times P_{m_5}$ 中, 当 $m \equiv 2 \pmod{3}$ 且 $m \geq 4$ 时, 有

$$EBI(C_{5m} \times P_{m_5}) = \left\{ \frac{19 \times 5^m + 1}{4}, \frac{19 \times 7^m - 3}{4}, \dots, 1, 0 \right\}$$

4 结语

为了研究网络图边-平衡指数集的标号, 本文提出了幂圈嵌套网络图以及五点扇形子图组的概念。利用对五点扇形子图组局部特征的研究, 递归到 $C_{5m} \times P_{m_5}$ 整个图形, 进而给出了当 $m \equiv 2 \pmod{3}$ 时, $C_{5m} \times P_{m_5}$ 边-平衡指数集。文中标号函数的设计方法为其他无限嵌套图的研究提供了很好的思路借鉴, 所证结果为图论和编码理论提供了重要的公式和数据。

参考文献:

- [1] KONG M, LEE S M. On edge-balanced graphs[J]. Graph Theory, Combinatoric and Algorithms, 1995, 1: 711-722.
- [2] CHEN B L, HUANG K C, LEE S M, et al. On edge-balanced multigraphs[J]. Journal of Combinatorial Mathematics and Combinatorial Computing, 2002, 42: 177-185.
- [3] LEE A T, LEE S M, NG H K. On balance index sets of graphs[J]. Journal of Combinatorial Mathematics and Combinatorial Computing, 2008, 66: 135-150.
- [4] KONG M, LEE S M, NG H K. On friendly index sets of 2-regular graphs[J]. Discrete Mathematics, 2008, 308(23): 5522-5532.
- [5] KIM S R, LEE S M, NG H K. On balancedness of some graph constructions[J]. Journal of Combinatorial Mathematics and Combinatorial Computing, 2008, 66: 3-16.

(下转第 400 页)

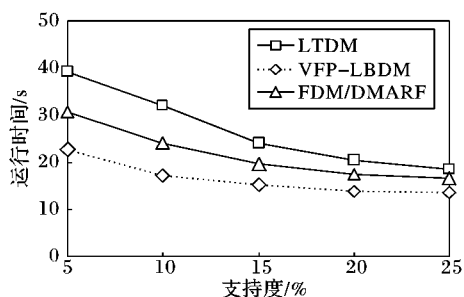


图6 不同支持度下运行时间的对比

通过实验分析可知,VFP-LBDM 算法在大规模数据集和较高支持度情况下运用更为有效。面向当今互联网应用广为普及的大数据时代,VFP-LBDM 算法具有良好的应用前景。

4 结语

本文所给 VFP-LBDM 算法使用 VFP-tree 存储项及其关联,避免了局部挖掘结果合并所引发的通信和时间上的开销;同时该算法采用混合体系结构,并按照各站点的处理能力分配挖掘任务,使负载更为均衡。经实验证明所给算法在大数据集和较低支持度下具有良好的性能。

参考文献:

- [1] GUO J F. Research on algorithms for mining association rules in distributed database [D]. Harbin: Harbin Engineering University, 2008. (郭俊凤. 分布式关联规则挖掘算法研究[D]. 哈尔滨: 哈尔滨工程大学, 2008.)
- [2] NI D. The study and implementation of several distributed algorithms for mining association rules [D]. Hangzhou: Zhejiang Gongshang University, 2009. (倪栋君. 分布式关联规则挖掘若干算法研究与实现[D]. 杭州: 浙江工商大学, 2009.)
- [3] AGRAWAL R, IMIELINSKI T, SWAMI A. Mining association rules between sets of items in large databases[C]// Proceedings of the 1993 ACM SIGMOD Conference on Management of Data. New York: ACM, 1993: 207-216.
- [4] HAN J W, PEI J, YIN Y. Mining frequent patterns without candidate generation[C]// Proceedings of the 2000 ACM SIGMOD International Conference on Management of Data. New York: ACM, 2000: 1-12.
- [5] TSENG F S C, KUO Y H, HUANG Y M. Toward boosting distributed association rule mining by data de-clustering[J]. Information Sciences, 2010, 180(11): 4263-4289.
- [6] HE B. Distributed algorithm for mining association rules based on FP-tree[J]. Control and Decision, 2012, 27(4): 618-622. (何波. 基于频繁模式树的分布式关联规则挖掘算法[J]. 控制与决策, 2012, 27(4): 618-622.)
- [7] CHEN X Y, HE Y S, CHEN P F. HPFP-Miner: A novel parallel frequent itemset mining algorithm[C]// Proceedings of the 5th International Conference on Natural Computation. Washington, DC: IEEE Computer Society, 2009: 139-143.
- [8] XU J, LI Y, LIU B, et al. A parallel frequent itemsets mining algorithm based on vertical FP-tree[J]. Computer & Digital Engineering, 2012, 40(10): 12-15. (徐杰, 李云, 刘博, 等. 基于垂直FP树的并行频繁项集挖掘[J]. 计算机与数字工程, 2012, 40(10): 12-15.)
- [9] LIU H. Design of frequent pattern mining algorithm LPS-miner and research on parallel formulations[D]. Lanzhou: Lanzhou University, 2009. (刘慧玲. 频繁模式挖掘算法 LPS-Miner 及其并行模式研究[D]. 兰州: 兰州大学, 2009.)
- [10] CHEUNG D W L, HAN J, NG V T, et al. A fast distributed algorithm for mining association rules[C]// Proceedings of the 4th International Conference on Parallel and Distributed Systems. Washington, DC: IEEE Computer Society, 1996: 31-42.
- [11] CHEN M, LI H. FP-growth parallel algorithm in cluster system[J]. Computer Engineering, 2009, 35(20): 71-72, 75. (陈敏, 李徽翡. 集群系统中的 FP-Growth 并行算法[J]. 计算机工程, 2009, 35(20): 71-72, 75.)
- [12] CAO W. Distributed association rules mining algorithm[J]. Computer Systems & Applications, 2012, 21(8): 218-221. (曹文梁. 一种分布式数据库关联规则挖掘算法[J]. 计算机系统应用, 2012, 21(8): 218-221.)
- [6] CHOPRA D, LEE S M, SU H H. On edge-balance index sets of wheels[J]. International Journal of Contemporary Mathematical Sciences, 2010, 5(53): 2605-2620.
- [7] CHOU C C, GALLARDI M, KONG M, et al. On edge-balance index of L-product of cycles with stars, part 1[J]. Journal of Combinatorial Mathematics and Combinatorial Computing, 2011, 78: 195-211.
- [8] LU J, ZHENG Y G. On the edge-balance index sets of $B(n)$ [J]. Proceedings of the Jangjeon Mathematical Society, 2009, 12(1): 37-44.
- [9] ZHENG Y G, LU J, LEE S M, et al. On the perfect index sets of the Chain-Sum graphs of the first kind of K_4-e [C]// Proceedings of the 2nd International Conference on Intelligent Computation Technology and Automation. Piscataway: IEEE, 2009: 586-589.
- [10] WANG Y, ZHENG Y G, ADIGA C, et al. On the edge-balance index sets of N cycles three nested graph ($N=0,1,2 \pmod{6}$) [J]. Advanced Studied in Contemporary Mathematics, 2011, 21(1): 85-93.
- [11] YAO J, ZHENG Y G. On the quick construction of all edge-balance index sets of the graph $C_n \times P_5$ [C]// Proceedings of the 2011 International Conference on Consumer Electronics, Communications and Networks. Piscataway: IEEE, 2011: 4227-4230.
- [12] ZHENG Y, YAO J. On the quick construction of all edge-balance index sets of the graph $C_n \times P_{11}$ [C]// Proceedings of the 2011 International Conference on Consumer Electronics, Communications and Networks. Piscataway: IEEE, 2011: 4231-4234.
- [13] ZHENG Y, YAO J. Edge-balance index sets of nested graph with unlimited paths and equal circles(1) [J]. Journal of Shanghai Jiaotong University, 2013, 47(7): 1160-1163. (郑玉歌, 姚景景. 无限路等圈嵌套图边-平衡指数集的完全确定(1)[J]. 上海交通大学学报: 自然科学版, 2013, 47(7): 1160-1163.)

(上接第395页)